ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 марта 2008 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №6–2007» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М2066» или «Ф2073». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М2066–М2070, Ф2073–2077

М2066. Квадрат со стороной 1 разрезан на 100 прямоугольников одинакового периметра p. Найдите наибольшее значение p.

А.Шаповалов, С.Берлов

М2067. Докажите, что если число $\underbrace{111\ldots11}_{n \text{ единиц}}$ делится на n, то n делится на 3.

Р.Ковалев

М2068. В футбольном турнире участвуют mn команд $(m, n \geq 2)$. Командам присвоены номера 1, 2, …, mn в соответствии с местом, занятым на предварительном этапе. Организаторы турнира собираются разбить команды на m групп по n команд так, чтобы для любых двух команд A и B выполнялось условие: если номер A меньше номера B, то сумма номеров соперников по группе для команды A больше, чем для команды B. При каких m и n желание организаторов можно осуществить?

И.Акулич

М2069. Обозначим через $\|y\|$ расстояние от действительного числа y до ближайшего целого числа. Пусть для иррационального числа x бесконечная последовательность натуральных чисел $q_1, q_2, \ldots, q_k, \ldots$ определена следующим образом: $q_1 = 1$, q_{k+1} – наименьшее натуральное q, для которого $\|xq\| < \|xq_k\|$. Докажите, что $q_{k+2} \geq q_k + q_{k+1}$ для всех k = 1, 2, …

В.Быковский

М2070*. Докажите, что главные диагонали шестиугольника, лежащего в пересечении треугольников $P_1P_3P_5$ и $P_2P_4P_6$ (рис.1), пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда выполнено равенство

$$\frac{S_1 \cdot S_3 \cdot S_5}{S_{135}} = \frac{S_2 \cdot S_4 \cdot S_6}{S_{246}},$$

где S_i – площадь маленького треугольника с вершиной P_i, примыкающего к шестиугольнику, а S_{135} и S_{246} – площади треугольников $P_1P_3P_5$ и $P_2P_4P_6$ соответственно.

С.Дориченко

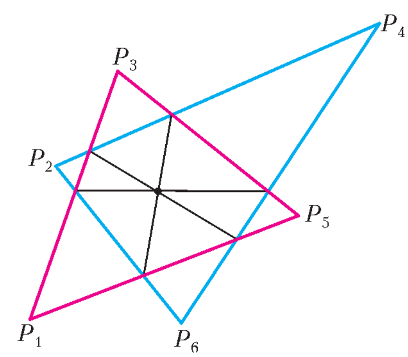


Рис. 1

Ф2073. Тело движется вдоль координатной оси X, его скорость v пропорциональна корню квадратному из координаты x. В точке с координатой $x_1 = 100$ м скорость тела составляет $v_1 = 10$ м/с. Найдите ускорения в точках с координатами $x_2 = 20$ м и $x_3 = 300$ м.

А.Простов

Ф2074. На наклонной плоскости с углом α при основании удерживают клин массой M (рис.2). Угол при основании клина также равен α, а расположен клин «вверх ногами», так что его верхняя поверхность параллельна плоскости земли. На этой поверхности находится очень легкая тележка с четырьмя массивными колесами – масса каждого колеса m. Трение между поверхностью клина и колесами достаточно велико, поэтому колеса не проскальзывают. Клин отпускают. Найдите его ускорение при движении (пока тележка еще находится на клине). Масса каждого колеса сосредоточена в его ободе.

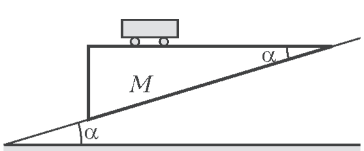


Рис. 2

Т.Ележкин

Ф2075. В компьютерной модели рассматривается кубический сосуд объемом 1 м^3, заполненный «газом» – в сосуде находятся 1000 частиц диаметром 1 мм каждая и 2 частицы диаметром 1 см. В начальный момент маленькие частицы неподвижны, большие имеют скорости по 100 м/с. Оцените число ударов больших частиц о стенки сосуда за большое время – за 10 лет. Оцените также число столкновений больших частиц с маленькими за то же время. Считайте, что частицы «сделаны» из одного и того же материала. Внешние силы в модели не предусмотрены, удары считаются упругими.

А.Старов

Ф2076. В схеме неуравновешенного «мостика» (рис.3) два резистора имеют сопротивления по 10 Ом, два – по 30 Ом. В диагональ мостика включен амперметр, имеющий пренебрежимо малое сопротивление. Батарейка напряжением 3 В подключена к другой диагонали мостика. Вместо одного из резисторов подключают еще одну такую же батарейку. Найдите максимальное и минимальное возможные значения тока через амперметр в получившейся схеме.

