ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

КМШ

Задачи

(см. «Квант» №4)]

1. Профессор Мумбум–Плюмбум обречен на неудачу. Если медиана перпендикулярна основанию, то исходный треугольник этой медианой делится на два равных треугольника. В других случаях медиана делит исходный треугольник на два треугольника, у одного из которых имеется тупой угол, больший, чем любой угол второго треугольника (подумайте, почему – см. рис.1), поэтому эти два треугольника не могут быть между собой подобными.

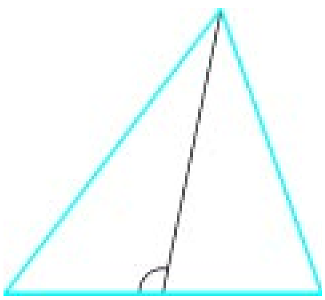

Рис. 1

2. Возможны следующие варианты троек различных цифр (с точностью до перестановки крайних цифр), у которых квадрат средней цифры равен произведению двух соседних с ней: 124, 139, 248, 469. Поскольку в номере телефона должны присутствовать три из таких комбинаций, то среди них обязательно должна находиться цифра 1. Несложно проверить, что комбинации 469 или 964 не подходят, а из оставшихся троек можно составить только следующие возможные сочетания: 842139 или 931248, причем сумма цифр и в том, и в другом случае равна 27. Поскольку искомый номер должен делиться и на 4, и на 9, то из оставшихся неиспользованных цифр 0, 5, 6, 7 подходит только цифра 0. На ноль домашний номер телефона начинаться не может, поэтому он должен стоять в конце. Привлекая признак делимости на 4, находим единственно возможный вариант: 9312480.

3. Обозначим первое число последовательности k, тогда условие задачи запишется так:

$$k+(k+1)+\ldots+(k+n)=(k+n+1)+\ldots+(k+2n),$$

или

$$k=(k+n+1-k-1)+(k+n+2-k-2)+\ldots+(k+2n-k-n).$$

В каждой из n скобок, стоящих в правой части последнего равенства, стоит число n, поэтому $k=n^2$.

4. Обозначим через a совокупную массу гирек, которые во время первых двух взвешиваний находились на левой чашке весов, а через b – совокупную массу гирек, которые во время первых двух взвешиваний находились на правой чашке весов. Тогда схема первого взвешивания может быть записана так: $a+b=c+d$, а второго – так: $a+d=c+b$. Отсюда $a=c$, т.е. весы и в третий раз покажут равновесие.

5. Примем длину стороны одной клетки за 1. Тогда периметр фигуры, образованной первоначально закрашенными клетками, не превышает $7\times4=28$. Операция закрашивания отдельной клетки не может увеличить периметр закрашенной фигуры (рис.2), а периметр всего закрашенного квадрата 8×8 равен 32.

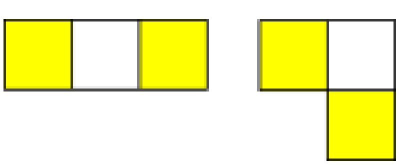

Рис. 2

Следовательно, Петя никогда не сможет закрасить весь квадрат.

Калейдоскоп «Кванта»

Вопросы и задачи

1. Когда кипяток: чем выше температура тела, тем больше его излучательная способность.

2. Модель абсолютно черного тела – это отверстие в закрытом сосуде.

3. Зрачок представляет собой отверстие в радужной оболочке глаза, который поглощает практически все попадающие в него лучи.

4. Да, установится. При этом все тела приобретут температуру оболочки, кроме зеркального – его температура будет близка к абсолютному нулю.

5. Нет, нельзя. С повышением температуры будет расти излучение полости, пока она не станет терять столько энергии, сколько получает.

6. Показание термометра зависит от излучения спутника, звезд, планет и самого термометра и равно его «равновесной» температуре, при которой равны испускаемые и поглощаемые термометром количества теплоты.

7. Максимум энергии излучения при высокой температуре приходится на тепловые (инфракрасные) лучи, которые хорошо отражаются металлом.

8. Черный уголь почти полностью поглощает видимый свет и при нагревании так же сильно его излучает; белый мел хорошо отражает свет, а при нагревании его излучение значительно слабее.

9. Матовая – она лучше поглощает тепло, поэтому картофель испечется быстрее.

10. По контрасту с окружающими его более светлыми предметами.

11. Да, если рассматривать его в свете, из которого исключен желтый цвет (это на опыте проверил еще Ньютон).

12. Если звезда горячее Солнца, то максимум ее излучения смещается в ультрафиолетовую область, и она кажется голубой. Если холоднее – максимум приходится на инфракрасную область, и она кажется красной или желтоватой. Если же максимум приходится на зеленый свет, как у Солнца, то в спектре излучения звезды присутствуют и все остальные цвета, создающие вместе ощущение белого цвета.

13. Фиолетового, поскольку импульс фотона фиолетового цвета больше импульса фотона красного цвета.

14. Луч лазера окажет большее давление на зеленое стекло, поглощающее фотоны красного цвета, чем на красное стекло, пропускающее их. А вот на зеленую бумагу, поглощающую фотоны красного цвета, луч лазера окажет меньшее давление, чем на красную, отражающую их.

15. Зеленая растительность не поглощает инфракрасные лучи, а отражает и рассеивает их.

16. Нет, поскольку действие лишь светового давления создало бы вращение в противоположную сторону. Наблюдаемый эффект связан с тем, что остаточное давление разреженного газа на зачерченные пластинки несколько выше, чем на зеркальные (из-за более высокой температуры).

17. В принципе, может, если сила притяжения к Солнцу уравновесит силу светового давления.

18. В случае а) пластинка будет отталкиваться по направлению падения света; в случае б) – по направлению нормали к ее поверхности.

19. Момент силы светового давления на небольшой участок зеркальной поверхности равен нулю, в то время как момент силы светового давления на зачерненный участок стремится повернуть спутник зеркальной стороной к Солнцу.

Микроопыт

Темные поверхности лучше излучают инфракрасные лучи, поэтому в зачерненной банке вода остынет заметно быстрее.

Посмотрим сквозь линзу

1. $F = \sqrt{lL} \pm l$.
2. $F = a$.
3. Линза рассеивающая, ее фокусное расстояние равно

$$F = \frac{l\Gamma}{(1-\Gamma)^2} = 10\ \text{см}.$$

4. $\Gamma = 2$. **5.** Мнимым. **6.** $d = \dfrac{F\left(1+\sqrt{5}\right)}{2}$.

