**5.** В середине неподвижно закрепленного горизонтального цилиндрического сосуда, открытого с одной стороны, находится тонкий поршень. В закрытой части цилиндра – воздух. Какую минимальную силу следует приложить к поршню, чтобы медленно вытащить его из цилиндра? Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па. Площадь поперечного сечения цилиндра $S = 4$ см$^2$. Температуру считать постоянной. Трением пренебречь. Воздух можно считать идеальным газом.

**6.** Батарея состоит из четырех конденсаторов, соединенных так, как показано на рисунке 25. Во сколько раз изменится электроемкость батареи (увеличится или уменьшится) при замыкании ключа $K$?

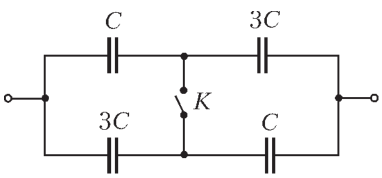


Рис. 25

**7.** Для размораживания водопроводной трубы, в которой замерзла вода, применили электрический нагреватель. Нагреватель подключили к источнику напряжением $U = 220$ В. Каким должно быть сопротивление нагревателя, чтобы за время $\tau = 1$ мин он растапливал $m = 1$ кг льда? Учесть, что потери тепла составляют $k = 40\%$. Удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}3 \cdot 10^5$ Дж/кг.

**8.** Стержень длиной $l = 1$ м опирается на пол и на стену. Нижний конец стержня скользит по полу, удаляясь от стены, а верхний скользит по стене вниз. Найдите путь, пройденный точкой $C$, лежащей на середине стержня, при движении стержня от вертикального до горизонтального положения.

**9.** В цепи, схема которой приведена на рисунке 26, резисторы имеют сопротивления $R_1 = 100$ Ом и $R_2 = 200$ Ом. Амплитуда подведенного напряжения $U_0 = 20$ В. Какое количество теплоты выделяется в цепи за время $\tau = 1$ мин? Период колебаний напряжения $T \ll \tau$. Диоды считать идеальными.

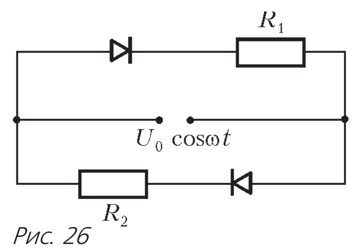


Рис. 26

**10.** Тонкий стержень $AB$ расположен под углом $\alpha = 45°$ к главной оптической оси собирающей линзы (рис.27). Под каким углом $\beta$ к оси расположено действительное изображение стержня, даваемое линзой? Фокусное расстояние линзы $F = 20$ см. Расстояние от нижнего конца стержня до линзы $d = 60$ см.

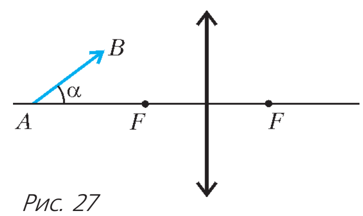


Рис. 27

*Публикацию подготовили А.Бегунц, С.Волошин, В.Воронин, Е.Григорьев, Д.Денисов, А.Зотеев, В.Королев, Т.Лукашенко, Г.Медведев, В.Панферов, В.Погожев, А.Разгулин, И.Сергеев, А.Склянкин, В.Ушаков, Е.Хайлов, С.Чесноков, Е.Шикин, Б.Щедрин*

# ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

## КОНКУРС «МАТЕМАТИКА 6–8»

*(см. «Квант» №4 за 2007 г.)*

**1.** Занумеруем монеты слева направо вдоль горизонтального отрезка, на котором они лежат: 1, 2, ..., 99, 100. Сдвинем все четные монеты вниз, а потом «изогнем» два полученных горизонтальных отрезка с монетами так, чтобы верхние (нечетные) монеты расположились вдоль верхней части окружности, а нижние (четные) – вдоль нижней (рис.1). В этом случае любые две соседние монеты отличаются по весу менее, чем на 0,02 грамма.

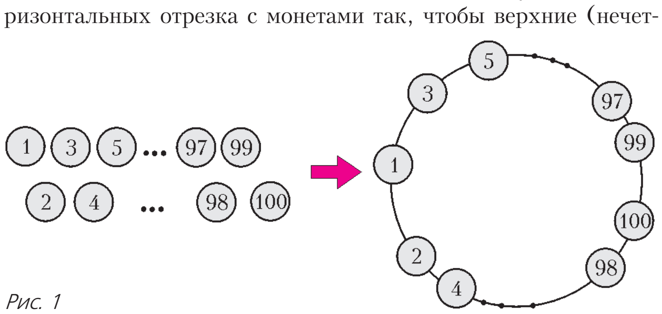


Рис. 1

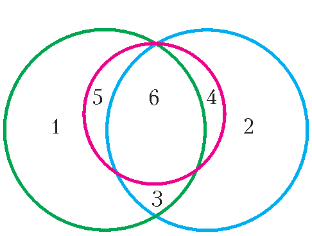


Рис. 2

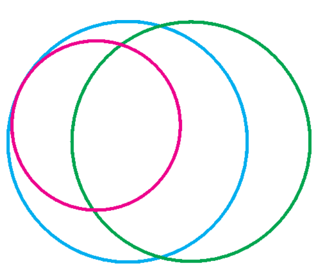

Рис. 3

2. а) См. рис.2. Несложно убедиться в том, что если при пересечении трех кругов образуются 6 областей, то найдется круг, содержащий ровно 3 области. Любая сумма, большая 15 и составленная из чисел от 1 до 6, требует наличия в каждом круге не менее 4 областей.

б) См. рис.3 (один из кругов полностью содержится в другом).

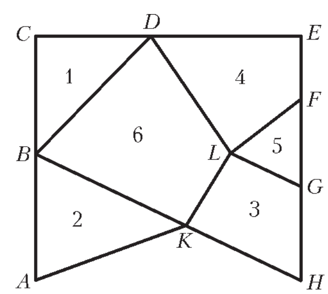


Рис. 4

в) См. рис.4. В многоугольниках $ACEFLGHK$, $ABDLFHK$, $BCEGLK$ сумма чисел равна 16.

**3.** Запишем доказываемое неравенство в виде

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{q} + \frac{1}{p} + \frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \frac{201}{mnpqr} \le 2\,.$$

Сумма дробей в левой части максимальна лишь в том случае, когда $p$, $q$, $r$, $m$, $n$ принимают минимально возможные значения, то есть выбираются из множества $\{1, 3, 5, 7, 9\}$. Тогда в левой части стоит выражение $\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{201}{945} = 2 \le 2$.

**4.** Традиционное решение основано на свойстве средней линии треугольника. Мы приведем другое решение, использующее идею площади. Пусть точка $M$ делит пополам сторону $AB$, а точка $N$ – сторону $CD$ четырехугольника $ABCD$ и пусть $MN$ делит пополам диагональ $AC$ в точке $K$ (рис.5). Так как в четырехугольнике

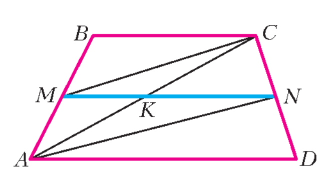


Рис. 5

$MCNA$ диагональ $MN$ делит $AC$ пополам, то площадь треугольника $MCN$ равна площади треугольника $NAM$. Но площади треугольников $MCN$ и $MDN$ равны, значит, равны площади треугольников $NAM$ и $MDN$, т.е. $MN \parallel AD$. Аналогично проверяем, что $MN \parallel BC$. Значит, $AD \parallel BC$.

**5.** Можно. Решение этой задачи изложено в статье И.Акулича «Призрак Леонардо».

## КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

### *Вопросы и задачи*

**1.** Бóльшая теплопроводность металла способствует более быстрому выравниванию температуры; удельная теплоемкость металла меньше, чем у стекла; металл излучает наружу меньше тепла, чем стекло. Все вместе это повышает точность измерений.

**2.** Нет, не всегда. Энергия при теплообмене переходит от тел с более высокой температурой к телам с более низкой температурой.

**3.** Тело человека непрерывно выделяет тепло, которое отдается окружающему воздуху. При температуре воздуха, близкой к $37\ ^\circ\mathrm{C}$, процесс теплоотдачи замедляется, и в теле накапливается избыточная внутренняя энергия.

**4.** Если температура воздуха выше температуры нашего тела, ветер, создаваемый веером, будет ощущаться как горячее дыхание и будет не отнимать тепло, а увеличивать его передачу телу.

**5.** Никакого влияния на показания термометра в тени (если он сух) ветер оказать не может. Если же термометр освещен солнечными лучами, при ветре его показания уменьшатся.

**6.** Надо завернуть оба термометра вместе, чтобы избежать потерь тепла наружу. Более нагретым был тот из термометров, чьи показания будут уменьшаться.

**7.** Тот, что лежит в луже.

**8.** Нет, нельзя. Как только температуры воды и пара сравняются, передача тепла от пара к воде прекратится.

**9.** Вода в сосуде оказалась перегретой, т.е. нагретой выше температуры кипения, так как при ее предварительном кипячении из нее был изгнан воздух.

**10.** Да, можно, поскольку температура кипящей воды значительно ниже температуры воспламенения бумаги.

**11.** Дно и нижние части стенок чайника, соприкасавшиеся с пламенем горелки, имеют более высокую температуру, чем кипящая в нем вода. Поэтому передача тепла воде продолжается еще какое-то время и после снятия чайника с плиты.

**12.** Вода закипит практически одновременно. Точнее, если учесть, что во время переливания кипяток успеет несколько охладиться, то для доведения его снова до температуры кипения потребуется дополнительная энергия, поэтому в первой кастрюле вода закипит несколько позже.

**13.** Больше нагреется алюминиевый брусок, так как теплоемкость тела тем больше, чем больше произведение плотности вещества на его удельную теплоемкость (обратитесь к соответствующим таблицам).

**14.** Да, возможно. Приведя в контакт кубики $A$ и $B$, добьемся выравнивания их температур. Получим: $A - 100\ ^\circ\mathrm{C}$, $B - 100\ ^\circ\mathrm{C}$, $C - 0\ ^\circ\mathrm{C}$. Поступив затем точно так же с кубиками $A$ и $C$, имеем: $A - 50\ ^\circ\mathrm{C}$, $B - 100\ ^\circ\mathrm{C}$, $C - 50\ ^\circ\mathrm{C}$. Наконец, производя теплообмен между кубиками $B$ и $C$, окончательно получим: $A - 50\ ^\circ\mathrm{C}$, $B - 75\ ^\circ\mathrm{C}$, $C - 75\ ^\circ\mathrm{C}$.

**15.** Обычно вода, образующаяся при таянии льда, сразу стекает. Когда же лед завернут в мокрую газету, тепло извне должно пройти через слой задержанной газетой воды, поэтому его поступление ко льду замедляется.

