ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

КМШ

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» № 5)

1. Верно. Предположим, что это не так. Тогда в каждой из трех партий найдутся коротышки, которые принадлежат только этим партиям; назовем их верными. Выберем по одному верному коротышке из каждой партии. По условию, среди этих трех найдутся двое, которые принадлежат одной партии. Противоречие.

2. $(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2+b^2 \geq 2ab \Rightarrow 3\left(a^2+b^2\right) \geq 2ab \Rightarrow$

$$\Rightarrow 3a^2b^2\left(a^2+b^2\right) \geq 2a^3b^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^6+3a^4b^2+3a^2b^4+b^6 \geq a^6+2a^3b^3+b^6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(a^2+b^2\right)^3 \geq \left(a^3+b^3\right)^2 .$$

3. Площади синих фигур равны. Отношение площади вписанного в круг квадрата к площади круга, в который он вписан, не зависит от размера этих фигур. Пусть это отношение равно a. Точно так же отношение площади вписанного в квадрат круга к площади квадрата, в который он вписан, не зависит от размера этих фигур и пусть оно равно b (на самом деле, $a=\frac{2}{\pi}$, $b=\frac{\pi}{4}$, но нам для решения эти значения не понадобятся).

Площадь синего круга: $a \cdot b \cdot 1$, площадь синего квадрата: $b \cdot a \cdot 1$, т.е. эти площади равны.

4. а) *Указание.* Любой солдат, стоящий в последней шеренге, может сделать не более 4 поворотов, поскольку в одном из положений перед его лицом не окажется никого. Если солдат стоит в предпоследней шеренге, то он может сделать не более 8 поворотов. В общем случае стоящий в n-й с конца шеренге (n = 1, 2, …) может сделать не более $4n$ поворотов.

б) Ответ: не обязательно. Возможна ситуация, когда повороты будут продолжаться бесконечно долго. Вот пример. Возьмем любого солдата C, стоящего не на краю строя, и пусть первоначально (после команды «смирно») все четверо солдат, стоящие по соседству с ним (спереди, сзади, справа и слева), обращены лицом к нему. Далее солдат C все время оказывается лицом к лицу с одним из своих соседей и поворачивается направо, а его соседи неподвижны.

В то же время можно специальным образом организовать повороты остальных солдат, чтобы они за конечное время прекратились. Для этого двух солдат, оказавшихся лицом к лицу, назовем противостоящими, а условную точку между ними – точкой противостояния.

Если два противостоящих солдата находятся в одной шеренге, то пусть поворот направо сделает тот, кто стоит правее. После этого он окажется стоящим лицом к задней шеренге. В результате либо противостояние пропадет, либо точка противостояния сместится немного в сторону и (главное!) назад. Если же два противостоящих солдата находятся в соседних шеренгах (т.е. в одной колонне), то пусть поворот направо сделает тот, кто стоит в задней шеренге. После этого он окажется стоящим лицом к своему соседу справа в той же шеренге. В результате либо противостояние пропадет, либо точка противостояния сместится немного в сторону и тоже назад.

Действуя так по отношению ко всем противостояниям, мы либо их ликвидируем, либо постепенно «выдавим» в самую заднюю шеренгу. Ну а когда все противостояния окажутся в последней шеренге, то после поворота направо того из противостоящих солдат, который стоит правее, противостояние исчезнет, поскольку этот солдат не окажется лицом к лицу ни с кем (шеренга-то последняя!).

5. См. рис. 1.

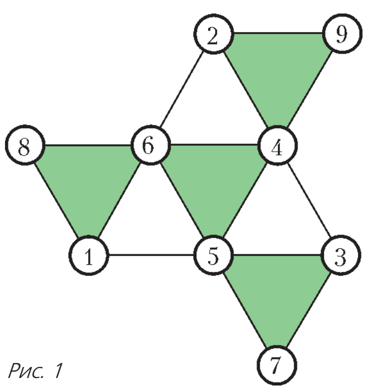

Рис. 1

ЗАДАЧИ

(см. с.24)

1. *Ответ:* 2006, 2007, 2008.

Пусть $n-1$, n, $n+1$ – искомые последовательные числа. Тогда, с одной стороны, их сумма равна $3n$, с другой, $(a-b+2007)+(b-c+2007)+(c-a+2007)=3\cdot 2007$. Значит, $n=2007$, т.е. это числа 2006, 2007, 2008.

2. Сначала решим задачу для суммы 2008. Ответ здесь таков: наибольший возможный остаток равен 668.

Докажем сначала, что он не может быть больше, чем 668. Используем рассуждения «от противного». Допустим, при некоторых делимом и делителе остаток оказался не меньше 669. Так как остаток всегда строго меньше делителя, то делитель не меньше 670, а делимое, конечно же, не меньше суммы делителя и остатка, т.е. 670 + 669 = 1339. Но тогда сумма делимого и делителя не меньше 1339 + 670 = 2009, тогда как по условию эта сумма равна 2008. Противоречие.

С другой стороны, можно добиться остатка, равного как раз 668, если взять делимое и делитель равными 1338 и 670.

Интересно, что если сумма чисел равна не 2008, а лишь 2006, то наибольший возможный остаток также равен 668 (доказательство аналогично, а в качестве примера можно взять числа 1337 и 669).

Казалось бы, если сумма чисел принимает промежуточное значение 2007, то и здесь наибольший остаток должен быть такой же. Но не тут-то было! Оказывается, остаток 668 все-таки недостижим.

Сначала точно таким же способом, как и выше, убеждаемся, что остаток не может быть больше, чем 668. А теперь разберемся, может ли он равняться 668. Итак, пусть делимое равно m, делитель равен n (причем, по условию, $m > n$), частное от деления m на n равно c, остаток равен 668. Тогда можно записать два равенства:

$$m+n=2007,$$

$$m=cn+668.$$

Вычитая из первого второе, получаем

$$(c+1)n=1339 .$$

Таким образом, n является делителем числа 1339. Так как $1339=13\cdot 103$, а 13 и 103 – простые числа, то n может принимать всего-то 4 значения: 1, 13, 103 и 1339. Легко проверить, что ни одно из этих четырех чисел не подходит. Итак, остаток 668 все же недостижим.