7. $F = 0{,}15$ м. **8.** $F = \dfrac{l^2 - L^2}{4l} = 24$ см.

9. $\Gamma = \dfrac{2\Gamma_1\Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2} = 2{,}4$. **10.** Возможны два решения: 5 или $\dfrac{1}{5}$.

XXXI Всероссийская олимпиада школьников по математике

Заключительный этап

9 класс

1. Построим биссектрису угла C и рассмотрим точку A', симметричную A относительно этой биссектрисы (рис.3). Так как $CP = CQ$, то построенная биссектриса является серединным перпендикуляром к отрезку PQ. Значит, четырехугольник $PQA'A$ – равнобокая трапеция или прямоугольник, следовательно, A' лежит на описанной окружности ΔAPQ при любом положении точек P и Q, удовлетворяющем условию.

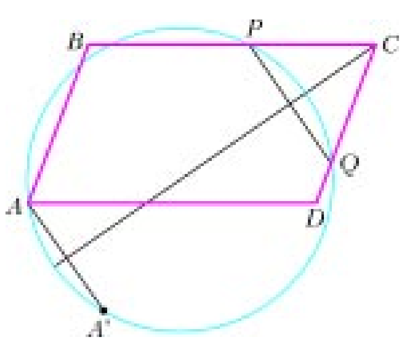

Рис. 3

2. Верно. Предположим, что Олег не сможет выбрать две требуемые клетки. Заменим все числа на их остатки при делении на 4. В таблице окажется по 121 числу 0, 1, 2 и 3. Разобьем таблицу на 121 табличку 2×2. В каждой такой табличке может стоять не более одного нуля и не более одной двойки. Следовательно, в каждой табличке стоит ровно один ноль и ровно одна двойка, причем оба оставшихся числа должны быть либо единицами, либо тройками. Тогда общее количество единиц четно. Противоречие.

3. Преобразуем условие:

$$\frac{a_1^2}{a_1 - 1} > S \Leftrightarrow a_1^2 > \left(a_1 + a_2 + a_3\right)\left(a_1 - 1\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_1 + a_2 + a_3 > a_1\left(a_2 + a_3\right) \Leftrightarrow \frac{1}{a_2 + a_3} > \frac{a_1}{a_1 + a_2 + a_3}.$$

Сложив это неравенство с двумя аналогичными, получаем

$$\frac{1}{a_1 + a_2} + \frac{1}{a_2 + a_3} + \frac{1}{a_3 + a_1} > \frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_1 + a_2 + a_3} = 1,$$

что и требовалось.

4. Может.

Лемма. *Пусть за x рублей Вася смог выложить в нужном порядке на стол $N - 1$ карточку, где $N \le 3^k$. Тогда он сможет добавить к выложенным карточкам еще одну, потратив при этом еще не более k рублей, т.е. затратив всего не более $x + k$ рублей.*

Доказательство леммы проведем индукцией по числу k. База $k = 1$ очевидна. Пусть для всех $N \le 3^{k-1}$ лемма доказана. Первый рубль Вася потратит на то, чтобы правильно расположить на столе N-ю карточку и карточки A и B, уже лежащие на местах $\left[\dfrac{N}{3}\right]$ и $\left[\dfrac{2N}{3}\right]$. Тогда N-я карточка попадет в одну из трех частей, на которые другие две карточки разбивают уже выложенную на стол последовательность. Но карточки A и B разбивают лежащую на столе последовательность $N - 1$ карточки на куски размером не более чем по $3^{k-1} - 1$ карточек. Значит, Васе осталось определить место карточки с номером N среди не более чем $3^{k-1} - 1$ карточек, потратив не более чем $k - 1$ рубль, а это можно сделать по предположению индукции. Таким образом, лемма доказана.

Теперь, используя лемму, подсчитаем Васины затраты на выкладывание всех 365 карточек. На выкладывание первых трех карточек Вася потратит 1 рубль. На добавление к ним карточек с номерами от 4 до 9 (всего 6 карточек) Вася потратит не более 2 рублей на каждую карточку. На карточки с 10 по 27 – не более 3 рублей на каждую, с 28 по 81 – не более 4 рублей, с 82 по 243 – не более 5 рублей и наконец на карточки с номерами от 244 до 365 – не более 6 рублей на каждую. Итого, Вася сможет выложить все карточки на стол в нужном порядке, потратив не более чем

$$1 + 6\cdot 2 + 18\cdot 3 + 54\cdot 4 + 162\cdot 5 + 122\cdot 6 = 1845 < 2000 \text{ рублей}.$$

Таким образом, Вася сможет потратить не более 2000 рублей.

5. *Первое решение.* Утверждение верно, если все числа – рациональны. Пусть наше множество содержит иррациональное число a. Тогда каждое из остальных чисел имеет вид либо $p - a$, либо $\dfrac{p}{a}$, где p – рационально. Покажем, что чисел вида $p - a$ не больше двух. Пусть $b_1 = p_1 - a$, $b_2 = p_2 - a$, $b_3 = p_3 - a$, тогда $b_1 + b_2 = \left(p_1 + p_2\right) - 2a$ – не рационально, значит, $b_1 \cdot b_2 = p_1p_2 - a\left(p_1 + p_2\right) + a^2$, а также $b_1 \cdot b_3$, $b_2 \cdot b_3$ – рациональны. Отсюда $A_3 = a^2 - a\left(p_1 + p_2\right)$, $A_2 = a^2 - a\left(p_1 + p_3\right)$, $A_1 = a^2 - a\left(p_2 + p_3\right)$ – рациональны, значит, $A_3 - A_2 = a\left(p_3 - p_2\right)$ – рационально, что возможно только при $p_3 = p_2$, т.е. $b_3 = b_2$ – противоречие.

Следовательно, чисел второго вида больше двух, пусть $c_1 = \dfrac{q_1}{a}$, $c_2 = \dfrac{q_2}{a}$, $c_3 = \dfrac{q_3}{a}$ – такие числа. Сумма $c_1 + c_2 = \dfrac{q_1 + q_2}{a}$ может быть рациональной только при $q_2 = -q_1$. Но $q_3 \ne q_2$, значит, сумма $c_1 + c_3 = \dfrac{q_1 + q_3}{a}$ иррациональна. Тогда число $c_1 \cdot c_3 = \dfrac{q_1q_3}{a^2}$ – рационально, откуда a^2 – рационально.