**16.** При образовании льда высвобождается довольно много тепла, благодаря чему задерживается дальнейшее охлаждение воздуха в погребе, а это предохраняет овощи от замерзания.

**17.** Выделившееся при кристаллизации воды тепло идет на нагревание льда.

**18.** Для составления уравнения теплового баланса вам понадобятся всего лишь табличные значения удельной теплоты кристаллизации воды и ее удельной теплоемкости. Их отношение даст искомую температуру: примерно $-79\ ^\circ\mathrm{C}$.

**19.** Расчет по уравнению теплового баланса приводит к температуре, равной $100\ ^\circ\mathrm{C}$.

### *Микроопыт*

Одна и та же вода представляется правой руке горячей, а левой руке – холодной! Однако через некоторое время руки привыкают к температуре воды в средней емкости, т.е. приходят в тепловое равновесие со средой, и ощущения выравниваются.

## ОРИГАМИ И ПОСТРОЕНИЯ

**1.** Эти построения достаточно очевидны. Например, построение из правила 5 циркулем и линейкой можно осуществить так: из точки $A$ опустить перпендикуляр $AA'$ на прямую $p$ (рис.6), провести окружность радиусом $AA'$ и затем провести касательную $p'$ к этой окружности из точки $B$.

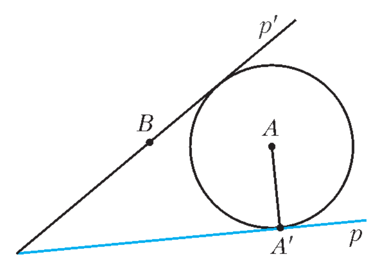


Рис. 6

**2.** Из точки $A$ опустите перпендикуляр $q$ на прямую $l$ (складка 4), а затем (снова складка 4) восставьте перпендикуляр в точке $A$ к $q$.

**3.** Возьмите произвольный отрезок $AB$, восставьте перпендикуляр в точке $A$ (складка 4), затем постройте точку $C$ (складка 3) на этом перпендикуляре. Дальнейшее очевидно.

**4.** а) Складка 1. б) Возьмите вне прямой $AB$ точку $P$ и проведите через нее прямую, параллельную $AB$, а затем на ней отметьте отрезок $PQ$ и разделите его на 4 равные части (складка 1, примененная трижды). Проведите прямые $AX_1$ и $BP$ (рис.7). Прямые $RX_2$ и $RX_3$ де отрезок $AB$ на 3 равные части.

**5.** Мы приведем лишь построени оставляя обоснование читателю. Пусть $O$ – центр окружности

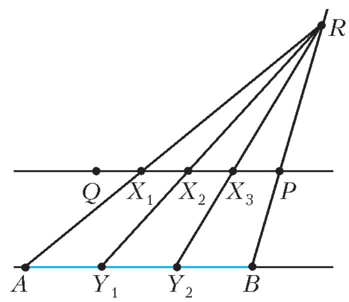


Рис. 7

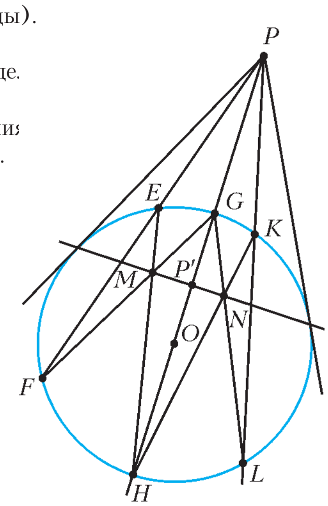


Рис. 8

(рис.8), $F$ – точка на ней, $P$ – точка вне окружности. Построим точку $P'$, инверсную точке $P$ относительно окружности. Проводим (делая соответствующую складку) прямые $PO$, $PF$, $PK$ и во всех случаях находим точки пересечения их с окружностью. Затем проводим прямые $FG$ и $EH$, $HK$ и $GL$. Пусть $M$ и $N$ – точки их пересечения. Прямая $MN$ пересекает $PO$ в точке $P'$. Подумайте, как это доказать.

Постройте такие точки $P'$ для точки $P$, лежащей внутри окружности. Как видим, листок окажется после такого построения изрядно помятым.

## ЭТА «ПРОСТЕНЬКАЯ» КИНЕМАТИКА

**1.** $v_с = v_к \operatorname{tg}\beta$. **2.** $\tau = \dfrac{2t_1t_2}{t_1+t_2} \approx 5{,}8$ с.

**3.** $v_к = \dfrac{\lambda(k_1+k_2-4)}{2\tau} = 5$ м/с, $v_в = \dfrac{\lambda(k_1+k_2-2)}{2\tau} = 10$ м/с.

**4.** $v_{шк} = \sqrt{v_{шн}^2 + 4v_{шн}v_с\cos\alpha + 4v_с^2}$, $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{v_{шн}\sin\alpha}{v_{шн}\cos\alpha + 2v_с}$.

**5.** $\alpha = \arcsin\dfrac{v_к\sin\beta}{v_т} \approx 14{,}5°$.

## МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. М.В.ЛОМОНОСОВА

### МАТЕМАТИКА

*Вариант 1*

**1.** $-0{,}5$. **2.** $0$; $\sqrt[9]{10^5}$. **3.** 30.

**4.** $\left[-7; -\dfrac{3}{4}\right) \cup \left[\dfrac{1}{2}; 2\right)$. *Указание.* Эквивалентное неравенство $\dfrac{\sqrt{8-x}-\sqrt{x+7}}{\sqrt{x+7}-|2x-1|} \le 0$ равносильно системе

$$\begin{cases} \dfrac{(8-x)-(x+7)}{x+7-(2x-1)^2} \le 0, \\ 8-x \ge 0, \\ x+7 \ge 0. \end{cases}$$

(Выражение $\sqrt{u}-\sqrt{v}$ при $u \ge 0$, $v \ge 0$ имеет тот же знак, что и выражение $u - v$).

**5.** 10. *Указание.* Треугольники $ABC$ и $CBD$ подобны с коэффициентом подобия $3/2$.

**6.** 540, 108. Из равенств

$$\text{НОК}(a,b) = 60 = 2^2\cdot 3\cdot 5,\quad \text{НОК}(a,c) = 270 = 2\cdot 3^3\cdot 5$$

следует, что число $b$ кратно $2^2$ и число $c$ кратно $3^3$ (так как $a$ не кратно ни $2^2$, ни $3^3$), а искомое число $\text{НОК}(b,c)$ делится на $2^2\cdot 3^3$ и, в то же время, само является делителем числа $\text{НОК}(60,270) = 2^2\cdot 3^3\cdot 5$. Поэтому оно равно либо $2^2\cdot 3^3\cdot 5 = 540$, либо $2^2\cdot 3^3 = 108$. Первое из этих значений реализуется при $a = 1$, $b = 2^2\cdot 3\cdot 5$, $c = 2\cdot 3^3\cdot 5$, а второе – при $a = 5$, $b = 2^2\cdot 3$, $c = 2\cdot 3^3$, причем оба набора удовлетворяют всем условиям задачи.

**7.** $\operatorname{arctg}\dfrac{7}{3} - \dfrac{\pi}{4}$. Множество, заданное неравенством

$$14x^2 + xy + y^2 + 14x + 2y + 4 < 0,$$

не пересекается с вертикальной прямой $x = 0$ (иначе при некотором $y$ выполнялось бы неравенство $y^2 + 2y + 4 < 0$). Найдем все значения $k$, при каждом из которых множество пересекается с невертикальной прямой $y = kx$: неравенство

$$0 > 14x^2 + kx^2 + k^2x^2 + 14x + 2kx + 4 = \left(k^2+k+14\right)x^2 + 2(k+7)x + 4$$

имеет решение тогда и только тогда, когда

$$(k+7)^2 - 4\left(k^2+k+14\right) > 0,\ \text{т.е. при}\ 1 < k < \frac{7}{3}.$$

Данное множество не имеет точек в первой четверти, иначе при $x, y \ge 0$ получилось бы противоречие:

$$0 > 14x^2 + xy + y^2 + 14x + 2y + 4 \ge 4.$$

Значит, это множество целиком расположено в третьей четверти и пересекается в точности теми лучами, выходящими из начала координат, которые соответствуют углам

$$\varphi \in \left(\pi + \frac{\pi}{4}; \pi + \operatorname{arctg}\frac{7}{3}\right).$$

**8.** $275\pi(\operatorname{tg}20° \pm \operatorname{tg}10°)$. Пусть грани $\alpha$ и $\beta$ двугранного угла пересекают ось цилиндра в точках $A$ и $B$, а плоскость $\gamma$, проходящая через ребро угла перпендикулярно оси, пересекает ее в точке $C$ (рис.9; вид сбоку).

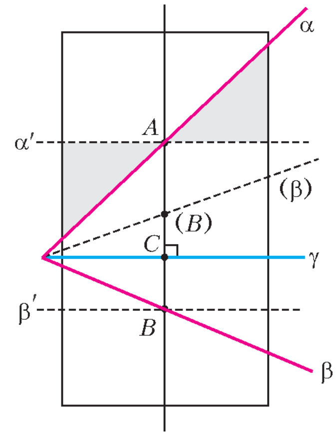


*Рис. 9*

Тогда если плоскости $\alpha'$ и $\beta'$ проходят через точки $A$ и $B$ параллельно $\gamma$, то объем цилиндра между плоскостями $\alpha'$ и $\gamma$ равен его объему между плоскостями $\alpha$ и $\gamma$: действительно, избыточная часть последнего объема над первым, находящаяся с одной стороны от плоскости $\alpha'$, симметрична (относительно точки $A$, в силу центральной симметрии самих плоскостей $\alpha$, $\alpha'$ и поверхности цилиндра) его недостающей части, находящейся с другой стороны от нее.

Аналогично, объем цилиндра между плоскостями $\beta'$ и $\gamma$ равен его объему между плоскостями $\beta$ и $\gamma$.

Поэтому часть цилиндра, лежащая между плоскостями $\alpha$ и $\beta$, имеет тот же объем, что и прямой цилиндр с основаниями, расположенными в плоскостях $\alpha'$ и $\beta'$, причем высота последнего равна

$$h = AB = AC \pm BC = (11\operatorname{ctg}70° \pm 11\operatorname{ctg}80°) = 11(\operatorname{tg}20° \pm \operatorname{tg}10°)$$

(где знак плюс или минус зависит от того, как расположены грани $\alpha$ и $\beta$ – по разные стороны от плоскости $\gamma$ или по одну), а значит, его объем равен $5^2\pi h = 275\pi(\operatorname{tg}20° \pm \operatorname{tg}10°)$.