А вот остатка 667 добиться можно. Для этого достаточно взять исходные числа 1337 и 670. Так что ответ на первый вопрос: 667.

3. Траектория шарика представляет собой ломаную линию, состоящую из равных хорд окружности. Очевидно, что если хорда является диаметром, то движение шарика по этому диаметру периодично с периодом 5 секунд. Если хорда-звено меньше диаметра, то рассмотрим концентрическую столу окружность C, которой касаются все такие звенья. Если шарик прилетел по звену a, отразился от борта в точке P и, отраженный, полетел вдоль звена b, то оба звена a и b касаются окружности C. Оба они определяются точкой P и окружностью C однозначно: это следует из того, что из точки вне окружности можно провести к этой окружности ровно две касательные. Поэтому в следующий раз шарик может попасть в точку P только по одному из звеньев a или b. По звену b он попасть не может, так как в противном случае он должен где-то на траектории развернуться – начать движение в противоположную сторону. В рассматриваемом случае это невозможно. Снова попав в точку P вдоль звена a, шарик в дальнейшем станет периодически повторять свое движение с периодом 5 секунд.

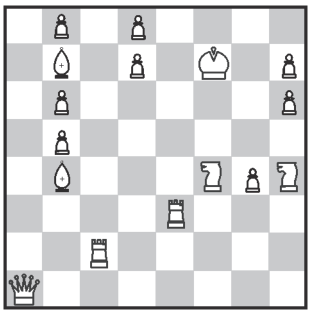

Рис. 2

4. Один из возможных способов расположения шахматных фигур показан на рисунке 2.

5. Ответ: 1, 6, 8.

Выпишем все числа, не превосходящие 50 и допускающие более одного представления в виде произведения трех попарно различных натуральных чисел; в квадратных скобках после каждого числа перечислим возможные суммы и отметим знаком «+» те из них, для которых проходит первая реплика B:

12 [9, 8+]
18 [12, 10+]
20 [13, 10+]
24 [15+, 12, 11, 9]
28 [17, 12]
30 [18, 14+, 12, 10+]
32 [19, 13]
36 [21+, 16+, 14+, 11]
40 [23, 15+, 14+, 11]
42 [24, 18, 14+, 12]
44 [25, 16+]
45 [19, 15+]
48 [27+, 20, 17, 15+, 13, 12]
50 [28, 16+]

Вторая реплика A возможна лишь для тех произведений, для которых не менее двух сумм помечено плюсом (если плюсом помечена всего одна сумма, то A уже знал бы загаданные числа, а если сумм, помеченных плюсом нет вовсе, то такое число не могло быть загаданным произведением). Перепишем оставшиеся варианты:

30 [14, 10]
36 [21, 16, 14]
40 [15, 14]
48 [27, 15]

На основании второй реплики B удалим те суммы, которые уникальны в оставшихся вариантах. Имеем:

30 [14]
36 [14]
40 [15, 14]
48 [15]

Если бы произведение загаданных чисел равнялось 40, A не смог бы определить загаданные числа после второй реплики B. Раз A смог определить их, значит остались такие варианты:

30 [14]
36 [14]
48 [15]

Если бы B знал число 14, то он не смог бы определить загаданные числа и после третьей реплики A. Но он определил их. Значит, произведение загаданных чисел равно 48, а сумма 15. Ну а сами числа это 1, 6 и 8.

ПОЛУПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ НА РЕШЕТКАХ

1. Если каждое наклонное звено ломаной заменить на два, идущих по линиям сетки (горизонтальное и вертикальное), то длина ломаной сохранит свою четность.

2. Индукцией по n можно проверить, что уравнение $x^2 + y^2 = 5^{n-1}$ имеет ровно $4n$ целочисленных решений, т.е. на окружности радиуса $5^{(n-1)/2}$ с центром в начале координат лежит ровно $4n$ точек целочисленной решетки. Если из векторов, которые соединяют начало координат с этими точками, выбрать такие $2n$ вектора, которые в сумме дают 0 (достаточно каждый раз вместе с вектором брать и обратный к нему), то, последовательно приставив их друг к другу, получим нужный многоугольник.

3. Если вершины многоугольника имеют рациональные координаты, то можно найти подобный ему многоугольник, вершины которого имеют целые координаты.

4. Приравняв в формуле Муавра действительные и мнимые части, можно найти формулы для $\cos n\alpha$ и $\sin n\alpha$. Их частное выражает $\operatorname{tg} n\alpha$ как рациональную функцию от $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$. Нужная формула получается, если числитель и знаменатель этой дроби поделить на $\cos^n\alpha$.

5. а) Для взаимно простых p и q можно найти число n, для которого $np = 1(\mathrm{mod}\, q)$. Тогда $\cos(np\pi/q) = \pm\cos(\pi/q)$. Поэтому $2\cos(\pi/q) = \pm f_n(2\cos(p\pi/q))$, и из рациональности числа $\cos(p\pi/q)$ следует рациональность $\cos(\pi/q)$.

б) Так как $2\cos(n\alpha) = f_n(2\cos\alpha)$, где $f_n(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом, равным 1, то число $2\cos(\pi/q)$ является корнем уравнения $f_q(x) = \pm 2$. Предположим, что число $\cos(\pi/q)$ рационально. Корнем полученного уравнения могут быть только целые числа. Следовательно, если $2\cos(\pi/q) \neq 0$, ± 1, ± 2, то $\cos(\pi/q)$ – иррациональное число.

в) *Указание*: $\sin\alpha = \cos(\pi/q - \alpha)$.

6. Для каждого паркета можно указать свободное от квадратов натуральное D такое, что узлы этого паркета содержатся в множестве $K(D)$, состоящем из точек $z = \alpha + i\beta$, где α, β – числа вида $x + y\sqrt{D}$ с рациональными x и y. Поэтому решение задачи можно свести к доказательству теоремы о правильных многоугольниках на $K(D)$ (ее доказательство есть, например, в книге В.В.Вавилова и А.В. Устинова «Многоугольники на решетках» – М.: МЦНМО, 2006).

Теорема. Имеют место следующие возможности:

а) При любом D квадрат можно расположить на $K(D)$.

