Глава 4 Уравнения

Тестовые задания и диктанты

Т-01 Решение линейного уравнения

Приведите (по возможности устно) линейные уравнения к виду $ax = b$, $a > 0$, и найдите корень. Найденные числа a, b и x занесите в таблицу.

№	Уравнение	a	b	x
1	$x - 7 = 2x + 3$			
2	$9 - 3x = x + 1$			
3	$2(1 - 2x) = -3(x - 2) - 2$			
4	$\frac{2}{3}x - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}(2 - x) + \frac{1}{6}$			
5	$2{,}4 - 0{,}3x = 0{,}1(2x - 1)$			
6	$\frac{2x - 5}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3 - 2x}{2} = \frac{3}{8}$			
7	$7(2 - x) - 5(2x - 3) = 3(1 - 3x) + 2(4 - x)$			
8	$x + 2x + 3x + \ldots + 10x + 110 = 0$			
9	$1{,}7(x - 2) + 1{,}3(x + 2) = 0{,}8(-1 - x)$			
10	$\frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x - 3}{2 \cdot 3} + \frac{x + 6}{3 \cdot 4} + \frac{x - 10}{4 \cdot 5} = 4$			

Т-02 Решение уравнений разложением на множители

Приведите уравнение к такому виду: произведение множителей равно нулю. Определите число различных корней и найдите их. Запишите корни в порядке возрастания.

№	Уравнение	Корни	№	Уравнение	Корни
1	$2x(x-3)=2(3-x)$		6	$x^3-8=2x(x-2)$	
2	$7(2-x)=(x+1)(x-2)$		7	$x^3+8=7(x+2)$	
3	$x^2-4=4x-8$		8	$x^2+x-2=2x^2+3x-5$	
4	$(2x+5)(x+3)=x^2-9$		9	$x^4=81$	
5	$x(x^2-1)=3(x^2+x)$		10	$(x^2+x-7)(x-2)=2-x$	

Т-03 Рациональные уравнения, сводящиеся к линейным

Решите уравнения. Начните с нахождения области допустимых значений. Для корней преобразованных уравнений проверьте, входят ли они в ОДЗ.
Заполняя таблицу, в графу «ОДЗ» впишите числа, которые не входят в область допустимых значений.

№	Уравнение	ОДЗ $x \neq \ldots$	Ответ $x = \ldots$
1	$\dfrac{x+5}{x-1} = 0$		
2	$\dfrac{2x+3}{x+1} = 1$		
3	$\dfrac{3}{2x-7} = \dfrac{10}{x+5}$		
4	$\dfrac{x}{x-3} = \dfrac{3x+44}{3x+2}$		
5	$\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{3}{3x-1}$		
6	$\dfrac{2}{x-1} - \dfrac{1}{2x} = \dfrac{3}{2(x+1)}$		
7	$\dfrac{x-1}{1+\dfrac{2}{x-3}} = 2$		
8	$\dfrac{2 \cdot \dfrac{2x}{x+1}}{\dfrac{2x}{x+1} + 1} = \dfrac{6}{5}$		

Т-04 Замена неизвестного

Решите уравнение, используя метод замены неизвестного. При решении рациональных уравнений не забудьте про ОДЗ.

№	Уравнение	Ответ $x = \ldots$
1	$(4x-5)^2 = 9$	
2	$\dfrac{3}{x-1} + 2 = \dfrac{1}{1-x} + 6$	
3	$(x-2)^2 - 2(x-2) - 3 = 0$	
4	$\left(\dfrac{x+1}{x-3}\right)^2 = \dfrac{2(x+1)}{x-3}$	
5	$(x^2+x+1)(x^2+x-1) = 3$	
6	$\dfrac{1}{x^2-x-5} = \dfrac{7}{x^2-x+1}$	
7	$(x+1)(x+3)(x+2)^2 = 56$	
8	$\dfrac{x-1}{x+1} + \dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{5}{2}$	

Т-05 Единственность корня

При каких значениях a данное уравнение относительно x имеет единственный корень? Вычислите этот корень.