Второе решение. Рассмотрим произвольные 6 чисел из нашего набора. Поставим этим 6 числам в соответствие граф следующим образом: у него шесть вершин, соответствующих нашим шести числам; вершины соединены синим ребром, если сумма соответствующих чисел рациональна, и соединены красным ребром, если произведение соответствующих чисел рационально. Хорошо известно, что в таком графе найдется одноцветный треугольник. Рассмотрим каждый из этих случаев.

1) Нашелся синий треугольник, т.е. нашлись три числа x, y, z такие, что $x + y$, $x + z$, $y + z$ рациональны. Но тогда, на-

пример, $(x+y)+(x+z)-(y+z)=2x$ рационально, т.е. числа x, y, z рациональны. Тогда рассмотрим любое из оставшихся чисел t. Из рациональности любого из чисел xt и $x+t$ следует рациональность числа t (все числа по условию отличны от нуля), т.е. все числа набора рациональны.

2) Нашелся красный треугольник, т.е. нашлись три числа x, y, z такие, что xy, xz, yz рациональны. Но тогда, например, число $\frac{(xy)(xz)}{yz}=x^2$ рационально, т.е. числа x^2, y^2, z^2 рациональны. Если хотя бы одно из чисел x, y, z рационально, то аналогично предыдущему случаю получаем рациональность всех чисел набора. Пусть теперь $x=m\sqrt{a}$, где a рационально, $m=\pm 1$. Так как $xy=m\sqrt{ay}=b$ – рационально, то $y=\frac{b}{m\sqrt{a}}=\frac{b\sqrt{a}}{ma}=c\sqrt{a}$, где $c\neq m$, – рационально. Тогда рассмотрим любое из оставшихся чисел t. Если xt или yt – рационально, то аналогично предыдущему $t=d\sqrt{a}$, где d – рационально, т.е. t^2 – рационально.

Если же $x+t$ и $y+t$ – рациональны, то $(y+t)-(x+t)=$ $=(m-c)\sqrt{a}$ – рационально. Но $(x+t)-(y+t)=(m-c)\sqrt{a}$ – иррационально. Противоречие.

Таким образом, мы получили, что либо все числа набора рациональны, либо квадраты всех чисел набора рациональны, что и требовалось.

6. 1003.

Если $x_1\le x_2$ – корни уравнения, то $x_1,x_2\in \boldsymbol{N}$ и $x_1+x_2=S(A)$, $x_1x_2=S(B)$, поэтому

$(x_1+1)(x_2+1)=S(B)+S(A)+1=1+2+4+\ldots+2^{2005}+1=2^{2006}$.

Значит, $x_1+1=2^k$, $x_2+1=2^{2006-k}$, где k может принимать значения 1, 2, …,1003.

Наоборот, пусть x_1,x_2 – числа такого вида, тогда они являются корнями уравнения $x^2-px+q=0$, где $p=2^k+2^{2006-k}-2$, $q=2^{2006}-1-p$. Но число p имеет единственное разложение в сумму различных степеней двойки (двоичное разложение), и в этом разложении степени двойки не превосходят 2^{2005}, а двоичное разложение q содержит 1 на тех местах, где у числа p – нули, так как $p+q=2^{2005}-1$.

Итак, для каждого k такого, что $1\le k\le 1003$, существует единственное разбиение (A, B), дающее указанные корни x_1 и x_2.

7. Пусть, для определенности, точка D лежит на дуге BC, не содержащей точки A (рис.4). Обозначим через H точку пересечения высот треугольника ABC, а через H_A и H_B – вторые точки пересечения прямых AH и BH с окружностью.

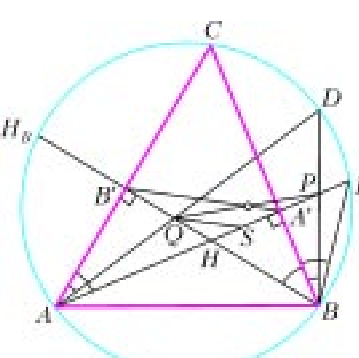

Рис. 4

Нетрудно доказать, что $H_AA'=HA'$, $H_BB'=HB'$. Далее, так как $\angle B'AQ=$ $=\angle CAD=\angle CBD=$ $=\angle A'BP$, отрезки AQ и BP являются соответствующими в подобных треугольниках $AB'H$ и $BA'H_A$, и $\frac{B'Q}{B'H}=\frac{A'P}{A'H_A}$.

Построим на высоте AA' точку S такую, что $QS\parallel A'B'$. Из теоремы Фалеса вытекает, что отношение $\frac{A'S}{A'H}$ равно $\frac{B'Q}{B'H}=\frac{A'P}{A'H_A}$, а так как $HA'=H_AA'$, значит, $A'S=A'P$, и $A'B'$ – средняя линия треугольника PQS, т.е. делит пополам сторону PQ.

10 класс

1. 11.

Нетрудно проверить, что все числа, меньшие 11, представляются в нужном виде:

$$1=\frac{4-2}{4-2},\ 3=\frac{8-2}{4-2},\ 5=\frac{16-1}{4-1}=\frac{2^5-2}{2^3-2},\ 7=\frac{16-2}{4-2},$$

$$9=2^3+1=\frac{2^6-1}{2^3-1}=\frac{2^7-2}{2^4-2},\ 2=2\cdot 1=\frac{2^3-2^2}{2^2-2},\ \ldots$$

$$\ldots,\ 10=2\cdot 5=\frac{2^6-2^2}{2^3-2}.$$

Предположим, что $11=\frac{2^a-2^b}{2^c-2^d}$. Можно считать, что $a>b$, $c>d$. Пусть $m=a-b$, $n=c-d$, $k=b-d$. Тогда

$11(2^n-1)=2^k(2^m-1)$.

Так как в левой части целое нечетное число, то $k=0$, а $n\neq 1$. Но при $m>n>1$ левая и правая части дают разные остатки 1 и 3 при делении на 4. Противоречие.

Замечание. Можно прийти к противоречию по-другому. Из алгоритма Евклида следует, что 2^m-1 делится на 2^n-1 без остатка тогда и только тогда, когда m делится на n. Значит, надо доказать, что $11\neq 1+2^n+2^{2n}+\ldots$ Но последнее очевидно, поскольку 11 не равно ни одному из чисел 1 + 2, 1 + 2 + 4, 1 + 4, 1 + 8.