б) На $K(2)$ можно расположить только квадрат и правильный восьмиугольник.

в) На $K(3)$ можно расположить только квадрат и правильные треугольник, шестиугольник и двенадцатиугольник.

г) Если $D \neq 2, 3$, то никакой правильный многоугольник, за исключением квадрата, на $K(D)$ расположить нельзя.

СКАЗКА О РЫБАКЕ И ЕГО СЛЮДЯНОЙ ЧУДО-ЛЕСТНИЦЕ

1. Сначала определим, на каком расстоянии от края плиты находится центр тяжести системы «плита–Старик с рыбой». Обозначив массу плиты через m, а искомое расстояние через x, из пропорции $\frac{mg}{F} = \frac{x}{1-x}$ находим $x = \frac{mg}{F+mg}$ (здесь g – ускорение свободного падения).

Далее, размещая центр тяжести первой плиты вместе со Стариком на краю второй плиты, будем предполагать, что к весу его улова добавился вес первой плиты. При этом предыдущее рассуждение остается в силе, если заменить F на $F + mg$. Центр тяжести двух плит со Стариком будет отстоять от края нижней плиты на величину $\frac{mg}{F+2mg}$. Аналогично, центр тяжести n плит со Стариком будет отстоять от края нижней плиты на величину $\frac{mg}{F+nmg}$.

Последовательно сдвигая плиты на эти расстояния при $n = 1, 2, 3, \ldots$, получим удаление от берега крайней точки стопки из плит:

$$Q_n = mg\left(\frac{1}{\mu+1}+\frac{1}{\mu+2}+\frac{1}{\mu+3}+\ldots+\frac{1}{\mu+n}\right), \text{ где } \mu = \frac{F}{mg}.$$

Эта величина с ростом n может принимать сколь угодно большие значения. Действительно,

$$\frac{1}{\mu+1}+\frac{1}{\mu+2}+\left(\frac{1}{\mu+3}+\frac{1}{\mu+4}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{\mu+5}+\frac{1}{\mu+6}+\frac{1}{\mu+7}+\frac{1}{\mu+8}\right)+\ldots >$$
$$> \frac{1}{\mu+1}+\frac{1}{\mu+2}+\left(\frac{1}{\mu+4}+\frac{1}{\mu+4}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{\mu+8}+\frac{1}{\mu+8}+\frac{1}{\mu+8}+\frac{1}{\mu+8}\right)+\ldots >$$
$$> \frac{1}{\mu+1}+\frac{1}{\mu+2}+\left(\frac{1}{4\mu+4}+\frac{1}{4\mu+4}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{8\mu+8}+\frac{1}{8\mu+8}+\frac{1}{8\mu+8}+\frac{1}{8\mu+8}\right)+\ldots =$$
$$= \frac{1}{\mu+1}+\frac{1}{\mu+2}+\frac{1}{2}\frac{1}{\mu+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{\mu+1}+\ldots$$

В последней сумме может быть сколь угодно много положительных слагаемых $\frac{1}{2}\frac{1}{\mu+1}$. Поэтому с ростом n она может превысить сколь угодно большую величину.

2. а) Около 16,6 м. б) Около 70 м.

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ В НЕСТАНДАРТНЫХ КОНТУРАХ

1. $I_L = I_{2L} = U_0\sqrt{\frac{C}{L}}$; $t = \frac{\pi}{2}\sqrt{LC}$.

2. $v(t) = v_0\cos\omega t$, где $\omega^2 = \frac{B^2d^2}{mL}$.

ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ РАСПОЛОЖЕНИЯ СФЕРЫ И ПИРАМИДЫ

1. 2. **2.** 12. 3. $BC = 16$; $CD = \frac{72}{7}$; $R = 3\sqrt{\frac{5}{2}}$; $\psi = \pi - \arccos\frac{127}{145}$.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $-\log_4 3$, 3. *Указание.* Рассмотрите отдельно случаи $3\cdot 4^{x+2} - 18 + 4^{-x} = 1$ и $3\cdot 4^{x+2} - 18 + 4^{-x} \neq 1$.

2. $2\pi n$, $\frac{2\pi}{3}+2\pi s$, $-\frac{2\pi}{3}+2\pi m$, $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $n\in\boldsymbol{Z}$, $s\ge 0$, $m\ge 1$, $k\le -1$.

3. $\left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{4}\right)$.

4. $R = \frac{12}{5\sqrt{6}+8}$; $l \ge \frac{75}{7}$.

Пусть O_1 и O_2 – центры ω_1 и ω_2 соответственно, R – радиус окружности ω_2, точки X и Y – проекции O_1 и O_2 на AC, точка E – проекция O_2 на O_1X, $\angle BAC = \angle ACB = 2\varphi$, $l = 15$. Имеем $\cos 2\varphi = \frac{AC}{2AB} = \frac{1}{5}$, $\cos\varphi = \sqrt{\frac{3}{5}}$, $\operatorname{ctg}\varphi = \sqrt{\frac{3}{2}}$. Тогда $AX = O_1X\operatorname{ctg}\varphi = 4R\sqrt{\frac{3}{2}}$, $CY = O_2Y\operatorname{ctg}\varphi = R\sqrt{\frac{3}{2}}$. В прямоугольном треугольнике O_1O_2E гипотенуза $O_1O_2 = 5R$, катет $O_1E = 3R$. Следовательно, по теореме Пифагора, $O_2E = 4R = XY$. Таким образом, $AC = 6 = AX + XY + YC = 5R\sqrt{\frac{3}{2}} + 4R = R\left(\frac{5\sqrt{6}+8}{2}\right)$, т.е. $R = \frac{12}{5\sqrt{6}+8}$.

Наименьшее значение $l_{\min}$, при котором существуют окружности ω_1 и ω_2, реализуется в случае, когда окружность большего радиуса ω_1 является вписанной в ΔABC. В этом случае X является серединой отрезка AC, а прямая O_1O_2 – биссектрисой угла ACB и $\angle O_1O_2E = \varphi$. Тогда $\sin\varphi = \frac{O_1E}{O_1O_2} = \frac{3R}{5R} = \frac{3}{5}$. Следовательно, $\cos 2\varphi = \frac{7}{25}$ и $AB = \frac{AX}{\cos 2\varphi} = \frac{75}{7} = l_{\min}$. Таким образом, при $l \ge l_{\min}$ окружности ω_1 и ω_2 существуют.