Помощь: Укажите значения a, при которых единственность корня нарушается — они являются исключительными. Если таких значений нет, то в таблице надо поставить прочерк (черточку). Не забывайте обращать внимание на ОДЗ рациональных выражений!

№	Уравнение	Исключительные значения a ($a \neq \ldots$)	Корень
1	$(a-3)x = 5$		
2	$ax + 3 = 3x$		
3	$ax - 5 = 2(x - a)$		
4	$(a+2)x = (3a-4)x$		
5	$\dfrac{2x-3}{x-1} = a$		
6	$\dfrac{ax}{x-2} = 1$		
7	$\dfrac{a-1}{a+1}x = 2$		
8	$\dfrac{2}{x+3} = \dfrac{a}{2x-5}$		

Т-06 Линейная связь между неизвестными

Из уравнения, связывающего неизвестные x и y, выразите каждое из них через другое.

№	Уравнение	$x = \dots$	$y = \dots$
1	$2x - y = 4$		
2	$3x + 2y + 5 = 0$		
3	$2(x - y + 1) = 5y - x$		
4	$kx + ly = 1$ $k, l \neq 0$		
5	$\dfrac{x - y}{x + y} = 3$		
6	$\dfrac{x}{x + y} + 2 = 0$		
7	$\dfrac{ax + by}{x + y} = c$		
8	$xy + x + y = 0$		

Т-07 Линейные системы — метод подстановки

Решите линейные системы. Выберите из одного из уравнений одно из неизвестных, выразите его через другое и запишите это выражение в таблице. Закончите вычисления и запишите в таблице ответ.

№	Система	Выражение одного из неизвестных через другое	Ответ $(x; y)$
1	$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 3x + 2y = -1 \end{cases}$		
2	$\begin{cases} 5x + 3y = 1 \\ x - 2y = 10 \end{cases}$		
3	$\begin{cases} -2x + 7y = 4 \\ 3x - 8y = -1 \end{cases}$		
4	$\begin{cases} 6x - 11y = 4 \\ 4x - 3y = 7 \end{cases}$		
5	$\begin{cases} 5x - \frac{3}{2}y = 19 \\ 2x + \frac{y}{2} = 12 \end{cases}$		
6	$\begin{cases} 7x + 3y = 0 \\ 5x - y = 22 \end{cases}$		

Т-08 Линейные системы — метод сложения

Решите линейные системы. Подберите числа a и b так, чтобы сумма первого уравнения, умноженного на a, и второго, умноженного на b, была уравнением с одним неизвестным. Впишите в таблицу найденные числа a и b, полученную комбинацию уравнений и ответ к системе.

№	Система	a	b	Комбинация	Ответ
	$\begin{cases} x+2y=1 \\ x-y=1 \end{cases}$	1	2	$3x=3$	$(1;0)$
1	$\begin{cases} 2x+y=1 \\ 3x-y=14 \end{cases}$				
2	$\begin{cases} 4x+3y=1 \\ 2x-y=3 \end{cases}$				
3	$\begin{cases} 3x+2y=-2 \\ 2x-3y=16 \end{cases}$				
4	$\begin{cases} \frac{x}{2}-3y=1 \\ 2x+5y=-13 \end{cases}$				
5	$\begin{cases} 5x-6y=4 \\ -3x+7y=1 \end{cases}$				
6	$\begin{cases} 100x-\frac{y}{2}=50 \\ 3x+\frac{y}{50}=5 \end{cases}$				

Т-09 Системы уравнений — метод замены неизвестных

Решите системы, вводя новые неизвестные, обозначая их z и t. Запишите линейную систему относительно z и t. Вернитесь к x и y и запишите ответ.

№	Система	Замена $z = \ldots$ $t = \ldots$	Система относительно z и t	$(z;t)$	$(x;y)$
1	$\begin{cases} \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{y} = 1 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 3 \end{cases}$				
2	$\begin{cases} \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{3}{y+1} = -2 \\ \dfrac{5}{x-2} + \dfrac{6}{y+1} = 7 \end{cases}$				
3	$\begin{cases} 3x - \dfrac{2}{y} = 5 \\ 7x + \dfrac{4}{y} = 10 \end{cases}$				
4	$\begin{cases} x^2 + \dfrac{3}{y-1} = 12 \\ -2x^2 + \dfrac{15}{y-1} = 3 \end{cases}$				

Т-10 Уравнение прямой, проходящей через две точки

Прямая l проходит через точки $P(\ldots;\ldots)$ и $Q(\ldots;\ldots)$. Запишите уравнение прямой в системе координат xOy. Постройте прямые.