4. Пусть B_0, C_0 – середины сторон AC, AB соответственно, ω_A – третья вневписанная окружность, P и Q – точки пересечения ω'_B и ω'_C. Положим $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$. Обозначим через I_A,I_B,I_C,I'_B,I'_C центры окружностей $\omega_A,\omega_B,\omega_C,\omega'_B,\omega'_C$ соответственно. Обозначим также через D, E, F точки касания $\omega_A,\omega_B,\omega_C$ и сторон BC, CA, AB; через E',F' – точки касания ω'_B,ω'_C и сторон CA, AB; через X, Y – точки касания ω_A и продолжений сторон AB, BC соответственно (рис.5).

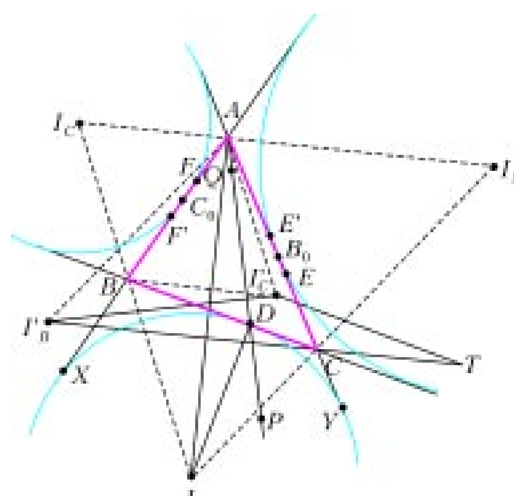

Рис. 5

Известно, что AD делит пополам периметр треугольника ABC (это следует из того, что $CD=\frac{a+c-b}{2}$). Поэтому достаточно показать, что 1) A лежит на PQ; 2) $AD\perp I'_BI'_C$.

1) Ясно, что точки E и E' симметричны относительно B_0. Следовательно, $AE'=CE=\frac{b+c-a}{2}$. Аналогично, $AF'=\frac{b+c-a}{2}$. Получаем, что касательные к ω'_B и ω'_C, про-

веденные из точки A, равны. Поэтому A лежит на радикальной оси PQ окружностей ω'_B и ω'_C.

2) Из симметрии следует, что AI'_BCI_B – параллелограмм, поэтому $\overline{I'_BC}=\overline{AI_B}$. Аналогично, AI'_CBI_C – параллелограмм, поэтому $\overline{BI'_C}=\overline{I_CA}$. Построим такую точку T, что BI'_CTC – параллелограмм. Получаем:

$$\overline{I'_CT}=\overline{BC},\quad \overline{I'_BT}=\overline{I'_BC}+\overline{CT}=\overline{AI_B}+\overline{I_CA}=\overline{I_CI_B}.$$

Так как AI_A и I_BI_C являются внутренней и внешней биссектрисами угла BAC, то $AI_A\perp I_BI_C$. Аналогично, $BI_B\perp I_CI_A$, $CI_C\perp I_AI_B$. Следовательно, $I_AB=I_AI_B\cos\angle I_BI_AI_C$, $I_AC=I_AI_C\cos\angle I_BI_AI_C$. Это означает, что $\Delta I_ABC\sim\Delta I_AI_BI_C$. Заметим, что I_AD и I_AA – соответствующие высоты в подобных треугольниках I_ABC и $I_AI_BI_C$. Отсюда следует, что $\dfrac{I_AD}{I_AA}=\dfrac{BC}{I_AI_C}$.

Рассмотрим треугольники $I'_BI'_CT$ и ADI_A. Имеем:
$I'_BT\parallel I_BI_C\perp I_AA$, $I'_CT\parallel BC\perp I_AD$, $\dfrac{I'_CT}{I'_BT}=\dfrac{BC}{I_BI_C}=\dfrac{I_AD}{I_AA}$. Отсюда следует, что треугольники I_BI_CT и I_ADA подобны и их соответствующие стороны перпендикулярны. Итак, $I'_BI'_C\perp AD$.

Замечание. Вместо части 2) можно доказать, что D лежит на PQ следующим образом.

Пусть ω – вписанная окружность треугольника ABC. Нетрудно видеть, что ω касается AB и AC в точках F',E' соответственно. Обозначим через I центр ω, через D' – точку касания ω и BC. Обозначим через r,r_B,r_C радиусы окружностей ω,ω_B,ω_C соответственно. В окружности ω проведем диаметр SD' (рис.6). Гомотетия с центром A, переводящая ω_A в ω, переводит D в S. Поэтому достаточно доказать, что $S\in PQ$.

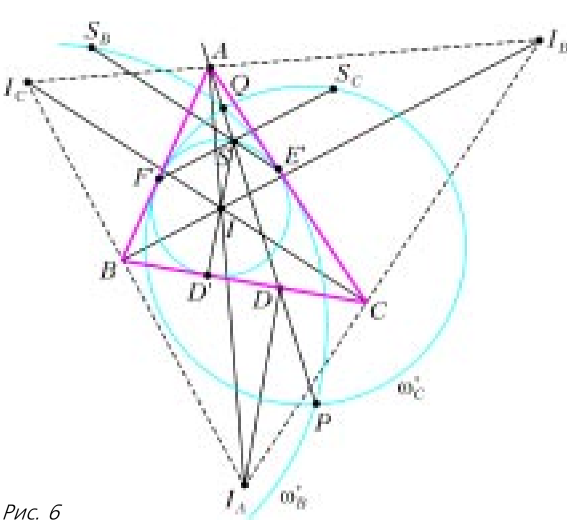

Рис. 6

Гомотетия с центром E' и коэффициентом $\dfrac{r_B}{r}$ переводит ω в ω'_B. Обозначим через S_B образ точки S при этой гомотетии, а через S_C – образ точки S при гомотетии с центром F', переводящей ω в ω'_C. Достаточно показать, что $E'S\cdot SS_B=F'S\cdot SS_C$. Заметим, что

$$E'S\cdot SS_B=E'S\cdot\left(E'S_B-E'S\right)=E'S\left(\frac{r_B}{r}E'S-E'S\right)=\frac{r_B-r}{r}E'S^2.$$

Аналогично, $F'S\cdot SS_C=\dfrac{r_C-r}{r}F'S^2$. Чтобы завершить решение, установим, что

$$\left(r_B-r\right)E'S^2=\left(r_C-r\right)F'S^2. \qquad (1)$$

Четырехугольник $F'SE'D'$ вписанный, поэтому

$$\angle SE'F'=\angle SD'F'=\frac{\pi}{2}-\angle BD'F'=\frac{\angle B}{2}.$$

Аналогично, $\angle SF'E'=\dfrac{\angle C}{2}$. По теореме синусов

$$\frac{E'S}{F'S}=\frac{\sin\dfrac{\angle C}{2}}{\sin\dfrac{\angle B}{2}}. \qquad (2)$$

Четырехугольник BCI_BI_C вписанный, поэтому $\angle II_CI_B=\angle IBC=\dfrac{\angle B}{2}$. Аналогично, $\angle II_BI_C=\dfrac{\angle C}{2}$.