5. $8\sqrt{3}-2 \le |a| \le 8\sqrt{3}+2$; $\min = -5$.

На множестве пар $(x; y)$, удовлетворяющих только одному неравенству $y + \sqrt{16-x^2} \ge 0$, величина $y - \frac{x^2}{4}$ принимает наименьшее значение c^* в случае, когда парабола $y = c^* + \frac{x^2}{4}$ касается полуокружности $y = -\sqrt{16-x^2}$ в двух точках $(\pm x^*; y^*)$, где $0 < x^* < 4$. Условия касания запишутся следующим образом: $c^* + \frac{(x^*)^2}{4} = -\sqrt{16-(x^*)^2} = y^*$ и $\frac{x^*}{2} = \frac{x^*}{\sqrt{16-(x^*)^2}}$. Отсюда $x^* = 2\sqrt{3}$, $y^* = -2$, $c^* = -2 - \frac{12}{4} = -5$. На множестве $M(a)$ пар $(x; y)$, удовлетворяющих одновременно двум неравенствам $y + \sqrt{16-x^2} \ge 0$ и $y + 4 \ge |4x - a|$, величина $y - \frac{x^2}{4}$ не может принять значение меньше c^*. Следовательно, когда одна из точек $(\pm x^*; y^*)$ принадлежит $M(a)$, наименьшее значение величины $y - \frac{x^2}{4}$ на $M(a)$ равно c^* и будет минимально возможным. Выясним, при каких значениях параметра a имеет место включение одной из точек $(\pm x^*; y^*)$ в $M(a)$. Для этого решим неравенства $2 \ge |\pm 8\sqrt{3} - a|$. Получаем, что при $a \in [8\sqrt{3}-2; 8\sqrt{3}+2]$ точка $(2\sqrt{3}; -2)$ принадлежит $M(a)$, а при $a \in [-8\sqrt{3}-2; -8\sqrt{3}+2]$ точка $(-2\sqrt{3}; -2)$ принадлежит $M(a)$.

6. а) $AA_1 = d\sqrt{2}$, $AD = d(\sqrt{2}+1)$, $AB = d(\sqrt{2}+2)$;

б) $\arccos\frac{2+2\sqrt{2}}{\sqrt{34+23\sqrt{2}}}$; в) $R = d\left(\frac{3+3\sqrt{2}-\sqrt{5+6\sqrt{2}}}{4}\right)$.

а) Пусть $AA_1 = x$, тогда $AD = x + d$, $AB = x + 2d$, $AC_1 = x + 3d$. По теореме Пифагора $AA_1^2 + AD^2 + AB^2 = AC_1^2$, или $x^2 + (x+d)^2 + (x+2d)^2 = (x+3d)^2$. Откуда $x^2 = 2d^2$, или $x = d\sqrt{2}$.

б) Рассмотрим точку M на прямой AB такую, что $AM = AB = d\sqrt{2} + 2d$ и A лежит между точками M и B. Тогда $MD_1 \parallel AC_1$, т.е. угол между прямыми CD_1 и AC_1 равен углу между прямыми CD_1 и MD_1. Рассмотрим треугольник MD_1C. В нем

$$MC^2 = MB^2 + BC^2 = 4d^2\left(\sqrt{2}+2\right)^2 + d^2\left(\sqrt{2}+1\right)^2 = \left(27 + 18\sqrt{2}\right)d^2,$$

$$MD_1^2 = AC_1^2 = d^2\left(\sqrt{2}+3\right)^2 = d^2\left(11 + 6\sqrt{2}\right),$$

$$CD_1^2 = CD^2 + DD_1^2 = d^2\left(\sqrt{2}+2\right)^2 + 2d^2 = d^2\left(8 + 4\sqrt{2}\right).$$

Тогда по теореме косинусов

$$MC^2 = MD_1^2 + CD_1^2 - 2\cdot MD_1 \cdot D_1C \cdot \cos\angle MD_1C,$$

или

$$27 + 18\sqrt{2} = 11 + 6\sqrt{2} + 8 + 4\sqrt{2} - 2\cdot\sqrt{11+6\sqrt{2}}\cdot\sqrt{8+4\sqrt{2}}\cdot\cos\angle MD_1C.$$

Откуда $\cos\angle MD_1C = -\dfrac{2+2\sqrt{2}}{\sqrt{34+23\sqrt{2}}}$. Это означает, что угол между прямыми CD_1 и AC_1 равен $\arccos\dfrac{2+2\sqrt{2}}{\sqrt{34+23\sqrt{2}}}$.

в) Рассмотрим базис $\{\overline{AB}, \overline{AD}, \overline{AA_1}\}$. В этом базисе точка A будет иметь координаты $(0;\,0;\,0)$, а точка C_1 – координаты $\left(d\sqrt{2}+2d;\, d\sqrt{2}+d;\, d\sqrt{2}\right)$. Если радиусы сфер R, то координаты центра первой сферы $(R;\,R;\,R)$, второй – $\left(d\sqrt{2}+2d-R;\, d\sqrt{2}+d-R;\, d\sqrt{2}-R\right)$. Сферы касаются, если расстояние между их центрами равно $2R$. Запишем это условие: $\left(d\sqrt{2}+2d-2R\right)^2 + \left(d\sqrt{2}+d-2R\right)^2 + \left(d\sqrt{2}-2R\right)^2 = (2R)^2$. Обозначим диаметр сферы $2R = t$ и получим уравнение $2t^2 - d\left(6\sqrt{2}+6\right)t + \left(11+6\sqrt{2}\right)d^2 = 0$, откуда находим $R = \dfrac{t}{2} = \dfrac{\left(3+3\sqrt{2}\right)d \pm d\sqrt{5+6\sqrt{2}}}{4}$. При этом центры сфер лежат внутри параллелепипеда, если $R \le d\sqrt{2}$, т.е. только при

$$R = \frac{\left(3+3\sqrt{2}\right)d - d\sqrt{5+6\sqrt{2}}}{4}.$$

Вариант 2

1. $(1;\,2)$, $\left(-3;\,-\dfrac{2}{3}\right)$. *Указание.* Сделайте замену $u = 2x - 3y$, $v = xy - 6$.