№	P	Q	Уравнение прямой l
1	$(0;0)$	$(1;3)$	
2	$(4;1)$	$(2;3)$	
3	$(-1;1)$	$(5;5)$	
4	$(3;1)$	$(-1;2)$	
5	$(1;-2)$	$(2;1)$	

Т-11 Графическое решение систем

Постройте прямые, задаваемые уравнениями систем, найдите их точки пересечения и запишите их координаты в качестве решения систем. Проверьте ответ подстановкой.

№	Система	Ответ $(x; y)$	№	Система	Ответ $(x; y)$
1	$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$		4	$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 5x + 2y = 3 \end{cases}$	
2	$\begin{cases} x - y = 3 \\ -x + 3y = -1 \end{cases}$		5	$\begin{cases} x + y = 4 \\ 4x - 8y = 9 \end{cases}$	
3	$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - 2y = 7 \end{cases}$		6	$\begin{cases} 4x + 2y = 1 \\ x + 4y = -12 \end{cases}$	

Т-12 Исследование линейной системы

Для линейной системы с неизвестными x и y

- определите, при каких значениях a система имеет единственное решение и найдите его;
- выясните, что происходит при исключительных значениях a, отметив соответствующее поле в таблице.

№	Система	Исключительные значения $a \neq \ldots$	Ответ в общем случае $x = \ldots$ $y = \ldots$	Что происходит при исключительном значении	
				Решений нет	Решений бесконечно много
1	$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + ay = 3 \end{cases}$				
2	$\begin{cases} ax - 2y = 3 \\ x + 2y = -3 \end{cases}$				
3	$\begin{cases} (a-3)x + y = 1 \\ -2ax + y = 0 \end{cases}$				
4	$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ ax + (3a-14)y = 10 \end{cases}$				

Лабораторные работы

ЛР-01 Исследование линейного уравнения

Рассмотрим уравнение относительно x вида

$$\frac{x-a}{x-b}=k,$$

где a, b и k — некоторые числа.

1 Эксперимент.
Решите уравнение при заданных значениях a, b и k. Если решение единственно, найдите его и впишите в таблицу. Если решений нет, поставьте в таблице прочерк —, если решений бесконечно много, поставьте значок ∞ — бесконечность.

№	a	b	k	x
1	1	2	2	
2	-1	5	3	
3	6	-4	-1	
4	2	3	1	
5	2	2	1	

2 Пусть a и b — разные числа. Найдите зависимость решения от k.

Решите уравнение $\dfrac{x-3}{x-2} = k$.

Заполните ответ: при $k \neq \boxed{}$ уравнение имеет единственное решение $x = \boxed{}$, при $k = \boxed{}$ уравнение ____________________________________.

Сформулируйте аналогичный результат для уравнения $\dfrac{x-a}{x-b} = k$ при любых числах $a \neq b$.

3 Случай $a = b$.

Самостоятельно исследуйте «исключительное» уравнение $\dfrac{x-a}{x-a} = k$.

Если $k \neq \boxed{}$, то уравнение ____________________________________.

Если $k = \boxed{}$, то всякое число x, кроме $x = \boxed{}$, является решением уравнения.

4 Графическое исследование.

Рассмотрим «близкое» уравнение $x-a = k(x-1)$. Оно является следствием из исходного при $b = \boxed{}$.

Постройте прямые $y = x - a$ при $a = -1;\ 0;\ 1;\ 3$ и прямые $y = k(x-1)$ при $k = -2;\ -1;\ 1;\ 3$. Найдите координаты точек пересечения.

ЛР-02 Уравнение прямой в отрезках

1 На координатной плоскости xOy постройте прямые l_1 и l_2, задаваемые уравнениями

$$l1\colon \frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1, \qquad l_2\colon \frac{x}{8}-\frac{y}{8}=1.$$

Для построения этих прямых проще всего найти точки их пересечения с осями координат.