**9.** $0 < x < \dfrac{\pi}{6}$, $x = \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}, \pi$. *Указание.* Из условия следует неравенство $\operatorname{tg}3x \ge 0$. Кроме того, при всех допустимых $x$

$$\operatorname{tg}3x = \operatorname{tg}x\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}3x + \operatorname{tg}x + \operatorname{tg}2x.$$

Таким образом, данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} |\operatorname{tg}x\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}3x| + |\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}2x| = \\ \qquad = \operatorname{tg}x\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}3x + (\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}2x), \\ \operatorname{tg}3x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}x\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}3x \ge 0, \\ \operatorname{tg}x + \operatorname{tg}2x \ge 0, \\ \operatorname{tg}3x \ge 0. \end{cases}$$

Осталось найти ее решение на промежутке $(0;\pi]$. Рассмотрим два случая:

1) $\begin{cases} \operatorname{tg}3x = 0, \\ \operatorname{tg}x + \operatorname{tg}2x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6}n,\ n = 1,\ldots,6, \\ \operatorname{tg}x + \operatorname{tg}2x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}, \pi$;

2) $\begin{cases} \operatorname{tg}3x > 0, \\ \operatorname{tg}x\operatorname{tg}2x \ge 0, \\ \operatorname{tg}x + \operatorname{tg}2x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}3x > 0, \\ \operatorname{tg}x \ge 0, \\ \operatorname{tg}2x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < \dfrac{\pi}{6}$.

**10.** а) $3\dfrac{2}{3}$; б) $3\dfrac{8}{11}$. а) Пусть исходное число оценок равно $n$ и среднее их значение равно 3,5. Тогда $n > 1$ (иначе единственная исходная оценка оказалась бы равной «3,5») и после замены одной оценки «4» парой оценок «3» и «5» новое среднее значение всех оценок равно

$$f(n) = \frac{3{,}5n + 4}{n+1} = 3{,}5 + \frac{0{,}5}{n+1} > 3{,}5,$$

причем $f(n) \le f(2) = 3\dfrac{2}{3}$. Последнее значение достигается при $n = 2$, когда исходные оценки – это «3» и «4»: тогда старое среднее значение оценок равно $\frac{3+4}{2} = 3{,}5$, а новое равно $\frac{3+3+5}{3} = 3\frac{2}{3}$.

б) Пусть среди исходных оценок доля оценок, отличных от «4», равна $x$, а среднее их значение равно $a \ge 1$. Тогда общее среднее значение всех оценок равно

$$ax + 4(1-x) = 3{,}5 \Rightarrow x = \frac{0{,}5}{4-a} > 0,$$

а после замены каждой оценки «4» парой оценок «3» и «5» новое среднее значение всех оценок равно

$$\frac{3{,}5\cdot 1 + 4(1-x)}{1+(1-x)} = \frac{7{,}5-4x}{2-x} = \frac{7{,}5 - 4\cdot\frac{0{,}5}{4-a}}{2-\frac{0{,}5}{4-a}} =$$

$$= \frac{28-7{,}5a}{7{,}5-2a} = \frac{7{,}5}{2} - \frac{1}{8(7{,}5-2a)} = g(a) \le g(1) = 3\frac{8}{11}$$

(так как $7{,}5 - 2a = \frac{2-x}{4-a} > 0$). Последнее значение достигается при $a = 1$, когда исходные оценки – это «4», «4», «4», «4», «4» и «1»: тогда старое среднее значение оценок равно $\frac{1+5\cdot 4}{6} = 3{,}5$, а новое равно $\frac{1+10\cdot 4}{11} = 3\frac{8}{11}$.

*Вариант 2*

**1.** 15.

**2.** $y = -\frac{6}{7}x + \frac{1}{7}$. *Указание.* Если $(x, y)$ – любая из точек пересечения данных графиков, т.е. решение системы $y = 2x^2 - 2x - 1$, $y = -5x^2 + 2x + 3$, то $5y + 2y = -6x + 1$.

**3.** $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{3}{5} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. *Указание.* Если $3\sin x + \cos x = 0$, то $\sin x = 0$ и $\cos x = 0$. Аналогично, из равенства $\cos x - 3\sin x = 0$ следовало бы $\sin x = 0$ и $\cos x = 0$, что невозможно. Из сказанного следует, что уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 3\cos x(3\sin x + \cos x) = \pm\sin x(\cos x - 3\sin x), \\ \sin x\cos x \ge 0, \end{cases}$$

решая которую получаем ответ.

**4.** $23°$, $4\sin 67°$; одинаковы. Из неравенств $AK < BK < CK$ следует, что отрезок $KC$ пересекает окружность в точке $A'$, а продолжение отрезка $KA$ – в точке $C'$ (рис.10), причем в силу теоремы о касательной и секущей, а также в силу свойства геометрической прогрессии имеем

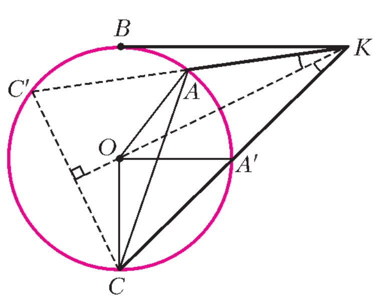

Рис. 10

$$KA'\cdot KC = KB^2 =$$

$$= KA\cdot KC \Rightarrow KA' = KA.$$

Поэтому треугольники $KAO$ и $KA'O$ равны (по трем сторонам), а коль скоро $\angle AKC = 46° \ne 0°$, точки $A'$, $C'$ симметричны точкам $A$, $C$ относительно прямой $KO$ и

$$\angle AKO = \frac{1}{2}\angle AKC = 23°.$$

Далее, $CC' \perp KO$, поэтому $\angle AC'C = \frac{\pi}{2} - \angle AKO = 67°$ и по теореме синусов получаем

$$AC = 2\cdot 2\sin\angle AC'C = 4\sin 67°.$$

Наконец, по свойству вписанного угла имеем

$$\angle AOC = 2\angle AC'C = \pi - 2\angle AKO = \pi - \angle AKC,$$

следовательно, точки $K$, $A$, $O$, $C$ лежат на одной окружности, а значит, вписанные в нее углы $ACK$ и $AOK$ равны.

**5.** 3. *Указание.* Перемножив подкоренные выражения, получим неравенство $-(x-1)^2(y-7)^2(y-x)^2 \ge 0$. Поэтому одна из скобок равна нулю. Осталось рассмотреть случаи $x = 1$, $y = 7$ и $x = y$.

**6.** $2\arccos\left(\sqrt{3}-1\right)^{\frac{3}{2}}$. Через точку $K$, лежащую на общей образующей конусов и удаленную от их вершины $O$ на расстояние 1 (рис.11), проведем перпендикуляр к этой образующей, который пересекает оси конусов в точках $A$ и $B$. Пусть $A'$ и $B'$ – проекции последних точек на одну из граней двугранного угла, величину которого обозначим $2\varphi$. Тогда для пар равных прямоугольных треугольников $AOK$, $AOA'$ и $BOK$, $BOB'$ имеем

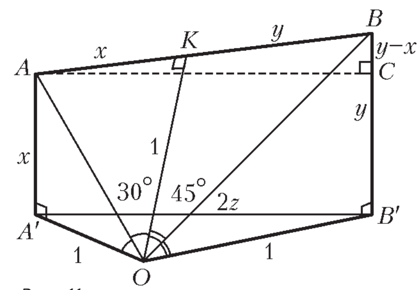

Рис. 11

$$OA' = OB' = OK = 1,$$

$$x = AA' = AK = OK\operatorname{tg}30° = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$y = BB' = BK = OK\operatorname{tg}45° = 1,$$

а из прямоугольного треугольника $ABC$ имеем

$$2z = A'B' = AC = \sqrt{(x+y)^2 - (y-x)^2} = 2\sqrt{xy},$$

откуда получаем

$$S_{OAB} = \frac{1}{2}\cdot(x+y)\cdot 1,\ S_{OA'B'} = \frac{1}{2}\cdot 2z\cdot\sqrt{1-z^2} = \sqrt{xy(1-xy)}.$$

Угол между плоскостями $OAB$ и $OA'B'$ равен $\varphi$, поэтому

$$\cos\varphi = \frac{S_{OA'B'}}{S_{OAB}} = \frac{2\sqrt{xy(1-xy)}}{x+y} = \left(\sqrt{3}-1\right)^{\frac{3}{2}}.$$

*Вариант 3*

**1.** $-\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

**2.** $\left(\frac{2}{5}; \frac{7}{9}\right]$. *Указание.* Поскольку $\frac{9x-7}{5x-2} = 2 - \frac{x+3}{5x-2}$, удобно выполнить замену $t = \frac{x+3}{5x-2}$.

**3.** В первом сосуде было 20 л спирта, во втором – 10 л.

**4.** $\frac{26+17\sqrt{2}}{4}$. *Указание.* По теореме Менелая для прямой $BN$ и треугольника $ACM$ получаем $\frac{AK}{KM}\cdot\frac{MB}{BC}\cdot\frac{CN}{NA} = 1$, откуда $KM = 2$.

**5.** $y_{\min} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y_{\max} = \sqrt{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$. *Указание.* Ввиду периодичности функции $y = y(x)$ с периодом $2\pi$ достаточно рассмотреть ее на промежутке $0 \le x \le \frac{\pi}{6}$. Поскольку $y(x) \ge 0$, функция $y(x)$ достигает минимального и максимального значений при тех же $x$, при которых принимает минимальное и максимальное значения соответственно функция $y^2(x)$, т.е.

$$y^2(x) = \sin x + \sin\left(x + \frac{5\pi}{6}\right) + 2\sqrt{\sin x\sin\left(x+\frac{5\pi}{6}\right)} =$$

$$= 2\sin\left(x+\frac{5\pi}{12}\right)\cos\frac{5\pi}{12} + 2\sqrt{\sin^2\left(x+\frac{5\pi}{12}\right) - \sin^2\frac{5\pi}{12}}.$$

Далее, для любого $x \in \left[0; \frac{\pi}{12}\right]$ выполняется равенство

$y^2(x) = y^2\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$, следовательно, для нахождения наименьшего и наибольшего значений функции $y^2(x)$ достаточно рассмотреть лишь $x \in \left[0; \frac{\pi}{12}\right]$. На этом отрезке значения $\sin\left(x + \frac{5\pi}{12}\right)$ монотонно возрастают. Следовательно, монотонно возрастает и $y^2(x)$.