2. $(-\infty;\,-1)\cup(-1;\,0]\cup(1;\,2)\cup(2;\,3)\cup\left[\dfrac{7}{2};\,4\right)$.

3. $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi m}{2},\quad m\in\boldsymbol{Z}$.

4. $R = \dfrac{5\sqrt{35}-3\sqrt{21}}{4}$, $S_{ABCD} = 30\sqrt{5} - 10\sqrt{3}$.

Так как AD – касательная, то $AD^2 = AK\cdot AL = 112$, $AD = 4\sqrt{7}$; аналогично, $CM^2 = CL\cdot CK = 7$, $BC = 2CM = 2\sqrt{7}$. Опустим из точек A и C перпендикуляры AA_1 и CC_1 на MD. Отрезки AD и CM образуют углы по $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ с DM. Поэтому $MC_1 = MC\cos\alpha = \sqrt{3}$, $DA_1 = DA\cos\alpha = 4\sqrt{3}$, $CC_1 = MC\sin\alpha = 2$, $AA_1 = DA\sin\alpha = 8$. Далее, по теореме Пифагора, $AC^2 = \left(AA_1 + CC_1\right)^2 + A_1C_1^2$, откуда $A_1C_1^2 = AC^2 - \left(AA_1 + CC_1\right)^2 = 15^2 - 10^2 = 125$, поэтому $A_1C_1 = 5\sqrt{5}$, $DM = A_1C_1 + MC_1 - DA_1 = 5\sqrt{5} - 3\sqrt{3}$. Так как угол между касательными в точках D и M равен $\pi - 2\alpha$, то DM стягивает дугу в 2α, поэтому радиус окружности равен

$$R = \frac{DM}{2\sin\alpha} = \frac{5\sqrt{35}-3\sqrt{21}}{4}.$$

Далее,

$$DS = MS = \frac{DM}{2\cos\alpha} = \frac{5\sqrt{35}-3\sqrt{21}}{2\sqrt{3}},$$

откуда

$$CS = MS - MC = \frac{5\sqrt{35}-5\sqrt{21}}{2\sqrt{3}},$$

$$BS = MS + MB = MS + MC = \frac{5\sqrt{35}-\sqrt{21}}{2\sqrt{3}},$$

$$AS = AD + DS = \frac{5\sqrt{35}+5\sqrt{21}}{2\sqrt{3}}.$$

Тогда

$$S_{ABCD} = S_{ABS} - S_{CDS} = \frac{1}{2}\left(AS\cdot BS - CS\cdot DS\right)\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 30\sqrt{5} - 10\sqrt{3}.$$

5. $a\in\left[\dfrac{1}{4};\,1\right)$ и $a = \dfrac{1}{4}\left(1 + 4^{5/3}\right)^{3/5}$.

Пусть $u = \dfrac{\sin^2 x}{32}$, $v = \cos^2 x$. Наличие единственного решения у рассматриваемого уравнения на отрезке $\left[-\pi;\,-\dfrac{\pi}{2}\right]$ равносильно наличию единственной точки пересечения у отрезка

$$\gamma_1 = \left\{(u;\,v)\,|\,32u + v = 1,\ u\ge 0,\ v\ge 0\right\}$$

и кривой

$$\gamma_2 = \left\{(u;\,v)\,\middle|\,u^{2/5} + v^{2/5} = a,\ u\ge 0,\ v\ge 0\right\}.$$

При $a < 0$ множество γ_2 пусто. Изобразив отрезок γ_1 и кривую γ_2 при $a \ge 0$ на координатной плоскости, видим, что при $a\in\left[0;\,\dfrac{1}{4}\right)$ пересечение $\gamma_1\cap\gamma_2$ пусто, а при $a\in\left[\dfrac{1}{4};\,1\right)$ пересечение $\gamma_1\cap\gamma_2$ одноточечно. При $a\ge 1$ пересечение $\gamma_1\cap\gamma_2$ одноточечно в случае касания γ_1 и γ_2. Графики функций $v_1(u) = 1 - 32u$ и $v_2(u) = \left(a - u^{2/5}\right)^{5/2}$ касаются в точке $(u;\,v)$ при $v_1(u) = v_2(u) = v$ и $v_1'(u) = v_2'(u) = -32$, т.е. $u^{-3/5} - 32v^{-3/5} = 0$. Следовательно, $v = 2^{25/3}u$, $\left(32 + 2^{25/3}\right)u = 1$ и

$$a = u^{2/5}\left(1 + 2^{10/3}\right) = \frac{1 + 2^{10/2}}{\left(32 + 2^{25/3}\right)^{2/5}} = \frac{1}{4}\left(1 + 4^{5/3}\right)^{3/5} > 1.$$

6. $a = R\operatorname{tg}2\beta$, $b = R\operatorname{ctg}\beta$, $c = \dfrac{R\sin 2\beta}{2 - \cos 2\beta}$,

$$V = \frac{2R^3}{3}\frac{\left(1+\cos 2\beta\right)^2}{\left(2-\cos 2\beta\right)\cos 2\beta};\quad \left(\angle OCD\right)_{\min} = \frac{\pi}{6};\quad V_{\min} = 2R^3.$$

Пусть сфера касается ребер AB, BC, AC, AD, DC, DB в точках M, N, E, K, L, F соответственно; $a = MB = NB = FB$, $b = CL = CN = CE = AK = AM = AE$, $c = DK = DL = DF$ – искомые отрезки; $h = DT$ – высота пирамиды. Имеем $\angle EBC = \angle EBA = \angle EBD = \dfrac{\pi}{2} - 2\beta$, $\angle ACB = \angle CAB = 2\beta$, $\angle OCN = \angle OCE = \angle OCL = \beta$. Из ΔBON получаем