2 Найдите в общем виде координаты точек пересечения прямой $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ с осями координат. Какой геометрический смысл имеют числа a и b? Какой смысл имеют знаки чисел a и b?

Уравнение вида $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ называют *уравнением прямой в отрезках*.

3 Напишите уравнения прямых, проходящих через пары точек $P_1(2;0)$, $Q_1(0;4)$ и $P_2(5;0)$, $Q_2(0;-2)$.

4 Найдите координаты точек пересечения всех построенных четырех прямых. До вычислений определите число этих точек.

Координаты точек следует искать, решая системы линейных уравнений. Затем надо сравнить результат вычислений с чертежом.

ЛР-03 Линейные системы

1 Решите системы с тремя неизвестными методом подстановки.

1) $\begin{cases} x + y - z = 0, \\ 2x - y + z = 3, \\ 3x + 2y - z = 3. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + 3y - z = 1, \\ 3x - y + 2z = 8, \\ -2x + 5y + 3z = 12. \end{cases}$

2 Решите системы, используя метод сложения.

1) $\begin{cases} x + y = 4, \\ y + z = 8, \\ x + z = 6. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0, \\ -x + 3y - z = 2, \\ x - 4y - z = -1. \end{cases}$

3 Иногда удобно последовательно исключать неизвестные. При этом можно преобразовать систему, не выписывая выражение одного неизвестного через другое.
Пример оформления

$$\begin{cases} x + \ \ y - \ \ z = 0 \\ 2x - \ \ y + 3z = 3 \\ 3x + 2y - \ \ z = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x + \ \ y - \ \ z = 0 \\ \ \ - 3y + 5z = 3 \\ \ \ - \ \ y + 2z = 3 \end{cases}$$

Мы, сохранив первое уравнение, прибавили его кратное ко второму и третьему, уничтожив в них неизвестное x. А именно, ко второму уравнению прибавляется первое, умноженное на -2, а к третьему — умноженное на -3. Этот процесс можно продолжать дальше. Попробуйте таким методом решить систему

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 6 \\ 2x + \ \ y \qquad\ \ = 1 \\ x - 3y + 5z = 9 \end{cases}.$$

ЛР-04 Линейное диофантово уравнение

1 Введение.
Найдите наименьшее натуральное число, произведение которого на число 23 оканчивается цифрой 1.
Какой формулой можно записать все целые числа, произведение которых на число 23 оканчивается цифрой 1?
Какой смысл можно придать уравнению

$$23x = 10y + 1$$

и его решениям в целых числах?

2 Вывод общей формулы.
Решение простой задачи из введения можно оформить следующим образом. Нужно найти все целочисленные решения уравнения $23x = 10y + 1$. Одно решение мы подобрали: $x = 7$, $23 \cdot 7 = 161 = 10 \cdot 16 + 1$. Запишем рядом два равенства и вычтем второе из первого:

$$23x = 10y + 1$$
$$23 \cdot 7 = 10 \cdot 16 + 1$$
$$23(x - 7) = 10(y - 16)$$

Произведение $23(x-7)$ делится на 10, число 23 взаимно просто с 10, следовательно, множитель $x-7$ делится на 10: $x-7 = 10n \Rightarrow x = 7+10n$, где n — любое целое число. Подставив x в уравнение, найдем y: $23 \cdot 10n = 10(y-16) \Rightarrow y-16 = 23n \Rightarrow y = 16+23n$. Итак, если $(x; y)$ — решение, то найдется целое число n такое, что $x = 7 + 10n$, $y = 16 + 23n$.
Проверьте, что при любом целом n написанные числа удовлетворяют исходному уравнению. Задача решена.

3 Аналогичным способом решите в целых числах следующие уравнения:

1) $3x = 7y + 5$; **1)** $19x + 11y = 1$.

Начните с того, что подберите одно решение уравнения, а затем выведите общую формулу.

4 В задаче во введении говорилось о последней цифре произведения, т. е. об остатке от деления на 10. Вместо числа 10 можно взять другое целое число m и говорить об остатке от деления на m.