Заметим, что $IB=\dfrac{ID'}{\sin\dfrac{\angle B}{2}}=\dfrac{r}{\sin\dfrac{\angle B}{2}}$ и $I_BB=\dfrac{r_B}{\sin\dfrac{\angle B}{2}}$. Получаем $I_BI=I_BB-IB=\dfrac{r_B-r}{\sin\dfrac{\angle B}{2}}$. Аналогично, $I_CI=\dfrac{r_C-r}{\sin\dfrac{\angle C}{2}}$.

Из теоремы синусов

$$\frac{I_BI}{I_CI}=\frac{\dfrac{r_B-r}{\sin\dfrac{\angle B}{2}}}{\dfrac{r_C-r}{\sin\dfrac{\angle C}{2}}}=\frac{\sin\dfrac{\angle B}{2}}{\sin\dfrac{\angle C}{2}}. \qquad (3)$$

Из (2) и (3) получаем (1).

5. 16.

Заметим, что если в строке a ладей, то в ней есть $(a-1)$ пара ладей, которые бьют друг друга. Но тогда количество пар ладей, бьющих друг друга по горизонтали, не меньше чем число ладей минус число горизонталей, т.е. не меньше 8. Аналогично, количество пар ладей, бьющих друг друга по вертикали, не меньше 8.

Пример для 16 ладей получается, если, например, расставить по 8 ладей на главных диагоналях.

7. Латинские буквы далее обозначают целые числа.

Лемма 1. *Если* $a=\text{НОД}\left(t+1,t^2-t+1\right)$, *то* $a=1$ *либо* $a=3$.

Доказательство. Поделив с остатком t^2-t+1 на $t+1$, получаем $t^2-t+1=(t-2)(t+1)+3$. Из полученного равенства видим, что если d – общий делитель t^2-t+1 и $t+1$, то d – делитель числа 3.

Аналогично, из равенства

$$t^4-t^3+t^2-t+1=\left(t^3-2t^2+3t-4\right)(t+1)+5$$

выводится еще одна лемма.

Лемма 2. *Если* $b=\text{НОД}\left(t+1,t^4-t^3+t^2+1\right)$, *то* $b=1$ *либо* $b=5$.

Имеем $t^3+1=(t+1)\left(t^2-t+1\right)=2x^2$, где $t=y^5$. Так как число t^2-1+1 всегда нечетно, то из леммы 1 следует, что либо $t+1=2u^2$, $t^2-t+1=v^2$, либо $t+1=6u^2$, $t^2-t+1=3v^2$. Далее, при $x>1$ имеем $t>1$, отсюда $(t-1)^2<t^2-t+1<t^2$, и равенство $t^2-t+1=v^2$ выполняться не может. Получаем $t+1=y^5+1=6u^2$. С другой стороны, $\left(y^5+1\right)-\left(y^3+1\right)=$ $=y^3(y-1)(y+1)$ делится на произведение $(y-1)y(y+1)$, и поэтому делится на 3. Таким образом, y^3+1 делится на 3, значит, $y^3=3m-1$.

Теперь положим $z=y^3=3m-1$, тогда $z^5+1=$ $=(z+1)\left(z^4-z^3+z^2-z+1\right)=2x^2$. Если $z^4-z^3+z^2-z+1$ делится на 5, то все доказано. В противном случае из леммы 2 следует, что сомножители в равенстве взаимно просты. Поскольку $z^4-z^3+z^2-z+1$ всегда нечетно, получаем, что $z+1=2u^2$, $z^4-z^3+z^2-z+1=v^2$. Но так как $z=3m-1$, то число в левой части последнего равенства при делении на 3 дает остаток 2, а число в правой части дает остаток 0 или 1 – противоречие.

Замечание. Уравнение

$$z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = v^2$$

имеет лишь 6 решений в целых числах: $(-3, \pm 11)$, $(0, \pm 1)$, $(1, \pm 1)$. В самом деле, при $z \neq 0$ имеем $\left(2z^2 - z\right)^2 < (2v)^2 < \left(2z^2 - z + 2\right)^2$, откуда $(2v)^2 = \left(2z^2 - z + 1\right)^2$ при целых z, что вместе с уравнением дает $z^2 + 2z - 3 = 0$. Получили $z = 1$ либо $z = -3$.

Ясно, что из этого замечания сразу получается еще одно решение задачи.

11 класс

1. 49.

Положим

$$f(x) = |x - a_1| + \ldots + |x - a_{50}| - |x - b_1| - \ldots - |x - b_{50}|.$$

Пусть $c_1 < c_2 < \ldots < c_{100}$ – все числа из множества $\{a_1, \ldots, a_{50}, b_1, \ldots, b_{50}\}$, упорядоченные по возрастанию. На каждом из 101 промежутка $[-\infty; c_1], [c_1; c_2], \ldots, [c_{99}; c_{100}], [c_{100}; +\infty)$ функция f линейна, а на первом и последнем из этих промежутков постоянна и не равна 0.

Пойдем по числовой оси слева направо. Всякий раз, когда мы проходим одну из точек c_i, угловой коэффициент при раскрытии соответствующего модуля изменяется на ± 2. Таким образом, он всегда равен четному целому числу и не может поменять знак, не обратившись перед этим в 0. Значит, угловые коэффициенты на любых двух соседних промежутках либо оба неотрицательны, либо оба неположительны, т.е. функция $f(x)$ на объединении этих промежутков либо неубывающая, либо невозрастающая. Стало быть, на каждом из 50 отрезков $[c_1; c_3], \ldots, [c_{97}; c_{99}], [c_{99}; c_{100}]$ она имеет не более одного корня. Кроме того, на крайних интервалах значения имеют разные знаки, и в каждом корне знак функции меняется. Следовательно, количество корней нечетно и не превышает 49.