**6.** $30°$. Рассмотрим две перпендикулярные прямой $KL$ плоскости: $\mathcal{P}_1$, содержащую точку $O_1$, и $\mathcal{P}_2$, проходящую через $O_2$ (рис.12). Поскольку $K$ и $L$ – точки касания, $K \in \mathcal{P}_1$ и $L \in \mathcal{P}_2$. Заметим, что $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ параллельны. Пусть $O_1'$ – проекция точки $O_1$ на $\mathcal{P}_2$, а $O_2'$ – проекция точки $O_2$ на плоскость $\mathcal{P}_1$. Тогда

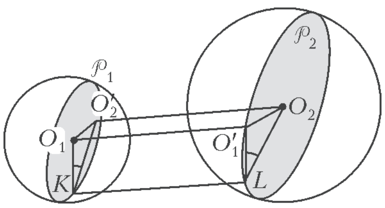

*Рис. 12*

$O_1O_1' \parallel KL$, $O_2O_2' \parallel KL$, $O_1O_1' = O_2O_2' = KL$. Отрезок $O_1O_2'$ лежит в плоскости $\mathcal{P}_1$, значит, $O_1O_2' \perp KL$, поэтому $O_1O_2' \perp O_2'O_2$, так что $O_1O_2'O_2O_1'$ – прямоугольник с диагональю $O_1O_2$. Тогда из треугольника $O_1O_2'O_2$ следует $O_1O_2' = 1$. Так как $O_1K \perp KL$, $O_2'K \perp KL$, то $\alpha = \angle O_1KO_2'$ – плоский угол двугранного угла с ребром $KL$, одна из граней которого содержит точку $O_1$, а другая – $O_2$. Теперь из треугольника $O_1KO_2'$, где $O_1K = \sqrt{3}$, $O_2'K = O_2L = 2$, по теореме косинусов получаем $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $\alpha = 30°$.

### *Вариант 4*

**1.** $-\frac{19\pi}{200}; \frac{131\pi}{200}$. **2.** $\left(-\frac{3}{2}; -1\right) \cup \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

**3.** $\frac{36}{\sqrt{13}}$. **4.** $(-5; 20); (-5; 21)$.

**5.** 3 : 7. Пусть $l$ – длина бокового ребра призмы, $k$ – расстояние между прямыми $BB_1$ и $CC_1$, $h$ – расстояние между прямой $AA_1$ и плоскостью $CC_1BB_1$ (рис.13). Тогда площадь параллелограмма $CC_1BB_1$ равна $S = kl$, а объем призмы $ABCA_1B_1C_1$ равен $V = \frac{1}{2}Sh$. Если $\frac{CD}{CC_1} = \alpha$, то $CD = \alpha l$, $DC_1 = (1-\alpha)l$, площадь трапеции $CDBB_1$ равна $\frac{1}{2}(\alpha l + l)k = \frac{\alpha+1}{2}S$. Поэтому объем пирамиды $ABCDB_1$ равен $\frac{1}{3}\frac{\alpha+1}{2}Sh = \frac{\alpha+1}{3}V$. Таким образом, заданное отношение объемов равно

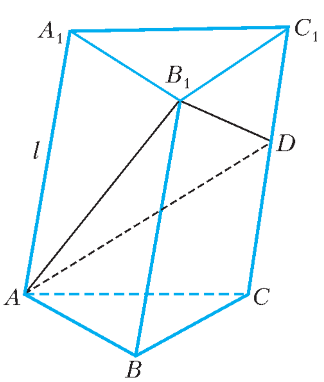

*Рис. 13*

$$\frac{\frac{\alpha+1}{3}V}{V - \frac{\alpha+1}{3}V} = \frac{\alpha+1}{2-\alpha} = \frac{13}{17}, \text{ откуда } \alpha = \frac{3}{10}, \ \frac{CD}{C_1D} = \frac{\alpha}{1-\alpha} = \frac{3}{7}.$$

**6.** $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. *Указание.* Данный многочлен 4-й степени может быть квадратом только многочлена 2-й степени вида $x^2 + a$. Таким образом, согласно условию,

$$x^4 + 2^{3\sin\alpha}x^2 + x\sqrt{2^{1-\sin\beta} - \cos\gamma} + \sin^2\beta + \cos^2\gamma \equiv x^4 + 2ax^2 + a^2,$$

что равносильно системе

$$\begin{cases} 2^{3\sin\alpha} = 2a, \\ \sqrt{2^{1-\sin\beta} - \cos\gamma} = 0, \\ \sin^2\beta + \cos^2\gamma = a. \end{cases}$$

Из равенства $2^{1-\sin\beta} = \cos\gamma$ следует $2^{1-\sin\beta} \le 1$, т.е. $\sin\beta \ge 1$. Таким образом, $\sin\beta = 1$, значит, $\cos\gamma = 1$. Поэтому из системы вытекает $a^2 = 2$, $a > 0$, так что $a = \sqrt{2}$ и $\sin\alpha = \frac{1}{2}$. Далее, так как $\beta = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $\gamma = 2\pi n$, $k, n \in \mathbf{Z}$, получаем

$$\sin(\alpha + \beta + \gamma) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

### *Вариант 5*

1. $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **2.** $\log_3 5$. **3.** 3.

**4.** $16\sqrt{2}$. **5.** $(-2; 0) \cup (2; +\infty)$. **6.** $aR$.

**7.** Если $-3 < a \le -2$, то одно решение;
если $-2 < a \le -1$, то два решения;
если $-1 < a < 0$, то три решения.

*Указание.* Отметим, что $x = \frac{2}{a}$ – корень данного уравнения при всех $a \in (-3; 0)$. Корни квадратного трехчлена $x_1 = 2a$, $x_2 = \frac{a}{2}$ должны удовлетворять условию $x \ge \frac{2}{a}$. Учитывая еще возможные совпадения ($x_1 = \frac{2}{a}$; $x_2 = 2a$), получаем ответ.

**8.** $32\sqrt{3}$. *Указание.* Если сфера касается сторон $\Delta LMN$ (рис.14), то ее центр находится на перпендикуляре $OH$ к плоскости $LMN$, проходящем через центр $H$ окружности, вписанной в $\Delta LMN$ (геометрическом месте точек, равноудаленных от сторон треугольника).

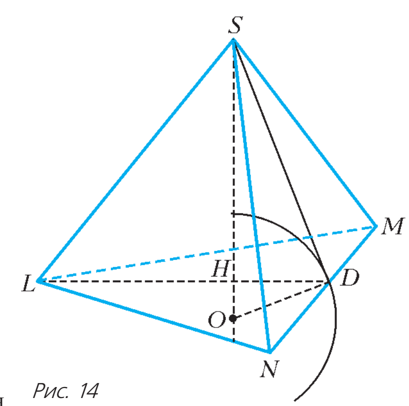

*Рис. 14*

На этой же прямой $OH$ по другую сторону от плоскости $LMN$ находится такая точка $S$, что плоскости $SLM$, $SMN$ и $SNL$ касаются сферы. Действительно, если плоскость $SMN$ касается сферы, то $OD \perp MN$ и $OD \perp SD$. Если заданы $\Delta LMN$ и радиус сферы, то в прямоугольном $\Delta SOD$ известны $OD$ и $DH$, значит, известна гипотенуза $SO$. Такая же гипотенуза $SO$ будет и в двух других аналогичных треугольниках, связанных с плоскостями $SLM$ и $SNL$.
Таким образом, пирамида $SLMN$ является правильной.

### *Вариант 6*

**1.** $-\frac{23}{4}$; $-1$; 1; 6. **2.** $(-\infty; -6) \cup \left[-2\sqrt{5}; -4\right) \cup \{-2\}$.

**3.** 1 и 4. **4.** $\sqrt{3}$; 3. **5.** $\left(-\frac{91}{17}; \frac{44}{17}\right)$.

**6.** $\operatorname{arctg} 5 + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. *Указание.* Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} -2\sin^2 x + 5\sin 2x = 0, \\ 0 < \cos x < 1. \end{cases}$$

**7.** 251. *Указание.* Пусть $n$ – число книг в фонде библиотеки на начало 2005 года. Тогда к концу 2005 года число книг равнялось $1{,}004n = \dfrac{251}{5^3 \cdot 2}n$, а к концу 2006 года составляло $1{,}008\dfrac{251}{5^3 \cdot 2}n = \dfrac{63 \cdot 251}{5^6}n$, причем оба полученных выражения – целочисленные. Поэтому число $n$ делится на $5^3 \cdot 2$ и на $5^6$, а значит, и на $5^6 \cdot 2 = 31250$. По условию $n \le 50000$, так что $n = 31250$.

**8.** $(-1;\, 0] \cup \left\{\dfrac{2+2\sqrt{13}}{3}\right\}$. Если $a = 0$, то

$$2ax^2 + (a+4)x + (a+1) = 0 \Leftrightarrow 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4},$$

поэтому $a = 0$ удовлетворяет требованию задачи.
Если $a \ne 0$, то нас интересуют только три случая:
1) уравнение имеет ровно один корень, т.е.

$$D = 0 \Leftrightarrow (a+4)^2 - 4a(a+1) = 0 \Leftrightarrow a = \frac{2 \pm 2\sqrt{13}}{3},$$

причем этот корень отрицателен, т.е.

$$-\frac{a+4}{2a} < 0 \Leftrightarrow a = \frac{2+2\sqrt{13}}{3};$$

2) уравнение имеет два корня разных знаков, т.е. свободный член приведенного квадратного уравнения отрицателен (откуда следует неравенство $D > 0$), т.е.

$$\frac{a+1}{2a} < 0 \Leftrightarrow -1 < a < 0;$$

3) один корень равен нулю, т.е.

$$a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = -1,$$

а второй, равный при этом 3, отрицателен, что невозможно.
Собирая все найденные значения $a$, получаем ответ.

## Вариант 7

**1.** $-16$; 18. **2.** $\left(-\infty;\, -\sqrt{7}\right) \cup \left(\sqrt{7};\, 9\right]$. **3.** В 2 раза.

**4.** $\dfrac{\pi}{56} + \dfrac{\pi n}{28}$, $\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi k}{6}$, $n, k \in \boldsymbol{Z}$.

**5.** $\left\{\dfrac{1}{2}\right\} \cup (1;\, +\infty)$. *Указание.* После замены $t = \log_x 16$ неравенство приводится к виду $l^3 + 8l^2 + 16l \ge 0$.

**6.** $(1, 3)$, $(3, 1)$. *Указание.* Заменой $u = x + y$, $v = xy$ система приводится к виду

$$\begin{cases} u + v = 7, \\ u^2 - v = 13. \end{cases}$$

**7.** 2; 4. *Указание.* Из равенства

$$\left(5 - 2\sqrt{6}\right)^x = \frac{1}{\left(5 + 2\sqrt{6}\right)^x} = \left(5 + 2\sqrt{6}\right)^{-x}$$

следует, что если пара $(x;\, y)$ удовлетворяет системе, то пара $(-x;\, y)$ – тоже решение системы.
Поэтому если решение единственно, то $x = 0$ и

$$\begin{cases} y - |y| + 5a - 10 = 0, \\ (a - 4)y = 0, \end{cases}$$

откуда получаем два возможных значения $a = 2$ и $a = 4$. Проверка показывает, что оба значения удовлетворяют условию.
**8.** 12.