1) Найдите наименьшее натуральное число, произведение которого на 11 дает при делении на 19 остаток 1.

2) Найдите все целые числа, произведение которых на 11 дает при делении на 19 остаток 1. Свяжите эту задачу с задачей 2) предыдущего пункта.

3) Зафиксируем число 19, остатки от деления на которое нас будут интересовать. Дано число a и остаток 2 ($1 \leqslant r \leqslant 18$).

Найдите все такие числа x, что произведение ax имеет остаток r для данных a и r.

a	r	x
7	1	
10	1	
18	1	
10	1	
3	12	

Самостоятельные работы

СР-01 Решение уравнений

СР-01 Решение уравнений

А1

А1.1 Решите уравнения.

1. $\dfrac{x+6}{5} - 1 = \dfrac{3(x-4)}{4} + 2.$

2. $\dfrac{5}{x+1} - \dfrac{3}{x} = \dfrac{2}{x+3}.$

3. $(x^2 + 2x + 3)(x - 1) = (x - 1)(2x + 7).$

А1.2 Дана система уравнений $\begin{cases} ax + 2y = 6 \\ 2x - y = a + 1 \end{cases}.$

4. Решите систему при $a = -5$.

5. Решите систему при $a = -4$.

6. Проверьте, что $x = 2, y = 3 - a$ является решением системы при любом a.

A2

A2.1 Решите уравнения.

1. $\dfrac{3x-1}{7} + 5 = \dfrac{x+1}{2} - 2.$

2. $\dfrac{1}{x-1} = \dfrac{5}{x-3} - \dfrac{4}{x-4}.$

3. $(x^2 + 3x - 1)(x + 2) = (x + 2)(3x + 8).$

A2.2 Дана система уравнений $\begin{cases} 2x - ay = -2 \\ 4x + 3y = 2a - 1 \end{cases}$.

4. Решите систему при $a = -1$.

5. Решите систему при $a = -\dfrac{3}{2}$.

6. Проверьте, что $x = \dfrac{a}{2} - 1, y = 1$ является решением системы при любом a.

Б1

Б1.1 Решите уравнения.

1. $x(x-3)+5(2-x)=3(x-1)-x(2-x)+4.$

2. $\dfrac{5}{x^2+1}-\dfrac{3}{x^2}=\dfrac{2}{x^2+3}.$

3. $x^3+x^2+x-3=(x-1)(2x+7).$

Б1.2 Дана система уравнений $\begin{cases}\dfrac{a-1}{x}+2y=6\\ \dfrac{2}{x}-y=a\end{cases}.$

4. Решите систему при $a=-4.$

5. Решите систему при $a = -3$.

6. Найдите решение системы при любом a.

Б2

Б2.1 Решите уравнения.

1. $3(5 - x) - x(x + 2) = x(1 - x) - 2(x - 4) + 7$.

2. $\dfrac{1}{1 - x^2} = \dfrac{4}{x^2 + 2} - \dfrac{5}{x^2 + 1}$.

3. $x^3 + 5x^2 + 5x - 2 = (x + 2)(3x + 8)$.

Б2.2 Дана система уравнений $\begin{cases} 2x - \dfrac{a}{2y} = -2 \\ 4x + \dfrac{3}{y} = a - 1 \end{cases}$.

4. Решите систему при $a = -2$.

5. Решите систему при $a = -3$.

6. Найдите решение системы при любом a.

Контрольные тесты

КТ-01 Число корней уравнения

Отметьте в таблице число n корней данного уравнения.

Уравнение	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = \infty$
$\frac{2x+1}{x-1} = 2$				
$\frac{x^2+x-2}{x-1} = 3$				
$\frac{x^2-x-2}{x-1} = 2$				
$\frac{2x^2+3x-5}{x-1} = 2x+5$				
$\frac{x^2+5x+3}{x-1} = 1$				

КТ-02 Число целочисленных корней многочлена

Сколько различных натуральных корней имеет уравнение?

1	$(x-2)(x^2-5x+6)=0$	
2	$(2x-1)(x^2-x)=0$	
3	$(x^2-6x+9)(ax-8)=0$	
4	$(x^2+3x+2)(3x-1)=0$	
5	$(2x^2-x-3)(x^2-x-2)=0$	

КТ-03 Верно/неверно

1. Линейное уравнение $2(x-99)=3(x-a)$ имеет единственное решение при любом a. ____________.