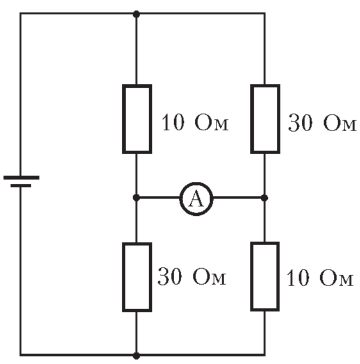


Рис. 3

З.Рафаилов

Ф2077. На тороидальный сердечник, сделанный из сплава с очень большой магнитной проницаемостью, намотаны три одинаковые катушки индуктивностью L = 1 Гн каждая (рис.4). К выводам одной из катушек подключен резистор сопротивлением R = 100 Ом, две другие катушки соединены последовательно (начало одной – к концу другой). К свободным выводам получившейся «двойной» катушки подключают батарейку напряжением U = 3 В. Через время $\tau = 0{,}5$ с батарейку отключают. Какой ток течет через батарейку через время $0{,}5\tau$ после включения? Какое количество теплоты выделится в резисторе за время τ после включения и после отключения батарейки?

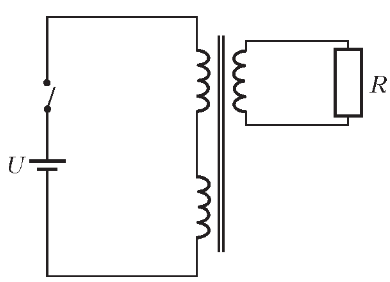


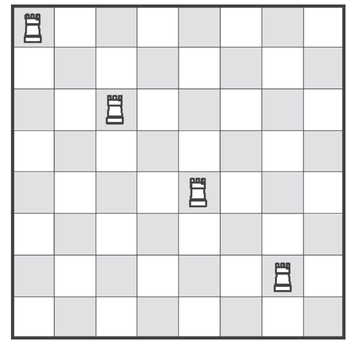
Рис. 4

А.Зильберман

Решения задач М2041 – М2050, Ф2058 – Ф2062

М2041. *Какое наименьшее число ладей нужно поставить на шахматной доске 8×8, чтобы все белые клетки оказались под боем этих ладей?*

Ответ: 4.



Каждая ладья бьет не более 8 белых клеток (4 клетки – на одной горизонтали и 4 клетки – на одной вертикали), поэтому все 32 белые клетки побить менее чем четырьмя ладьями не удастся. Пример, когда четыре ладьи бьют все белые клетки, показан на рисунке.

Р.Женодаров

М2042. *Докажите, что при $0 < x < \frac{\pi}{2}$ выполнено неравенство*

$$(\operatorname{tg} x)^{\sin x} + (\operatorname{ctg} x)^{\cos x} \ge 2.$$

Пусть $a \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right]$, $b \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ и $a + b = \frac{\pi}{2}$. Тогда $(\operatorname{tg} b)^{\sin b} = (\operatorname{ctg} a)^{\cos a}$, $(\operatorname{ctg} b)^{\cos b} = (\operatorname{tg} a)^{\sin a}$. Таким образом, если требуемое неравенство выполняется для $x = a$, то оно выполняется и для $x = b$; поэтому достаточно доказать неравенство для $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right]$. Если $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right]$, то $\operatorname{ctg} x \ge 1$, $\cos x \ge \sin x$, поэтому

$$(\operatorname{tg} x)^{\sin x} + (\operatorname{ctg} x)^{\cos x} \ge (\operatorname{tg} x)^{\sin x} + (\operatorname{ctg} x)^{\sin x} =$$

$$= (\operatorname{tg} x)^{\sin x} + \frac{1}{(\operatorname{tg} x)^{\sin x}} = A + \frac{1}{A}$$

для положительного A. Но

$$A + \frac{1}{A} = \left(\sqrt{A} - \frac{1}{\sqrt{A}}\right)^2 + 2 \ge 2.$$

Н.Агаханов, И.Богданов

М2043. *Можно ли сконструировать такой набор «Юный паркетчик» из четырех одинаковых многоугольников и квадратика, чтобы из всех пяти деталей можно было сложить квадрат, а из трех одинаковых деталей – равносторонний треугольник?*

Ответ: можно.

Опустив перпендикуляры из центра на стороны, разобьем правильный треугольник на три дельтоида (см.

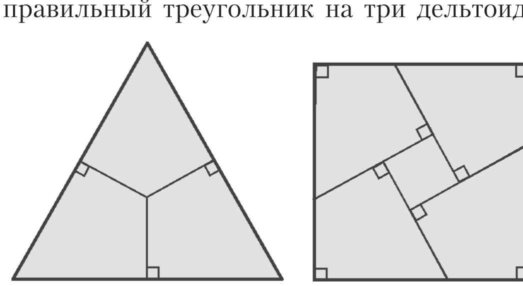


рисунок). Из четырех таких дельтоидов можно составить квадрат, в котором недостает центрального квадратика.

О.Нечаева