$a = R\,\mathrm{tg}\,2\beta$. Из ΔCON определяем $b = R\,\mathrm{ctg}\,\beta = \dfrac{R\sin 2\beta}{1-\cos 2\beta}$. Из ΔCTB по теореме косинусов находим $CT^2 = BT^2 + (a+b)^2 - 2(a+b)BT\sin 2\beta$. По теореме Пифагора из ΔCTD и ΔBTD получаем $CT^2 + h^2 = (b+c)^2$, $BT^2 + h^2 = (a+c)^2$. Из ΔBTD имеем также $BT = (a+c)\sin 2\beta$. Отсюда находим

$$(b+c)^2 = (a+c)^2 + (a+b)^2 - 2(a+b)(a+c)\sin^2 2\beta.$$

Следовательно, $c = \dfrac{a(a+b)\cos^2 2\beta}{b-a+(a+b)\sin^2 2\beta}$. Так как $a+b = \dfrac{R\sin 2\beta}{(1-\cos 2\beta)\cos\beta}$, $b-a = \dfrac{R(2\cos 2\beta - 1)\sin 2\beta}{(1-\cos 2\beta)\cos 2\beta}$, то $c = \dfrac{R\sin 2\beta}{2-\cos 2\beta}$. Из ΔBTD определяем $h = (a+c)\cos 2\beta = \dfrac{2R\sin 2\beta}{2-\cos 2\beta}$. Площадь грани ABC равна $S = b(a+b)\sin 2\beta = \dfrac{R^2\sin^3 2\beta}{(1-\cos 2\beta)^2\cos 2\beta}$. Следовательно, объем пирамиды равен $V = \dfrac{Sh}{3} = \dfrac{2R^3}{3}\dfrac{(1+\cos 2\beta)^2}{(2-\cos 2\beta)\cos 2\beta}$. Далее, обозначив $t = \cos 2\beta$, ищем минимум функции $f(t) = \dfrac{(1+t)^2}{(2-t)t}$ на интервале $t \in (0;1)$. Уравнение $f'(t) = 0$ имеет единственное решение $t^* = \dfrac{1}{2}$. Так как $3 = f(t^*) < 4 = f(1-0) < +\infty = f(+0)$, то t^* доставляет минимум f на $(0;1)$. Соответствующее значение $\beta^* = \dfrac{\pi}{6}$. Минимальный объем пирамиды

$$V^* = \frac{2}{3}R^3 f(t^*) = 2R^3.$$

Вариант 3

1. $x = \dfrac{1}{4}$, $x \ge \dfrac{5}{4}$. **2.** $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3. $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}; 0\right) \cup \left[\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}; 1\right)$. **4.** $2\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{5}{4}$, $\dfrac{13\sqrt{41}}{40}$.

5. $(-2;0)$, $(-2;2)$. **6.** 2, $\dfrac{\sqrt{211}}{3\sqrt{2}}$, $\dfrac{19}{3}$.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. Обозначим 1 – нижний груз, 2 – верхний. Запишем условия равновесия грузов в воздухе и в воде:

$$T = \rho_1 V_1 g,$$
$$2T = T + \rho_2 V_2 g,$$
$$0{,}7T = (\rho_1 - \rho)V_1 g,$$
$$0{,}8\cdot 2T = 0{,}7T + (\rho_2 - \rho)V_2 g.$$

Отсюда найдем искомые плотности грузов:

$$\rho_1 = \frac{10}{3}\rho = 3{,}3\ \text{г/см}^3,\ \ \rho_2 = 10\rho = 10\ \text{г/см}^3.$$

2. 1) $F = \dfrac{1}{3}m\omega^2 l$. 2) Центр масс движущейся по окружности под действием искомой силы массы $\dfrac{2}{3}m + \dfrac{m}{3} = m$ находится на расстоянии

$$x = \frac{\frac{2}{3}m\cdot\frac{2}{3}l + \frac{m}{3}\cdot l}{\frac{2}{3}m + \frac{m}{3}} = \frac{7}{9}l$$

от оси вращения. По теореме о движении центра масс находим силу натяжения каната:

$$F = m\omega^2 x = \frac{7}{9}m\omega^2 l.$$

3. Пусть $T_2 = T_3 = T$, тогда

$$T_1 = T\frac{p_1}{p_3} = 3T.$$

Работа, совершаемая машиной во всем цикле, равна

$$A = A_{12} + A_{23} + A_{31},\ \text{где}\ A_{12} = -\Delta U = \nu c_V(T_1 - T_2) = 3\nu RT,$$

$$A_{23} = -Q,\ \ A_{31} = 0,$$

или

$$A = 3\nu RT - Q.$$

Отсюда находим искомую температуру:

$$T_{\max} = T_1 = 3T = \frac{A+Q}{\nu R}.$$

4. 1) Пусть в установившемся режиме напряжение на конденсаторе равно U – это его среднее значение. Тогда при разомкнутом ключе конденсатор заряжается током $I_1 = \dfrac{\mathcal{E}-U}{3R}$, а при замкнутом ключе разряжается током $I_2 = \dfrac{U}{2R}$. В стационарном состоянии приходящий заряд равен уходящему:

$$\frac{\mathcal{E}-U}{3R}\cdot 2\tau = \frac{U}{2R}\cdot\tau,\ \text{откуда}\ U = \frac{4}{7}\mathcal{E}.$$

2) Через резистор сопротивлением $2R$ в течение времени 2τ идет ток $I_1 = \dfrac{\mathcal{E}-U}{3R} = \dfrac{\mathcal{E}}{7R}$, а в течение времени τ идет ток $I_2 = \dfrac{U}{2R} = \dfrac{2\mathcal{E}}{7R}$. Средняя тепловая мощность равна

$$P = \frac{I_1^2\cdot 2R\cdot 2\tau + I_2^2\cdot 2R\cdot\tau}{3\tau} = \frac{4}{49}\frac{\mathcal{E}^2}{R}.$$

5. Изображение действительное, поэтому $f > 0$. Из системы уравнений

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F},\ \ f = \Gamma d,\ \ d + f = 4{,}5F$$

получаем

$$\Gamma^2 - 2{,}5\Gamma + 1 = 0,\ \text{откуда}\ \Gamma_1 = 2\ \text{и}\ \Gamma_2 = \frac{1}{2}.$$