Нетрудно проверить, что если роль a_i, будут играть числа 1, 4, 5, 8, ..., 97, 100, а роль b_i – числа 2, 3, 6, 7, ..., 94, 95, 98, $99\frac{1}{10}$, то уравнение $f(x) = 0$ будет иметь ровно 49 корней.

3. Через точки касания вневписанных окружностей A' и C' проведем перпендикуляры к соответствующим сторонам треугольника. Они пройдут через центры вневписанных окружностей (I_1 и I_3) и пересекутся в некоторой точке O (рис.7).

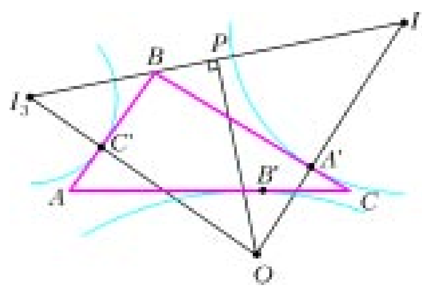

Рис. 7

Так как I_1 и I_3 находятся на внешней биссектрисе угла B, то $\angle ABI_3 = \angle CBI_1$. Из рассмотрения прямоугольных треугольников $I_1A'B$ и $I_3C'B$ следует, что $\angle BI_1A' = \angle BI_3C'$, значит, ΔOI_1I_3 – равнобедренный.

Обозначим середину отрезка I_1I_3 через P. Поскольку $OI_1 = OI_3$, $OP \perp I_1I_3$. Рассмотрим окружность с диаметром OB. На ней лежат точки A', C' и P, т.е. это окружность, описанная около $\Delta BA'C'$. Теперь достаточно доказать, что P лежит на описанной окружности $\Delta BA'C'$. Из этого будет следовать, что $P = B_1$, и $\Delta A_1B_1C_1$ – серединный треугольник для $I_1I_2I_3$, значит, его стороны параллельны внешним биссектрисам ΔABC. Но внешние биссектрисы параллельны сторонам треугольника, образованного точками касания вписанной окружности со сторонами ΔABC (стороны этих треугольников перпендикулярны внутренним биссектрисам).

Проведем из вершин A и C биссектрисы внутренних и внешних углов ΔABC (рис.8). Как известно, две биссектрисы

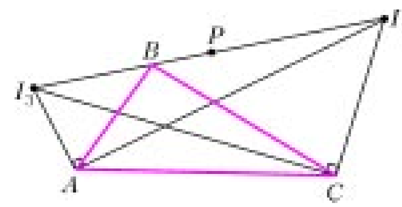

Рис. 8

одного угла перпендикулярны. Следовательно, точки I_1, C, A, I_3 лежат на окружности с диаметром I_1I_3 и с центром в точке P. Рассмотрим центральный угол этой окружности – $\angle API_3$. Он опирается на дугу I_3A, не нее же опирается вписанный угол $\angle I_3CA = \frac{1}{2}\angle C$. Значит, $\angle I_3PA = 2\angle I_3CA = \angle C$. Из этого следует, что $\angle BPA = \angle BCA$, т.е. точки A, B, P, C лежат на одной окружности.

Замечание. Окружность, проходящая через A, B, C, P, является окружностью девяти точек для треугольника $I_1I_2I_3$.

4. Имеем $(z-1)(z+1) = x^y$, НОД$(z-1, z+1) = 1$ при нечетном x, НОД$(z-1, z+1) = 2$ при четном x. В первом случае $z - 1 = u^y$, $z + 1 = v^y$, где $u, v \in \mathbf{N}$; отсюда $v^y - u^y = 2$. Но, поскольку $v > u$, $y > 1$, имеем

$$v^y - u^y = (v-u)\left(v^{y-1} + \ldots + u^{y-1}\right) \geq (v-u)\left(2^{y-1} + 1\right) \geq 3.$$

Противоречие: $2 \geq 3$. Значит, число x четно. В этом случае одно из чисел $z - 1$ и $z + 1$ делится на 2 и не делится на 4, а второе делится на $2^{\alpha y - 1}$ и не делится на $2^{\alpha y}$, где α – степень, в которой 2 входит в разложение x. Таким образом, $A = 2u^y$, $B = 2^{\alpha y - 1}v^y$ (u, v – нечетные натуральные числа), где A и B равны, в некотором порядке, числам $z - 1$ и $z + 1$ (при этом $AB = x^y$). Получили $\left|2u^y - 2^{\alpha y - 1}v^y\right| = 2$, $\left|u^y - 2^{\alpha y - 2}v^y\right| = 1$. Отсюда, при некотором выборе знака, $u^y \pm 1 = 2^{\alpha y - 2}v^y$.

Заметим, что $u > 1$. В самом деле, если $u = 1$, то $A = 2$, $A = z - 1$, $z = 3$, $x = 2$ – противоречит условию. Кроме того, число y нечетно, в противном случае, если $y = 2n$, $z^2 - \left(x^n\right)^2 = 1$, что невозможно.

Лемма 1. *Пусть $a \geq 2$, p – нечетное простое число. Тогда число $a^p - 1$ имеет хотя бы один простой делитель, не являющийся делителем числа $a - 1$.*

Доказательство. Рассмотрим разложение

$$a^p - 1 = (a-1)\left(a^{p-1} + a^{p-2} + \ldots + a^2 + a + 1\right) = (a-1)b.$$

Докажем вначале, что числа $a - 1$ и b не могут иметь общего делителя q, отличного от 1 и от p. Действительно, если $a - 1$ делится на q, то и $a^m - 1$ делится на q при любом натуральном m. Значит, $b = ql + p$, где l – некоторое целое число. Поэтому b делится на q лишь при $q = 1$ или p.