## Вариант 8

**1.** $[9;\, 12)$. **2.** $(-1)^{n+1} \arcsin \dfrac{1}{3} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

**3.** $\{-2\} \cup [2;\, 6]$. **4.** 4; 6.

**5.** $\left(2 - \sqrt{3};\, 3 - \sqrt{7}\right] \cup \left[3 + \sqrt{7};\, +\infty\right)$.

**6.** 24. *Указание.* Сумма первых пятнадцати членов арифметической прогрессии $\{a_n\}$ – это число $S_{15} = 15a_8$, кратное 60.

**7.** $\max\left(x^2 + y^2\right) = 8$, достигается при $z = 5$.
Из данной системы следует, что числа $x$ и $-y$ являются корнями уравнения

$$t^2 - (z-1)t + \left(z^2 - 7z + 14\right) = 0.$$

Это уравнение имеет решения тогда и только тогда, когда дискриминант трехчлена неотрицателен, т.е. $\dfrac{11}{3} \le z \le 5$.
Искомая сумма

$$x^2 + y^2 = (x - y)^2 + 2xy = \\ = (z-1)^2 - 2\left(z^2 - 7z + 14\right) = \\ = -(z-6)^2 + 9,$$

при этих значениях $z$ возрастает, так что

$$\max\left(x^2 + y^2\right) = f(5) = 8.$$

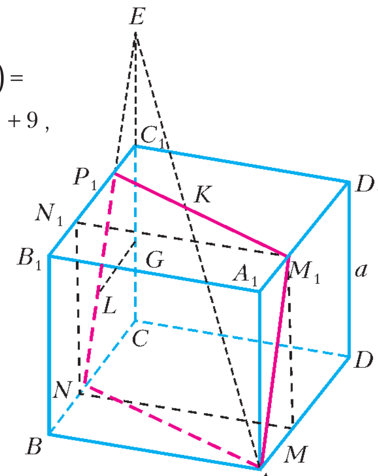

*Рис. 15*

**8.** 1 : 2. Пусть $K$ и $L$ (рис.15) – центры граней $A_1B_1C_1D_1$ и $B_1C_1CB$ данного куба с ребром длины $a$, $G$ – середина ребра $CC_1$. Точка $K$ принадлежит плоскости, проходящей через вершину $A$ и прямую $CC_1$. Обозначим через $E$ точку пересечения прямых $AK$ и $CC_1$. Так как $C_1K = \dfrac{1}{2}CA$, то $C_1E = CC_1 = a$.
Точки $E$ и $L$ принадлежат грани $B_1C_1CB$, следовательно, прямая $EL$ пересекает ребра $B_1C_1$ и $BC$ в точках, которые обозначим через $P_1$ и $N$. Из треугольников $ELG$ и $ECN$ находим $\dfrac{P_1C_1}{LG} = \dfrac{EC_1}{EG} = \dfrac{2}{3}$, $CN = 2C_1P_1$, так что $C_1P_1 = \dfrac{1}{3}a$, $CN = \dfrac{2}{3}a$.
Пусть $M_1$ – точка пересечения прямой $P_1K$ с ребром $A_1D_1$, тогда $A_1M_1 = \dfrac{1}{3}a$. Итак, сечение куба, о котором говорится в условии задачи, – четырехугольник $ANP_1M_1$. Поскольку, очевидно, $P_1N = M_1A$ и $P_1N \parallel M_1A$, то $ANP_1M_1$ – параллелограмм.
Обозначим через $M$ и $N_1$ проекцию точки $M_1$ на ребро $AD$ и проекцию $N$ на $B_1C_1$ соответственно. Объем $V$ многогранника $ABB_1A_1M_1P_1N$ равен объему прямоугольного параллелепипеда $ABB_1A_1MNN_1M_1$, поскольку получается из последнего объема вычитанием объема пирамиды $M_1AMN$ и добавлением равного вычтенному объема пирамиды $NM_1N_1P_1$. Значит, $V = \dfrac{1}{3}a^3$. Таким образом, отношение объемов, на которые делится данный куб, равно 1 : 2.

## Вариант 9

**1.** $-25$. **2.** $(-\infty;\, -8) \cup (-5;\, -2) \cup [0;\, +\infty)$.

**3.** 6, 7, …, 14. **4.** $(1;\, -1)$, $(-3;\, 3)$.

**5.** $-\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $(-1)^k \arcsin \dfrac{3}{5} - \dfrac{\pi}{6} + \pi k$, $n, k \in \boldsymbol{Z}$. *Указание.* Заменой $s = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$ уравнение приводим к виду

$$5\left(1 - 2s^2\right) = 4s - 1.$$

**6.** $AB = AC = 13$.

**7.** $(-\infty;\, -7] \cup (-4;\, -3) \cup (-2;\, 0) \cup (1;\, +\infty)$. *Указание.* Так как $\lg u - \lg v$ того же знака, что и $u - v$ при $u$, $v > 0$, исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \dfrac{\left(2x^2+9x-21\right)-\left(x^2-x\right)}{(x+3)^2-1} \ge 0, \\ 2x^2+9x+21>0, \\ x^2-x>0, \\ (x+3)^2>0. \end{cases}$$

**8.** $c=-4\sqrt{2}$, $-4<c\le 4$. График левой части

$$y=-\sqrt{16-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y\le 0, \\ x^2+y^2=4^2 \end{cases}$$

исходного уравнения есть нижняя полуокружность с центром в начале координат и радиусом 4 (рис.16), а график правой части $y = x + c$ – прямая, пересекающая ось ординат в точке $c$ под углом $\alpha=45°$. Эти графики имеют ровно одну общую точку тогда и только тогда, когда прямая $y = x + c$ либо совпадает с прямой $y=x-4\sqrt{2}$, либо лежит между прямыми $y = x + 4$ и $y = x - 4$ (не включая последнюю), т.е. когда $c=-4\sqrt{2}$ или $-4<c\le 4$.

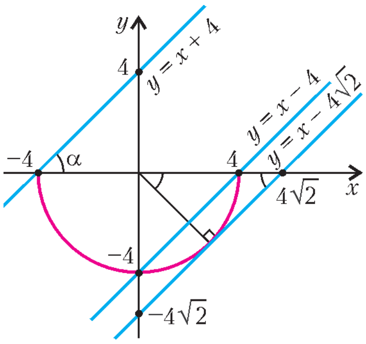


Рис. 16

## Вариант 10

**1.** При $x = -7$ $y = 5$. **2.** $\dfrac{3\pi}{4}+2\pi n,\ \dfrac{5\pi}{8}+2\pi k,\ n,k\in\mathbf{Z}$.

**3.** $(-\infty;\log_3 5)\cup\left(\dfrac{3}{2};\log_2 3\right)$. *Указание.* Неравенство преобразуется к виду

$$(x-\log_2 3)(x-\log_3 5)(2x-3)<0.$$

**4.** 27 тысяч рублей. **5.** $10\sqrt{3}$.

**6.** $a\in\left(3-\sqrt{5};\dfrac{7}{5}\right)\cup(5;10]$. Достаточно рассмотреть функцию $f_1(x)=x\cdot|x-2|$ (константа $\arcsin\dfrac{a}{10}$ привносит лишь ограничения на множество допустимых значений параметра: $|a|\le 10$).

Функция

$$f_1(x)=\begin{cases} x^2-2x & \text{при } x\ge 2, \\ -x^2+2x & \text{при } x<2 \end{cases}$$

возрастает на каждом из множеств $(-\infty;1]$, $[2;+\infty)$.

Корни данного в условии квадратного трехчлена с параметром равны $x_1=a^2-6a+6$, $x_2=8-2a$. Сразу же исключим ситуацию, когда отрезок с концами в $x_1$ и $x_2$ вырождается в точку:

$$a_2-6a+6=8-2a \Leftrightarrow a=2\pm\sqrt{6}.$$

Функция $f_1(x)$ монотонно возрастает на отрезке числовой оси, соединяющем точки $x_1$ и $x_2$, тогда и только тогда, когда указанный отрезок целиком принадлежит либо первому промежутку возрастания, либо второму, так что следует рассмотреть два случая:

а) $\begin{cases} a^2-6a+6\le 1, \\ 8-2a\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{7}{5}\le a\le 5;$

б) $\begin{cases} a^2-6a+6\ge 2, \\ 8-2a\ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow a\le 3-\sqrt{5}.$

Для получения ответа осталось исключить из множества $|a|\le 10$, $a\ne 2\pm\sqrt{6}$ найденные в случаях а) и б) значения.

**7.** 2. Плоскость параллелограмма $ABCD$ проходит через центр $O$ сферы, поскольку по условию точка $O$ принадлежит прямой $AD$. Следовательно, в сечении сферы получается окружность радиуса $R$, равного радиусу сферы, с центром в той же точке. Так как диагонали параллелограмма связаны соотношением $AC > BD$, то угол $ABC$ – тупой, значит, точка $D$ лежит внутри окружности (рис.17).

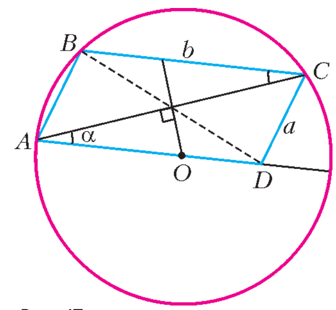


Рис. 17

Обозначим $AB = a$, $BC = b$, $\angle ACB=\angle CAD=\alpha$. Параллельные прямые $AD$ и $BC$ отсекают от окружности равные дуги, поэтому

$$\angle BAC=\frac{1}{2}(\pi-4\alpha)=\frac{\pi}{2}-2\alpha,\quad \angle ABC=\frac{1}{2}(\pi+2\alpha)=\frac{\pi}{2}+\alpha.$$

По теореме синусов для треугольника $ABC$ получаем

$$a=2R\sin\alpha,\quad b=2R\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)=2R\cos 2\alpha,$$

$$AC=2R\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=2R\cos\alpha,\ \text{т.е.}\ \cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{R}.$$

Тогда

$$a^2=4R^2\sin^2\alpha=4R^2-12,$$

$$b^2=4R^2\left(2\cos^2\alpha-1\right)^2=4R^2\left(\frac{6}{R^2}-1\right)^2.$$

Длины сторон параллелограмма и его диагонали связаны формулой

$$2\left(a^2+b^2\right)=AC^2+BD^2,\ \text{т.е.}\ a^2+b^2=8.$$

Подставляя в это равенство выражения для $a^2$ и $b^2$, после упрощений получаем уравнение

$$2R^4-17R^2+36=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} R^2=4 \\ R^2=\dfrac{9}{2}. \end{array}\right.$$

Таким образом, $R = 2$ или $R=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$. Значение $R = 2$ не подходит, поскольку в этом случае $a = b = 2$, т.е. $ABCD$ – ромб, что исключено условием задачи.