По условию изображение увеличенное, значит, окончательно

$$\Gamma = 2.$$

Вариант 2

1. 1) Проекция скорости шарика на плиту не изменяется:

$$v_0\sin\alpha = v\sin\gamma.$$

Отсюда находим скорость отскочившего шарика:

$$v = v_0\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = 2v_0.$$

2) В системе отсчета, связанной с плитой, модуль скорости шарика при ударе не изменяется и угол падения равен углу отражения (рис.3). В неподвижной системе отсчета в проекции на нормаль к плоскости имеем

$$v\cos\gamma = 2u + v_0\cos\alpha,$$

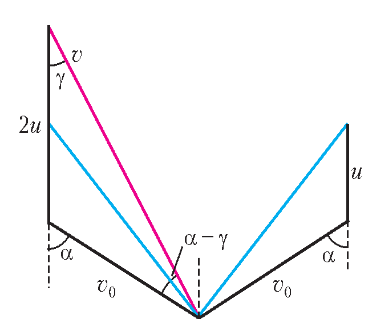

Рис. 3

откуда для искомой скорости плиты получаем

$$u = \frac{1}{2}\left(v\cos\gamma - v_0\cos\alpha\right) = \frac{4\sqrt{2}-\sqrt{5}}{6}v_0 .$$

Можно также записать теорему синусов:

$$\frac{2u}{\sin(\alpha-\gamma)} = \frac{v_0}{\sin\gamma},$$

откуда после раскрытия синуса суммы получим тот же ответ.

2. Для машины Карно коэффициент полезного действия равен

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{34}|}{Q_{12}} = 1 - \frac{T_3}{T_1}, \text{ откуда } \frac{|Q_{34}|}{T_3} = \frac{Q_{12}}{T_1}.$$

Кроме того,

$$A_{12} = Q_{12},\ A_{34} = |Q_{34}| \text{ и } A_{41} = \nu c_V \Delta T .$$

Объединяя все это, получаем

$$A_{12} = A_{34}\frac{T}{T-\Delta T} = A_{34}\frac{T}{T-\dfrac{A_{41}}{\nu c_V}} = \frac{3\nu RT}{3\nu RT - 2A_{41}}A_{34} .$$

3. Потенциальная энергия взаимодействия кольца и шарика равна

$$W = k\frac{Q\cdot 2Q}{l}, \text{ где } l = \sqrt{R^2+x^2} .$$

В начале наблюдения $x = 0$ и $l = R$, в конце $x = \frac{4}{3}R$ и $l = \sqrt{R^2 + \left(\frac{4}{3}R\right)^2} = \frac{5}{3}R$. Из закона сохранения энергии

$$k\frac{2Q^2}{R} = \frac{mv^2}{2} + k\frac{2Q^2}{\frac{5}{3}R}$$

находим искомую скорость шарика:

$$v = \sqrt{\frac{8kQ^2}{5mR}} = \sqrt{\frac{2Q^2}{5\pi\varepsilon_0 mR}} .$$

4. После замыкания ключа через резистор будет течь постоянный ток $I_R = \frac{\mathscr{E}}{R}$, а ток в катушке будет линейно нарастать со временем по закону $I_L(t) = \frac{\mathscr{E}}{L}t$. К моменту размыкания ключа в резисторе выделится количество теплоты $I_R^2R\tau$, а в катушке будет запасена энергия $\frac{LI_L^2(\tau)}{2}$, которая полностью перейдет в тепло после размыкания ключа. По условию,

$$Q = \left(\frac{\mathscr{E}}{R}\right)^2 R\tau + \frac{L}{2}\left(\frac{\mathscr{E}}{L}\tau\right)^2 = \frac{\mathscr{E}^2}{R}\tau + \frac{\mathscr{E}^2}{2L}\tau^2 .$$

Решая квадратное уравнение, находим искомое время:

$$\tau = \sqrt{\left(\frac{L}{R}\right)^2 + \frac{2LQ}{\mathscr{E}^2}} - \frac{L}{R}$$

(второй корень отрицательный).

5. Изображение получено на экране, поэтому оно действительное и линза собирающая. Решая систему

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F},\ \frac{f}{d} = \Gamma,$$

при $\Gamma_1 = 2$ получаем

$$d_1 = 1{,}5F,\ f_1 = 3F,\ l_1 = d_1 + f_1 = 4{,}5F, \text{ или } \frac{l_1}{F} = 4{,}5;$$

при $\Gamma_2 = 5$:

$$d_2 = 1{,}2F,\ f_2 = 6F,\ l_2 = 7{,}2F .$$

Линзу передвинули на расстояние $b = f_2 - f_1 = 6F - 3F = 3F$, предмет – на $x = l_2 - l_1 = 7{,}2F - 4{,}5F = 2{,}7F$. Таким образом,

$$x = \frac{27}{30}b = 27 \text{ см} .$$

Вариант 3

1. $M = 4{,}4m$.
2. 1) Масса пара равна нулю. 2) $V \approx 2{,}75$ л.
3. 1) $\varphi_A - \varphi_B = \frac{9}{4}\mathscr{E}$. 2) Ток направлен вверх и равен $I = \frac{5\mathscr{E}}{4R}$.
4. 1) $m = \frac{B\mathscr{E}l}{2gr}$. 2) Скорость направлена вверх и равна $v = \frac{\mathscr{E}}{2Bl}$.
5. 1) Изображение находится за экраном на расстоянии 10 см от него. 2) Диаметр пятна равен 23 мм.

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЭЛЕКТРОНИКИ И МАТЕМАТИКИ

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $\left(-\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$. **2.** $(-\infty;-1)\cup\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$.
3. $(1;3), (3;1), (-1;-3), (-3;-1)$.
4. $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$.
5. $D = (-1;5)$, $E = (-\infty;2]$. **6.** $-11;\ 1;\ 5$.
7. $\frac{18+27\pi}{4}$. **8.** 1728. **9.** $\left[\frac{1}{2};2\right]$.