Таким образом, для завершения доказательства леммы осталось рассмотреть случай, когда $b = p^n$ и $a - 1$ делится на p. Докажем, что этот случай невозможен. Поскольку $b > p$, достаточно доказать, что b не делится на p^2. Докажем это. Если $a = p^{\alpha}k + 1$, где k не делится на p, то

$$a^p = \left(p^{\alpha}k + 1\right)^p = 1 + p^{\alpha+1}k + p \cdot \frac{p-1}{2} \cdot p^{2\alpha}k^2 + \ldots =$$

$$= 1 + p^{\alpha+1}k + p^{\alpha+2}d,$$

где d целое. Отсюда $a^p - 1 = p^{\alpha+1}(k + pd)$. Поскольку k не делится на p, то очевидно, что b делится на p и не делится на p^2. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $a \geq 2$, p – нечетное простое число и выполнено хотя бы одно из неравенств $a \neq 2$ и $p \neq 3$. Тогда $a^p + 1$ имеет простой делитель, не являющийся делителем числа $a + 1$.*

Доказательство. Рассмотрим разложение

$$a^p + 1 = (a+1)\left(a^{p-1} - a^{p-2} + \ldots + a^2 - a + 1\right) = (a+1)b.$$

Докажем вначале, что числа $a + 1$ и b не могут иметь общего делителя r, отличного от 1 и от p. Действительно, если $a + 1$ делится на r, то и $a + 1$ делится на r при любом нечетном k; если же $k = 2m$, то $a^k - 1$ делится на $a^2 - 1$, которое, в свою очередь, делится на r. Значит, $b = rl + p$, где l – некоторое целое число. Поэтому b делится на r лишь при $r = 1$ или p. Таким образом, для завершения доказательства леммы осталось рассмотреть случай $b = p^n$ и $a + 1$ делится на p. Докажем, что этот случай невозможен. Докажем вначале, что, как и в доказательстве леммы 1, $b > p$. Имеем $b \geq a^2 - a + 1 \geq \geq a + 1 \geq p$. Из условий леммы следует, что среди неравенств этой цепочки есть строгие. С другой стороны, как и в доказательстве леммы 1, можно получить, что число b не делится на p^2, что и завершает доказательство леммы.

Из доказанных лемм следует, что правая часть равенства $u^y \pm 1 = 2^{\alpha y - 2}v^y$ имеет не менее $q + 1$ различных простых делителей. Поскольку $\text{НОД}(u, 2v) = 1$, $u > 1$, получаем отсюда неравенство задачи.

Замечание. Фактически мы доказали следующее, более сильное, чем утверждение задачи, предложение.

Предложение. Пусть число y разлагается в произведение n отличных от 1 натуральных чисел. Тогда x имеет не менее $n + 2$ различных простых делителей.

Значительное усиление результата задачи можно будет найти в "Кванте" №1 за 2006 год.

5. Не существует.

Возьмем произвольно $x_1 \neq 0$ и положим $y_1 = \dfrac{1}{x_1}$. Тогда

$$f^2(x_1 + y_1) \geq f^2(x_1) + 2f(1) + f^2(y_1) \geq f^2(x_1) + a,$$

где $a = 2f(1) > 0$. Будем далее выбирать $x_n = x_{n-1} + y_{n-1}$, $y_n = \dfrac{1}{x_n}$, $n \geq 2$. Тогда

$$f^2(x_n + y_n) \geq f^2(x_n) + a = f^2(x_{n-1} + y_{n-1}) + a \geq$$

$$\geq f^2(x_{n-1}) + 2a \geq \ldots \geq f^2(x_1) + na.$$

Ясно, что последовательность $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)\ldots$ неограничена.

6. Нельзя.

Предположим, что это возможно. Заметим, что два из рассматриваемых параллелепипедов пересекаются тогда и только тогда, когда их проекции на все три оси координат пересекаются.

Рассмотрим 4 пары параллелепипедов: P_1 и P_2, P_4 и P_5, P_7 и P_8, P_{10} и P_{11}. Если взять параллелепипеды из разных пар, то они пересекаются, значит, их проекции на любую ось пересекаются. Паре параллелепипедов из одной пары поставим в соответствие ось координат (одну из осей, если таковых несколько), на которую проекции этих параллелепипедов не пересекаются. Поскольку пар 4, а осей 3, найдутся две пары (скажем, P_1 и P_2, P_4 и P_5), которым сопоставлена одна и та же ось Ox.

Пусть отрезки S_1, S_2, S_4, S_5 – проекции P_1, P_2, P_4, P_5 соответственно на ось Ox (пусть A_i – левые концы отрезков S_i, а B_i – правые). Известно, что отрезки в парах S_1 и S_2, S_4 и S_5 не пересекаются, а в любых других парах – пересекаются. Не ограничивая общности, можем считать, что $A_1 < B_1 < A_2 < B_2$ и $A_4 < B_4 < A_5 < B_5$. Так как S_1 пересекается с S_5, то $A_5 < B_1$. Но тогда $B_4 < A_2$, и отрезки S_2 и S_4 не пересекаются. Противоречие.

Замечание. Ответ в соответствующей задаче для 10 параллелепипедов также отрицательный, а для 9 параллелепипедов – положительный.

7. Пусть X и Y – середины AB и CD соответственно (рис.9), AB и CD пересекаются в точке P (пусть, для определенности, P – точка пересечения лучей AB и DC). Предположим, что O – точка пересечения средних линий четырехугольника $ABCD$. Тогда O – середина отрезка XY, так как середины сторон четырехугольника – вершины параллелограмма. Далее, PO – биссектриса и медиана в треугольнике XPY, поэтому он равнобедренный и

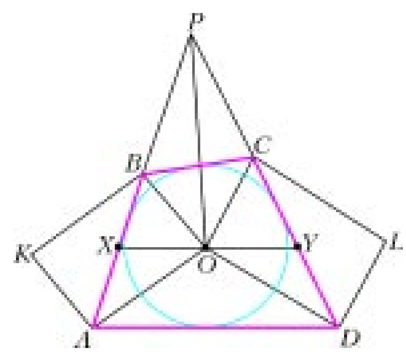

Рис. 9

$$\angle XBO + \angle YCO = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle BCD) = \frac{1}{2}(180° - \angle BPC) =$$

$$= \angle PXY = \angle XBO + \angle XOB,$$

поэтому $\angle YCO = \angle XOB$, и треугольники OXB и CYO подобны. Следовательно, $\dfrac{OB}{OC} = \dfrac{XB}{YO}$. Аналогично, $\dfrac{OA}{OD} = \dfrac{XA}{YO} = \dfrac{XB}{YO}$, откуда следует $OA \cdot OC = OB \cdot OD$.