2. Можно найти такое значение a, чтобы уравнение $2(x-99)=a(x-100)$ имело бесконечно много решений. ____________.

3. При всяком значении a уравнение $2(x-99)=a(x-99)$ имеет хотя бы одно решение. ____________.

4. Существует такое значение a, при котором уравнение $2(x-99)=2(x-a)$ имеет единственное решение. ____________.

5. Ни при каком значении a уравнение $2(x-99)=a(x-a)$ не имеет бесконечного множества решений. ____________.

КТ-04 Система линейных уравнений

Система состоит из двух уравнений, первым из которых является уравнение $2x - 3y = 1$. Второе уравнение выбирается из следующего списка.

А: $x - y = 0$

Б: $3x + 2y = -5$

В: $4x - 6y = 2$

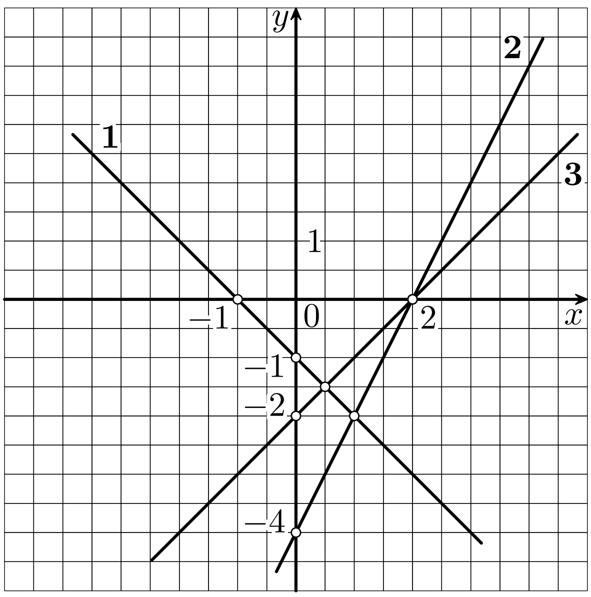
Г: $x - \frac{3}{2}y = 1$

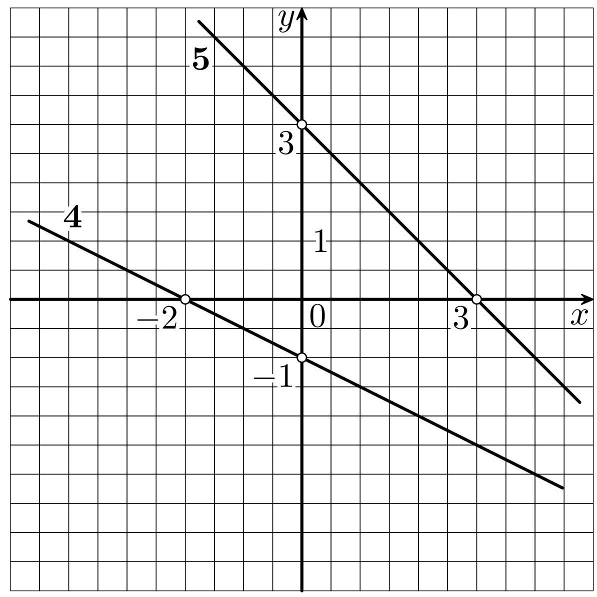
Д: $4x - 6y = 1$

1) Для каких из них пара чисел $(-1; -1)$ является решением системы?
2) Для каких из них система имеет единственное решение?
3) Какие из них составляют вместе с первым системы с одинаковым множеством решений?
4) Для каких из них система не имеет решения?
5) Для каких из них пара чисел $(2; 1)$ является решением системы?

КТ-05 Уравнение прямой

Какими уравнениями задаются следующие пять прямых?





А: $x + y = 3$

Б: $x - y = 2$

В: $2x - y = 4$

Г: $x + 2y = -2$

Д: $x + y + 1 = 0$

1 —	**2** —	**3** —	**4** —	**5** —