Вариант 2

1. $\left[\frac{5}{3};3\right)$. **2.** $-1;\ \frac{2}{3}$. **3.** $[-2;2)$.
4. $\left(-\frac{1}{14};0\right]\cup\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$. **5.** $\log_2\frac{2}{7};1$.
6. $\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $\pi+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$.
7. Объединение прямых $y = -\frac{1}{2}x$, $y = \frac{2}{3}x$; нет.
8. 35.
9. Нет; $a\in[0;8]$. *Указание*. Преобразуем: $\sqrt{a}\cos x - \sin x = \sqrt{a+1}\cos(x+\varphi) \le \sqrt{a+1}$. Левая часть неравенства $\sqrt{a+1}+\sqrt[4]{a+8}\le 5$ – возрастающая функция. Подбором убеждаемся, что при $a = 8$ это неравенство обращается в равенство.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. $h = H - \frac{3v_0^2}{2g} = 10{,}65$ м. **2.** $T = \frac{2m_1m_2g}{m_1+m_2} = 66$ Н.
3. $\Delta U = \frac{3}{2}A = 30$ кДж. **4.** $\varphi = \frac{6Ea}{\sqrt{10}}$.
5. $P_1 = 2P_2 = \frac{2\mathscr{E}^2\eta(1-\eta)}{3r} = 1{,}26$ Вт.

Вариант 2

1. $v_{\text{отн}} = v_1\frac{t_2-t_1}{t_2} = 15$ км/ч. **2.** $v = 2\sqrt{\frac{Q}{m}} = 10$ м/с.

3. $N = \frac{pV}{kT} = 2{,}2 \cdot 10^{19}$. **4.** $l = \frac{gt^2}{4\pi^2 N^2} = 0{,}48$ м $= 48$ см.

5. $Q = \frac{LU^2}{2R^2} = 5 \cdot 10^{-3}$ Дж $= 5$ мДж.

МОСКОВСКИЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. -6. **2.** 8.

3. $\operatorname{tg}\frac{15\pi}{8}$. *Указание*. Представьте данные числа в виде $-\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$ и $-\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$.

4. $(-\infty; -64) \cup \left(-\frac{1}{64}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{64}\right) \cup (64; +\infty)$. *Указание*. Перейдите к логарифмам по основанию 2.

5. $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. *Указание*. Обозначьте $25^{\cos x} = y$.

6. 5. *Указание*. Рассмотрите два случая: $p > 1$ и $0 < p < 1$ и заметьте, что в каждом из них $f(x)$ строго монотонна.

7. 2. *Указание.* Обозначьте $x\sqrt{7} = t$.

8. 36. *Указание*. Рассмотрите сечение пирамиды плоскостью, проходящей через вершину пирамиды и перпендикулярной стороне основания, указанной в условии.

Вариант 2

1. 72. **2.** 3. **3.** $(-\infty; -0{,}5] \cup (1; 2]$.

4. 16. *Указание*. Перейдите к логарифмам по основанию 2.

5. $4x + 64x^{-9}$. **6.** $\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. **7.** $\left[-\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

8. $48\sqrt{3}$. *Указание*. Если все двугранные углы при основании пирамиды равны, то основанием высоты пирамиды является центр окружности, вписанной в основание (а в случае многоугольной пирамиды это означает еще, что в основание можно вписать окружность).

Вариант 3

1. $\sin\frac{79\pi}{40} < \cos\frac{11\pi}{5}$. *Указание*. Сравните данные числа с нулем.

2. $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$. *Указание*. Проверьте, что $x^{\log_2 x} = 2^{\log_2^2 x}$.

3. 5. **4.** $(-5; 2)$. **5.** -8. **6.** $-\frac{1}{3}$. **7.** $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

8. 2. *Указание*. Рассмотрите осевое сечение конуса.

Вариант 4

1. 126.

2. $\sin 397° < \frac{\sqrt{2}}{2}$. *Указание*. Приведите данные числа к виду $\sin 37°$ и $\sin 45°$.

3. $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4},\ n \in \boldsymbol{Z}$. **4.** $(0; 1) \cup (1; 2)$.

5. $2\left(e^x - e^{-x}\right)$. **6.** $(-3; 1) \cup (4; +\infty)$.

7. ± 1. **8.** $72\sqrt{3}$.

Задачи устного экзамена

1. $\sqrt{e}$; e. *Указание.* Прологарифмируйте уравнение.

2. $[-5; 0]$.

3. -2; 3. *Указание*. Разложите правую часть уравнения на множители.

4. $f(x)$ возрастает на $(-\infty; 1)$ и на $(1; +\infty)$. *Указание.* $\sqrt{z^2} = |z|$.

5. $x_1 = 3$ – точка максимума, $x_2 = -3$ – точка минимума.

6. $\cos 16 < \cos 17 < \sin 15$. *Указание*. Отметьте числа 15,16,17 на тригонометрической окружности.

7. $-\frac{7}{6}\pi;\ \frac{5}{6}\pi;\ \pm 2\pi$. *Указание*. Заметьте, что $\sin x - \sqrt{3}\cos x - 2 = 2\left(\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 1\right)$.

8. График – парабола $y = x^2 - 1$, из которой выколоты точки с абсциссами $\frac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}$.

9. 139; 469.

10. 144. *Указание*. В трапеции $ABCD$ проведите $CE \parallel BD$ и проверьте, что средняя линия треугольника ACE равна 12.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. 3). **2.** 3). **3.** 2). **4.** 2). **5.** 3). **6.** 1). **7.** 3). **8.** 2). **9.** 1). **10.** 2). **11.** 1). **12.** 2). **13.** 1) **14.** 1). **15.** 2). **16.** $A = 100$ Дж. **17.** $R = 150$ Ом. **18.** $F = 15$ кН. **19.** $Q = 9{,}1 \cdot 10^5$ Дж. **20.** $W = 1{,}9$ эВ.

Вариант 2

1. 1). **2.** 1) **3.** 1). **4.** 2). **5.** 3). **6.** 1). **7.** 3). **8.** 2). **9.** 3). **10.** 2). **11.** 2). **12.** 1). **13.** 3). **14.** 2). **15.** 3). **16.** $a = 20$ м/с^2. **17.** $v = 0{,}1$ м/с. **18.** $I = 5{,}5$ А. **19.** $d = 16$ см. **20.** $v = 350$ м/с.

НАПЕЧАТАНО В 2007 ГОДУ