Пусть теперь $OA \cdot OC = OB \cdot OD$. Заметим, что

$$\angle AOB + \angle COD =$$

$$= (180° - \angle OAB - \angle OBA) + (180° - \angle OCD - \angle ODC) =$$

$$= 360° - \frac{1}{2}(\angle DAB + \angle ABC + \angle BCD + \angle CDA) = 180°.$$

Поэтому, если достроить треугольники OAB и OCD до параллелограммов $OAKB$ и $OCLD$, то эти параллелограммы будут подобны (поскольку $\dfrac{OA}{AK} = \dfrac{OA}{OB} = \dfrac{DO}{OC}$). Тогда треугольники OXB и CYO также подобны, поскольку они соответствуют друг другу при подобии параллелограммов. Отсюда

$$\angle XOB = \angle OCY = \angle OCB \text{ и } \angle COY = \angle XBO = \angle OBC.$$

Следовательно,

$$\angle XOB + \angle BOC + \angle COY = \angle OCB + \angle BOC + \angle OBC = 180°,$$

т.е. точка O лежит на прямой XY. Аналогично, O лежит на прямой, соединяющей середины двух других сторон четырехугольника, что и требовалось.

XXXIX Всероссийская олимпиада школьников по физике

Теоретический тур

9 класс

1. $k_1 = k_2$, $\dfrac{k_3}{k_1} = \dfrac{L_2 - L_1}{(L_2 - l)/\sqrt{2} - (L_1 - l)} \approx 1{,}78$;

$l_1 = l_2 = L_1 - \dfrac{k_3}{k_1}(L_1 - l) \approx 11{,}1$ см.

2. $\tau = \sqrt{2s/a}$; $\bar{v}_{\max} = \left(2 - \sqrt{2}\right)\sqrt{as}$, $l = 2\left(\sqrt{2} - 1\right)s \approx 0{,}83s$.

3. Возможны две схемы «черного ящика». Для первой из них (рис.10) $R = 6$ Ом, $R_{14} = 2{,}4$ Ом, $R_{34} = 3{,}6$ Ом. Для вто-

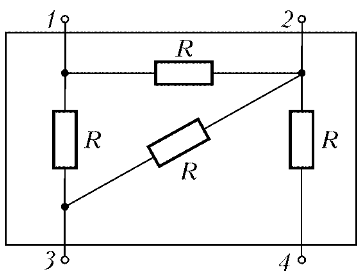

Рис. 10

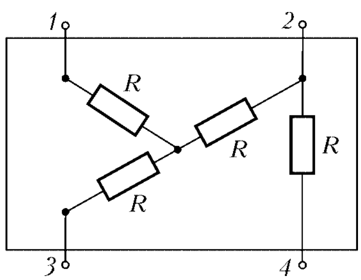

Рис. 11

рой (рис.11) $R = 2$ Ом, $R_{14} = \dfrac{4}{3}$ Ом, $R_{34} = \dfrac{10}{3}$ Ом.

4. $c = (0{,}13 \pm 0{,}01) \cdot 10^3$ Дж/(кг · °С).

10 класс

1. $\dfrac{M_1}{M_2} = \dfrac{(l_1 + l_2)^3 - l_2^3}{(l_1 + l_2)^3 - l_1^3}\dfrac{l_1^2}{l_2^2}$; можно показать, что рассмотренная орбита является неустойчивой, поэтому потребуется небольшой дополнительный расход топлива на ее регулярную корректировку.

2. $T = \left(\dfrac{28}{25}\right)^4 T_0 \approx 472$ К.

3. $C_1 = R\left(\dfrac{3}{2}\nu_1 + \dfrac{5}{2}\nu_2\right)$; $C_2 = R\left(\dfrac{5}{2}\nu_1 + \dfrac{7}{2}\nu_2\right)$;

$C_3 = R\left(\dfrac{5}{2}\nu_1 + \dfrac{5}{2}\nu_2\right)$.

4. $U = \dfrac{\mathcal{E}}{2}$; $I = \dfrac{\mathcal{E}}{2R}$; $\dfrac{P_1}{P_2} = 3$.

5. Да, произойдет.

11 класс

1. $\tau = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{L}{R}\sqrt{\dfrac{L}{2g}} \approx 4{,}19 \cdot 10^5$ с $\approx 4{,}85$ сут.;

$v = \sqrt{2gR\left(1 - \dfrac{R}{L}\right)} \approx \sqrt{2gR} \approx 11{,}2$ км/с.

2. $n = \dfrac{\ln 2}{\ln(99/98)} \approx 68$.

3. $\Delta T = T_{\text{ид}} - T_{\text{К}} \approx \dfrac{p_0 b}{2R} \approx 4{,}0$ К.

4. Да, перейдет; $t_0 = -\dfrac{\mu_0 S N^2}{lr}\ln\left(1 - \dfrac{B_0 lr}{\mu_0 N\mathcal{E}}\right) \approx 18$ мс.

5. $v_1 = \sqrt{\dfrac{2E_{k\,\max}}{m}} = \sqrt{\dfrac{2hc}{m}\left(\dfrac{1}{\lambda} - \dfrac{1}{\lambda_0}\right)} \approx 4{,}37 \cdot 10^5$ м/с;

$v_2 = \sqrt{\dfrac{2E_{k\,\max} + e\varphi_0}{m}} = 6{,}05 \cdot 10^5$ м/с;

$\varphi_1 = -\dfrac{E_{k\,\max}}{e} = 0{,}54$ В;

$N = \dfrac{4\pi\varepsilon_0}{-e}R(\varphi_1 - \varphi_0) \approx 7{,}2 \cdot 10^6$.

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Редакция журнала «Квант»
kvant.info
Московский центр непрерывного математического образования
kvant. mccme.ru
Московский детский клуб «Компьютер»
math.child.ru
Костромской центр дополнительного образования «Эврика»
ceemat.ru

Журнал Квант ©

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

А.А.Егоров, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

В.Н.Власов, Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, Е.А.Силина

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»;
тел.: 930-56-48;
e-mail: admin@kvant.info, math@kvant.info, phys@kvant.info

Диапозитивы изготовлены ООО «Европолиграфик»
Заказ №
Отпечатано на ГУ РПП, г. Ржев, ул. Урицкого, 91

При участии ЗАО «РИЦ «Техносфера», тел.: (095) 234-01-10