Для $R=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ имеем $a=\sqrt{6}$, $b=\sqrt{2}$. Тогда площадь параллелограмма $ABCD$ равна

$$S_{ABCD}=2S_{ABC}=ab\sin\angle ABC=ab\frac{AC}{2R}=2\sqrt{2}.$$

Далее, вершина пирамиды $S$ по условию равноудалена от концов диагонали $AC$, следовательно, $S$ принадлежит плоскости $\mathcal{P}$, ортогональной к $AC$ и проходящей через середину этого отрезка. Плоскость $\mathcal{P}$ содержит центр сферы, кроме того она перпендикулярна плоскости параллелограмма. Стало быть, $\mathcal{P}$ пересекает сферу по окружности радиуса $R$ с центром в точке $O$. Вершина $S$ находится на этой окружности, поэтому наибольший объем пирамиды достигается в случае, когда ее высота принимает максимально возможное значение, т.е. когда проекция точки $S$ на плоскость $ABCD$ попадает в центр сферы. Таким образом, наибольшее значение высоты пирамиды равно $R$, а максимальный объем пирамиды равен

$$V_{\max}=\frac{1}{3}S_{ABCD}\cdot R=2.$$

*Вариант 11*

**1.** $\{1\}\cup[2;\,+\infty)$. **2.** $\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$. **3.** 2. **4.** 1. **5.** 20%.

**6.** $(12;\,-4);\,(2;\,-4);\,(10;\,-2);\,(4;\,-2);\,(10;\,-6);\,(4;\,-6)$.

*Указание.* Уравнение приводится к виду

$$(x-7)^2+4(y+4)^2=25.$$

**7.** 25; $\frac{5}{4}\sqrt{143}$. *Указание.* Треугольники $ABC$ и $BEC$ подобны.

**8.** $a\in(0;\,1)\cup(1;\,4)\cup(4;\,5)$. *Указание.* Пусть $t=2^x$ $(t>0)$, тогда данное уравнение приводится к виду

$$t^4-6t^3+8t^2+2(a-1)t-(a-1)^2=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(t^2-3t+t-a+1\right)\left(t^2-3t-t+a-1\right)=0.$$

Таким образом, требуется найти все значения параметра $a$, при которых два квадратных трехчлена

$$t^2-2t-a+1\ \text{ и }\ t^2-4t+a-1$$

имеют в совокупности три различных положительных корня.

*Вариант 12*

**1.** $\{-3\}\cup[-2;\,4]$. **2.** 20%. **3.** $[-4;\,-2)\cup(5;\,10]$.

**4.** $\left(4;\,1;\,\pm\arccos\frac{1}{5}-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+2\pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$. *Указание.* Из неотрицательности подкоренных выражений первых двух радикалов следует, что $x=4$, $y=1$.

**5.** $2\sqrt{10}-5$. *Указание.* Используя формулу для медианы, найдите $BC$ и примените теорему косинусов к треугольнику $PBQ$.

**6.** $a\in(2;\,7)$. *Указание.* Необходимым и достаточным условием существования решений квадратного относительно $a$ неравенства является

$$(3x-12)^2-4\left(6x^2-3x+35\right)>0,$$

т.е.

$$-2-\frac{8}{\sqrt{15}}<x<-2+\frac{8}{\sqrt{15}}.$$

Полученному интервалу принадлежат всего пять целых значений $x$, для каждого из которых надо найти соответствующие значения параметра $a$.

**7.** $V_{QKMN}=\frac{\sqrt{77}}{12}<V_{SABC}=\frac{3}{4}$. Пирамида $SABC$ – правильная, так как ее основание – равносторонний треугольник $ABC$, а боковые ребра имеют равную длину. Легко вычисляется ее объем, он равен

$$V_{SABC}=\frac{3}{4}.$$

Для вычисления объема пирамиды $QKMN$ используем прием, связанный с достраиванием тетраэдра до параллелепипеда. Проведем через каждое ребро пирамиды плоскость параллельно противоположному ее ребру. Полученные три пары параллельных плоскостей образуют параллелепипед $QENFLKPM$, диагоналями граней которого являются ребра исходного тетраэдра (рис.18). С другой стороны, тетраэдр получается отсечением от параллелепипеда четырех треугольных пирамид, примыкающих к граням $QKMN$, объем каждой из которых равен одной шестой объема $V$ параллелепипеда. Таким образом, объем исходного тетраэдра равен

$$V_{QKMN}=\frac{1}{3}V.$$

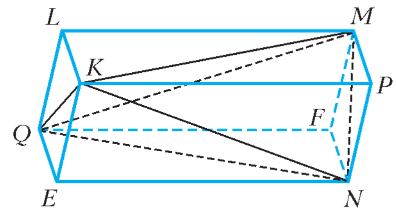

*Рис. 18*

Диагонали $KN$ и $QM$ противоположных граней параллелепипеда равны, следовательно, параллелограммы $EKPN$ и $QLMF$ – прямоугольники. Аналогично, прямоугольниками являются грани с равными диагоналями $QK$ и $MN$. Третья пара граней – параллелограммы с диагоналями $QN=2$, $KM=\sqrt{3}$ и сторонами, длины которых обозначим через $a$ и $b$. Если одну из этих граней принять за основание, то ребро, общее для смежных прямоугольных граней, – высота параллелепипеда. Обозначим его длину через $c$. Пусть $\varphi$ – угол между диагоналями основания $EQFN$, тогда

$$V=c\cdot S_{EQFN}=\frac{c}{2}QN\cdot EF\sin\varphi=c\sqrt{3}\sin\varphi.$$

Числа $a$, $b$ и $c$ связаны уравнениями (первые два выражают теорему Пифагора, последнее – равенство параллелограмма)

$$\begin{cases}a^2+c^2=4,\\ b^2+c^2=3,\\ 2\left(a^2+b^2\right)=4+3,\end{cases}\quad\text{откуда }\ a=\frac{3}{2},\ b=\frac{\sqrt{5}}{2},\ c=\frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Из треугольника $OEN$, где $O$ – точка пересечения $EF$ и $QN$, а $EN=a$, по теореме косинусов получаем $\cos\varphi=-\frac{1}{2\sqrt{3}}$, $\sin\varphi=\frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}$.

Итак, $V_{QKMN}=\frac{1}{3}V=\frac{c}{\sqrt{3}}\cdot\sin\varphi=\frac{\sqrt{77}}{12}$.

*Вариант 13*

**1.** 15. **2.** $(-1)^n\arcsin\frac{1}{2}+\pi n,\ (-1)^{k+1}\arcsin\frac{1}{4}+\pi k$, $n,k\in\boldsymbol{Z}$.

**3.** $\frac{13}{2}$. *Указание.* Треугольник со сторонами заданной длины – прямоугольный. Поэтому возможны лишь 4 ситуации, отвечающие условиям задачи: в двух из них диагональю выпуклого четырехугольника является гипотенуза, в двух оставшихся – поочередно каждый катет.

**4.** $\left(0;\,\frac{1}{4^{\sqrt{2}}}\right]\cup\left[4^{\sqrt{2}};\,16\cdot4^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\right]$. *Указание.* Если $t=\log_4 x$, то данное неравенство принимает вид $\sqrt{t^2-2}\ge 2t-3$.

**5.** Количество бензозаправочных станций в северном и восточном районах одинаково.

**6.** $(a;\,b)=\left(\frac{t^2}{|t|+2};\,t\right)$, где $t\ne0$, либо $(a;\,b)=\left(\frac{t^2}{|t|-2};\,t\right)$, где $|t|>2$. **7.** 49

*Вариант 14*

**1.** 1000000000. *Указание.* Выполните замену $l=\sqrt{\lg y}$.

**2.** $\pi n$, $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $n,k\in\boldsymbol{Z}$. Легко угадываются решения $\sin x=1$, т.е. $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, и $\sin x=0$, т.е. $x=\pi n$. Если же $\cos x\ne0$ и $\sin x\ne0$, то $\cos^4x+\sin^3x<\cos^2x+\sin^2x=1$.

**3.** $(-6;\,-5)$ и $(4;\,5)$, $(4;\,15)$ и $(14;\,5)$, $(-16;\,-5)$ и $(-6;\,-15)$.

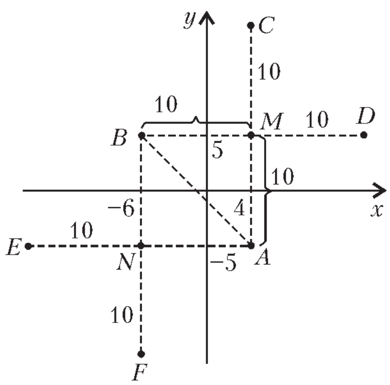


Рис. 19

Пусть $y = ax + b$ – уравнение прямой $l$, проходящей через данные точки $A$ и $B$ (рис.19). Тогда

$$\begin{cases} -5 = 4a + b, \\ 5 = -6a + b \end{cases} \Rightarrow a = -1,$$

поэтому прямая $l$ пересекает оси координат под углом $45°$.

Если $A$ и $B$ – концы диагонали квадрата, то его стороны параллельны осям координат, поэтому оставшиеся вершины расположены в точках $M = (4;\ 5)$ и $N = (-6;\ -5)$. Если же $A$ и $B$ – соседние вершины квадрата, то диагонали квадрата параллельны осям координат и равны по 20, причем квадрат можно расположить в любой из двух полуплоскостей, на которые прямая $l$ делит плоскость. Соответственно, получаем координаты оставшихся вершин: либо $C = (4;\ 15)$ и $D = (14;\ 5)$, либо $E = (-16;\ -5)$ и $F = (-6;\ -15)$.

**4.** $[-2;\ 0)$. **5.** $\frac{1}{3}Q^{\frac{3}{2}}\sqrt{\operatorname{tg}\delta\operatorname{tg}\gamma}$.

**6.** $\left(-\frac{4}{5};\ \frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{4}{5};\ 1\right]$. *Указание.* Поскольку числа $\lg u$ и $u - 1$, а также числа $\arcsin x - \frac{\pi}{6}$ и $x - \frac{1}{2}$ имеют одинаковые знаки, неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \left(x^2 + \frac{9}{25} - 1\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) > 0, \\ |x| \le 1. \end{cases}$$

**7.** $\frac{8R^4}{S}$. Прямоугольные треугольники $MNK$ и $HCD$ (рис.20) подобны, так как у них $\angle N = \angle C$ (углы со взаимно перпендикулярными сторонами). Поэтому

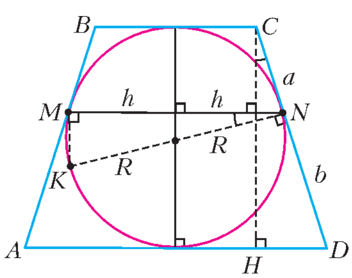


Рис. 20

$$\frac{2R}{2h} = \frac{a+b}{2R} \Rightarrow a + b = \frac{(2R)^2}{2h},$$

а площадь данного четырехугольника со взаимно перпендикулярными диагоналями равна

$$S = \frac{1}{2}\cdot 2h \cdot 2R \Rightarrow 2h = \frac{S}{R},$$

откуда площадь трапеции с основаниями $2a$ и $2b$ (по свойству касательных) и высотой $2R$ равна

$$2R\frac{2a+2b}{2} = 2R\frac{(2R)^2}{2h} = \frac{8R^4}{S}.$$

**8.** 1 и 6, 2 и 7, 3 и 6, 4 и 3, −1 и 2 или −2 и 9.

Обозначим приписанную цифру через $k$. Тогда если $n > 0$, то

$$(10n + k) + n^2 - 3 = 14n,$$

откуда $k = -n^2 + 4n + 3$ и при $n = 1, 2, 3, 4$ получаем $k = 6, 7, 6, 3$, а при $n \ge 5$ имеем $k = 7 - (n-2)^2 < 0$.

Если же $n < 0$, то

$$(10n - k) + n^2 - 3 = 14n,$$

откуда $k = n^2 - 4n - 3$ и при $n = -1, -2$ получаем $k = 2, 9$, а при $n \le -3$ имеем $k = (n-2)^2 - 7 < 9$.

## ФИЗИКА

### *Физический факультет*

**1.** Обозначим расстояние между точками $O_1$ и $C$ через $x$. Это расстояние должно удовлетворять соотношению $h = x\cos\beta + x\sin\beta\operatorname{ctg}(\pi - \alpha - \beta)$, откуда

$$x = \frac{h\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}.$$

В течение малого промежутка времени $\tau$, начиная с заданного момента, зависимость величины угла $\beta$ от времени имеет вид $\beta(\tau) = \beta - u_1\tau/L$. При этом величина угла $\alpha$ изменяется по закону $\alpha(\tau) = \alpha + (u_1 + u_2)\tau/L$. По определению, модуль скорости движения точки $C$ вдоль стержня $O_1C$ равен модулю первой производной координаты $x$ по времени. Следовательно, модуль искомой скорости заданной точки равен

$$v = x' = h\frac{\left|u_2\sin\alpha\cos(\alpha+\beta) - (u_1+u_2)\cos\alpha\sin(\alpha+\beta)\right|}{L\sin^2\alpha}.$$

**2**. При решении задачи будем считать, что клин неподвижен относительно лабораторной системы отсчета, ось $X$ которой параллельна стержню и направлена вниз по клину. В тот момент когда на гладкой поверхности клина оказывается часть стержня массой $\beta m$, где $0 \le \beta \le 1$, на нее вдоль оси $X$ действует составляющая силы тяжести $\beta mg\sin\alpha$ и сила натяжения со стороны верхней части стержня, направленная противоположно оси $X$, и равная $T(\beta)$. Запишем уравнение движения нижней части стержня вдоль оси $X$:

$$\beta ma = \beta mg\sin\alpha - T(\beta),$$

где $a$ – ускорение любой точки стержня вдоль оси $X$, так как стержень твердый и движется поступательно. В рассматриваемый момент на верхнюю часть стержня вдоль оси $X$ наряду с составляющей силы тяжести $(1-\beta)mg\sin\alpha$ со стороны клина действует направленная противоположно оси $X$ сила сухого трения скольжения $\mu(1-\beta)mg\cos\alpha$, а со стороны нижней части стержня действует направленная вдоль оси $X$ сила натяжения $T(\beta)$. Уравнение движения этой части стержня в проекции на ось $X$ имеет вид

$$(1-\beta)ma = (1-\beta)mg\sin\alpha + T(\beta) - \mu(1-\beta)mg\cos\alpha.$$

Решая совместно составленные уравнения, получаем

$$T = \beta(1-\beta)\mu mg\cos\alpha.$$

Видно, что сила натяжения стержня в сечении, которое находится на границе между гладкой и шероховатой частями клина, зависит от значения коэффициента $\beta$. Докажите самостоятельно, что она будет максимальной при $\beta = 0{,}5$, т.е. когда одна половина стержня окажется на гладкой нижней части клина, а другая половина – на его шероховатой верхней части. В таком случае

$$T_{\max} = 0{,}25\mu mg\cos\alpha .$$

**3**. Пусть $M$ – масса груза, $m$ – масса стержня, а $L$ – его длина (рис.21). Обозначим через $F$ силу, действующую на стер-

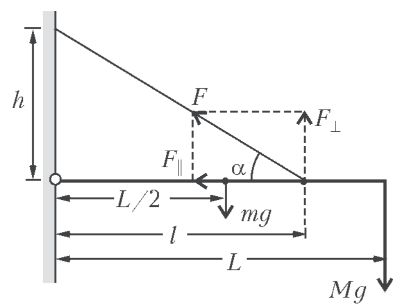


*Рис. 21*

жень со стороны проволоки. Запишем условие равновесия стержня:

$$Fl\sin\alpha = (M + 0{,}5m)gL .$$

Поскольку $h = l\operatorname{tg}\alpha$, то

$$F = \frac{(M + 0{,}5m)gL}{h\cos\alpha} .$$

По закону Гука удлинение проволоки равно $\Delta l = Fl_0/(ES)$, где $E$ – модуль Юнга, $S$ – площадь поперечного сечения, а $l_0$ – длина недеформированной проволоки. Согласно обозначениям на рисунке, $(l_0 + \Delta l)\sin\alpha = h$. По условию задачи проволока жесткая, следовательно, нужно считать, что $\Delta l \ll l_0$, а потому

$$\Delta l = \frac{(2M + m)gLl_0}{(l_0 + \Delta l)ES\sin 2\alpha} \approx \frac{(2M + m)gL}{ES\sin 2\alpha} .$$

Из этого выражения ясно, что минимальным удлинение жесткой проволоки будет при $\sin 2\alpha \approx 1$, т.е. при $\alpha \approx 45°$. Таким образом, искомое расстояние

$$h \approx l = 30\ \text{см} .$$

**4**. После одновременного отпускания грузов, смещенных от положений равновесия на одинаковые расстояния, центр масс рассматриваемой системы, совпадающий с центром $n$-угольника, т.е. точка $O$ на рисунке 22, должен оставаться неподвижным. При этом на каждый из грузов, когда они смещены от своих положений равновесия на расстояние $x$, будут действовать две прикрепленные к нему пружины.

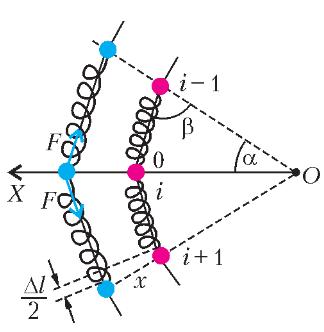


*Рис. 22*

На рисунке положение равновесия $i$-го груза обозначено цифрой 0.

По условию задачи грузы совершают малые колебания, а оси пружин остаются прямолинейными. Поэтому согласно закону Гука модуль силы упругости каждой пружины равен $F = k\Delta l$, где $\Delta l$ – удлинение пружины. Используя обозначения на рисунке, получим, что $\Delta l = 2x\cos\beta$, причем $2\beta = \pi - \alpha$, где $\alpha = 2\pi/n$.

Равнодействующая всех сил, действующих на каждый груз, направлена вдоль прямой, соединяющей этот груз с точкой $O$. Модуль этой равнодействующей равен $2F\cos\beta$. Следовательно, уравнение движения любого из грузов в проекции на указанную прямую, например на ось $X$ для $i$-го груза, можно представить в виде

$$mx'' = -2F\cos\beta = -4kx\cos^2\left(\frac{(n-2)\pi}{2n}\right).$$

Решением этого уравнения, как известно, является гармоническая функция, период которой равен

$$T = \pi\sqrt{\frac{m}{k}}\left(\cos\frac{(n-2)\pi}{2n}\right)^{-1} = \frac{\pi}{\sin(\pi/n)}\sqrt{\frac{m}{k}} .$$

**5**. По условию задачи на участке *1–2* газ получил от нагревателя количество теплоты $Q_{12}$, равное приращению его внутренней энергии $\Delta U_{12}$, т.е. $Q_{12} = \Delta U_{12} = 4$ кДж. Следовательно, процесс *1–2* – изохорный. На участке *2–3* газ не обменивался теплом с окружающими телами, т.е. процесс *2–3* – адиабатный. На участке *3–1* внутренняя энергия газа оставалась неизменной, т.е. это изотермический процесс. На этом участке газ отдал нагревателю количество теплоты, модуль которого равен $Q_{31} = 3$ кДж. По определению КПД цикла равен

$$\eta = 1 - \frac{Q_{31}}{Q_{12}} = 0{,}25 .$$

**6**. При решении задачи будем считать, что температура, при которой проводится опыт, существенно меньше критической температуры воды. Тогда плотность насыщенного пара можно считать много меньшей плотности воды в сконденсированном состоянии, а потому объемом воды по сравнению с объемом пара можно пренебречь. Будем также считать, что уравнения состояния сухого воздуха и паров воды вплоть до точки насыщения совпадают с уравнением состояния идеального газа. Если давление пара в начальном состоянии $p_н$, а давление воздуха $xp_н$, то начальное давление смеси в цилиндре будет $p_0 = (1 + x)p_н$. После изотермического уменьшения объема согласно условию задачи давление смеси возрастает в $n$ раз и становится равным $np_0 = (1 + kx)p_н = n(1 + x)p_н$. Следовательно,

$$x = \frac{n-1}{k-n} = 1 ,\ \text{а}\ p_0 = 2p_н .$$

Масса воды в начальном состоянии была равна массе пара, значит, вся вода испарится, если объем смеси увеличится в два раза. При этом конечное давление под поршнем станет равным

$$p_к = p_н + 0{,}5xp_н = 1{,}5p_н .$$

Решая совместно два последних уравнения, получаем ответ:

$$\frac{p_к}{p_0} = 0{,}75 .$$

**7**. После сообщения внутренним пластинам противоположных по знаку зарядов, модули которых равны $q$, при разомкнутых внешних пластинах электростатическая энергия системы станет равной

$$W_0 = \frac{q^2}{2C} ,$$

где $C = \varepsilon_0 S/d$ – емкость плоского конденсатора, образованного внутренними пластинами, а $\varepsilon_0$ – электрическая постоянная. После соединения внешних пластин их потенциалы должны стать одинаковыми. При этом на обращенных друг к другу поверхностях внутренних пластин останутся равные по модулю, но противоположные по знаку заряды. Пусть модуль этих зарядов равен $q_1$, а модуль зарядов на внешних поверхностях этих пластин равен $q_2$. Согласно закону сохранения заряда, должно выполняться соотношение $q = q_1 + q_2$. При этом модуль разности потенциалов между внутренними пластинами станет равным $U_1 = q_1/C$, а модуль разности потенциалов между крайней и ближайшей к ней внутренней пластиной будет равен $U_2 = q_2/C$. Поскольку внешние пластины соединены между собой, разность потенциалов между ними установится равной нулю, т.е. в конечном состоянии должно выполняться соотношение $2U_2 - U_1 = 0$. Следовательно, $q_1 = 2q/3$, а $q_2 = q/3$. При этом электростатическая энергия системы будет равна

$$W_к = \frac{q_1^2}{2C} + \frac{2q_2^2}{2C} = \frac{q^2}{3C}.$$

По условию задачи потерями энергии на излучение, имевшее место при перераспределении зарядов по проводникам системы, следует пренебречь. Поэтому согласно закону сохранения энергии,

$$Q = W_0 - W_к = \frac{q^2}{6C}.$$

Из этого соотношения следует, что модуль зарядов внутренних пластин равен

$$q = \sqrt{\frac{6QS\varepsilon_0}{d}}.$$

**8**. При вращении металлического стержня вокруг вертикальной оси на свободные носители заряда, имеющиеся в нем, со стороны магнитного поля действует магнитная составляющая силы Лоренца. Действие этой силы можно учесть, считая, что на свободные носители заряда действуют сторонние силы, ЭДС которых можно вычислить по закону электромагнитной индукции.

Для вычисления ЭДС учтем, что за малое время $\tau$ стержень «заметает» площадь $\Delta S = 0{,}5Rv\tau$, где $v = \omega R\sin\alpha$ – скорость движения конца стержня, касающегося полусферы. Поэтому модуль изменения магнитного потока через эту поверхность за указанное время равен

$$\Delta\Phi = B\Delta S\sin\alpha = 0{,}5\,\omega BR^2\tau\sin^2\alpha.$$

Следовательно, модуль искомой ЭДС индукции равен

$$\mathcal{E} = \frac{\Delta\Phi}{\tau} = 0{,}5BR^2\omega\sin^2\alpha \cdot$$

Сила тока, протекающего через резистор, согласно закону Ома равна $I = \mathcal{E}/r$, а выделяющаяся в нем мощность по закону Джоуля–Ленца составляет

$$P = I^2r = \frac{\mathcal{E}^2}{r} = \frac{0{,}25B^2R^4\omega^2\sin^4\alpha}{r}.$$

**9**. Поскольку внутренним сопротивлением источника тока по условию задачи следует пренебречь, в резисторе в течение времени $\tau$ выделится количество теплоты $Q_1 = \mathcal{E}^2\tau/R$. При этом модуль скорости нарастания силы тока через катушку остается постоянным и удовлетворяет условию $\mathcal{E} = I'L$. Поэтому в момент отключения источника сила тока через катушку равна $I(\tau) = \mathcal{E}\tau/L$. После отключения источника вся энергия магнитного поля, созданного токами в катушке, преобразуется в количество теплоты $Q_2 = 0{,}5LI^2(\tau)$, которое выделяется в резисторе. По условию задачи $Q_1 = Q_2$, т.е.

$$\frac{\mathcal{E}^2\tau}{R} = \frac{0{,}5\mathcal{E}^2\tau^2}{L}.$$

Следовательно, искомая индуктивность катушки равна $L = 0{,}5R\tau$.

В заключение следует отметить, что полученный ответ не зависит от ЭДС источника.

**10**. На рисунке 23 показано построение двух действительных изображений стержня. Для нахождения изображения стержня

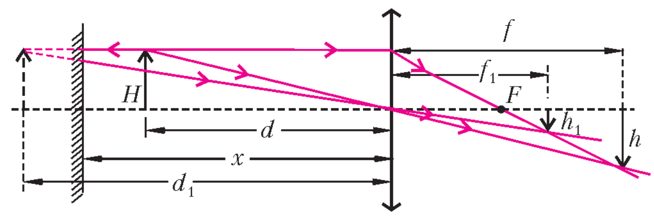


*Рис. 23*

в плоском зеркале мы воспользовались тем, что это изображение получается за зеркалом на расстоянии, равном расстоянию между предметом и зеркалом, а его размер равен размеру предмета. Для построения изображения $h$ самого стержня и изображения $h_1$ отражения стержня в зеркале линзой мы использовали свойство лучей, проходящих вдоль побочных оптических осей тонкой линзы, и свойство луча, падающего на собирающую линзу параллельно ее главной оптической оси. Из рисунка следует, что

$$\frac{h}{H} = \frac{f}{d},\quad \frac{h_1}{H} = \frac{f_1}{d_1},\quad 2(x-d)+d = d_1$$

причем, согласно формуле тонкой линзы,

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1}.$$

Из приведенных соотношений получается, что

$$k = \frac{h}{h_1} = \frac{d_1f}{df_1} = \frac{d_1 - F}{d - F} = 2\frac{x-F}{d-F},$$

или

$$(k+1)(d-F) = 2(x-F).$$

Решая последнее уравнение, находим искомое расстояние:

$$x = 0{,}5\left((k+1)d - (k-1)F\right).$$

### *Факультет вычислительной математики и кибернетики*

**1.** $F(t) = F_0\dfrac{l_0}{\sqrt{l_0^2+h^2}}\dfrac{\sqrt{(l_0-v_0t)^2+h^2}}{l_0-v_0t}$.

**2.** $m = \rho Sh\left(1+\dfrac{v}{g\tau}\right) = 50{,}5$ г.

**3.** $v_2 = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{u^2+4v_0^2} - u\right)$, где $u = \dfrac{\left(v_0^2-v_1^2\right)\sin\alpha_2}{v_1\sin\alpha_1}$.

**4.** $T_3 = \sqrt{\dfrac{4T_2^2 - T_1^2}{3}}$. **5.** $h \ge \dfrac{p_0}{\rho gm}(\rho V_0 - m) = 10$ м.

**6.** $N = \dfrac{\rho V}{\tau}\left(gh + \dfrac{V^2}{2S^2\tau^2}\right)$. **7.** $s = \dfrac{\pi^2am}{2k}$.

**8.** $\tau = \dfrac{\Delta p}{p_0}\dfrac{V}{S}\sqrt{\dfrac{M}{2RT}} \approx 241$ с. **9.** $Q = 2RT_0\left(n^2-1\right) = 6225$ Дж.

**10.** $x = \dfrac{l}{2}$ при $l \le L$, $x = l - \dfrac{L}{2}$ при $L \le l \le 3L/2$, $x = L$ при $2L > l > 3L/2$.

**11.** $v = \sqrt{2gh + \frac{\varepsilon_0 S U^2}{mh}} \approx 0{,}2$ м/с .

**12.** $\tau = \frac{24 d^2 \varepsilon_0 \varphi}{25 I R} \approx 133$ мкс .

**13.** $Q = \frac{\mathscr{E}^2}{2}\left(C_2 + C_1 \frac{R^2}{(R+r)^2}\right) = 1{,}32 \cdot 10^{-4}$ Дж .

**14.** $U_{12} \approx \frac{1}{2} U (\alpha_1 - \alpha_2) t$ . **15.** $I = \frac{Bl(v_1 R_2 + v_2 R_1)}{R_1 R_2 + R(R_1 + R_2)}$ .

**16.** $U_{\max} = 2\mathscr{E} - U_0$ при $U_0 < \mathscr{E}$ , $U_{\max} = U_0$ при $U_0 \ge \mathscr{E}$ .

**17.** $d_2 = d_1 \frac{\sin \alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}$ . **18.** $d = F \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{F}{\sqrt{3}}$ .

**19.** $h = H \frac{2F - L}{3F - L}$ . **20.** $r = \sqrt{\frac{\lambda R}{n}} \approx 2$ мм .

*Химический факультет*

*Вариант 1*

**3.** $v = \frac{E}{B} = 2 \cdot 10^5$ м/с . **4.** См. рис.24.

**5.** Давление увеличилось в 3 раза.

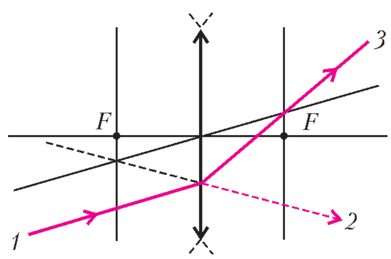

*Рис. 24*

**6.** $v_0 = \sqrt{\frac{2gl \sin \alpha}{n^2 - 1}}$ . **7.** $T = 3mg - qB\sqrt{2gl}$ .

**8.** $3\lambda < d < 4\lambda$ , или 1,9 мкм $< d <$ 2,5 мкм (максимальный порядок дифракции равен 3).

**9.** $\frac{W_1}{W_2} = \frac{(3R + 2r)^2}{(2R + r)^2} = 2{,}56$ .

**10.** $\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{\frac{M - m}{M}} = \frac{7}{8}$ .

*Вариант 2*

**3.** См. рис.25.

**4.** Бóльшую скорость будет иметь первый брусок.

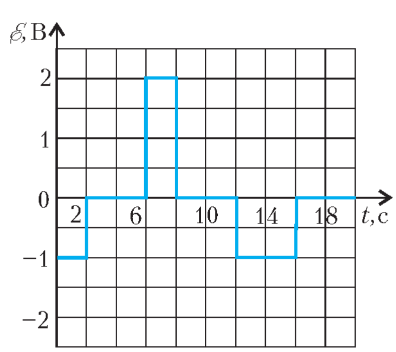

*Рис. 25*

**5.** $F_{\min} = \frac{p_0 S}{2} = 20$ Н .

**6.** Емкость увеличится в $\frac{4}{3}$ раза.

**7.** $R = \frac{(1-k) U^2 \tau}{\lambda m} \approx 5{,}3$ Ом . **8.** $s = \frac{\pi l}{4} \approx 0{,}8$ м .

**9.** $Q = \frac{U_0^2 (R_1 + R_2) \tau}{4 R_1 R_2} = 90$ Дж . **10.** $\operatorname{tg} \beta = \frac{(d - F) \operatorname{tg} \alpha}{F} = 2$ .



Квант журнал ©

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**А.А.Егоров, А.В.Жуков, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

НОМЕР ОФОРМИЛИ

**Д.Н.Гришукова, В.М.Власов, В.В.Иванюк, А.Е.Пацхверия**

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

**Е.В.Морозова**

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

**Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева**

**Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473**

**Адрес редакции:**
**119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»**
**Тел.: 930-56-48**
**E-mail: admin@kvant.info, math@kvant.info, phys@kvant.info**

**Отпечатано в ОАО ордена Трудового Красного Знамени «Чеховский полиграфический комбинат»**
**142300 г.Чехов Московской области,**
**Сайт: www.chpk.ru E-mail: marketing@chpk.ru**
**Факс: 8(49672) 6-25-36, факс: 8(499) 270-73-00**
**Отдел продаж услуг многоканальный: 8(499) 270-73-59**