XXXI Всероссийская олимпиада школьников по математике

Федеральный окружной (IV) этап Всероссийской олимпиады школьников по математике проходил с 22 по 27 марта 2005 года в городах Псков (Северо-Западный федеральный округ), Тверь (Центральный), Майкоп (Южный), Уфа (Приволжский), Новосибирск (Сибирский и Уральский), Хабаровск (Дальневосточный).

Заключительный (V) этап олимпиады проходил с 23 по 29 апреля в Нижнем Новгороде на базе удобного для проведения творческих соревнований лицея – Центра одаренных школьников. В соревнованиях приняли участие победители и призеры IV этапа – представители 38 субъектов Российской Федерации, команды Москвы, Санкт-Петербурга, а также не в первый раз приезжающие к нам в гости команды Болгарии и Китая, всего 199 школьников.

Несмотря на высокую сложность заданий финала, каждая задача была решена хотя бы одним участником. Спецприз за решение самой трудной задачи олимпиады (задачи 8 для 11 класса) получил Василий Астахов из Саратова. Как обычно, многие школьники продемонстрировали свой высокий уровень, придумывая красивые решения, порой не известные до начала олимпиады членам жюри. Спецпризами за оригинальные решения и решения трудных задач олимпиады были награждены Авксентьев Евгений из Ростова-на-Дону, Митрофанов Иван из Коломны, Воробьев Сергей из Кирова, Ильин Антон из Уфы и Зубанов Константин из Луги. Традиционный приз «За волю к победе» был вручен Марине Козачок из Долгопрудного, неудачно выступившей в первый день, но единственной из всех десятиклассников решившей все задачи второго дня. Приз самого юного участника достался Виктору Омельяненко из Белгорода (его 11-летие пришлось на дни олимпиады), который завоевал право участвовать в финале своим успешным выступлением за 9 класс на IV этапе.

Следует сказать слова большой благодарности оргкомитетам всех олимпиад IV и V этапов за хорошую организацию и гостеприимство.

Приводим условия задач окружного и заключительного этапов, а также список призеров Всероссийской олимпиады по математике.

Окружной этап

8 класс

1. В 12 часов дня «Запорожец» и «Москич» находились на расстоянии 90 км и начали двигаться навстречу друг другу с постоянной скоростью. Через два часа они снова оказались на расстоянии 90 км. Незнайка утверждает, что «Запорожец» до встречи с «Москвичом» и «Москвич» после встречи с «Запорожцем» проехали в сумме 60 км. Докажите, что он не прав.

Е.Куликов

2. В средней клетке полоски 1×2005 стоит фишка. Два игрока по очереди сдвигают ее: сначала первый игрок передвигает фишку на одну клетку в любую сторону, затем второй передвигает ее на 2 клетки, 1-й – на 4 клетки, 2-й – на 8 и т.д. (k-й сдвиг происходит на 2^{k-1} клеток). Тот, кто не может сделать очередной ход, проигрывает. Кто может выиграть независимо от игры соперника?

О.Подлипский

3. Даны 19 карточек. Можно ли на каждой из карточек написать ненулевую цифру так, чтобы из этих карточек можно было сложить ровно одно 19-значное число, делящееся на 11?

Р.Женодаров, И.Богданов

4. Дан остроугольный треугольник ABC. Точки B' и C' симметричны, соответственно, вершинам B и C относительно прямых AC и AB. Пусть P – точка пересечения описанных окружностей треугольников ABB' и ACC', отличная от A. Докажите, что центр описанной окружности треугольника ABC лежит на прямой PA.

В.Филимонов

5. Известно, что сумма цифр натурального числа N равна 100, а сумма цифр числа $5N$ равна 50. Докажите, что N четно.

И.Богданов

6. В четырехугольнике $ABCD$ углы A и C равны. Биссектриса угла B пересекает прямую AD в точке P. Перпендикуляр к BP, проходящий через точку A, пересекает прямую BC в точке Q. Докажите, что прямые PQ и CD параллельны.

А.Акопян

7. Найдите все такие пары (x, y) натуральных чисел, что $x + y = a^n$, $x^2 + y^2 = a^m$ для некоторых натуральных a, n, m.

В.Сендеров

8. В 99 ящиках лежат яблоки и апельсины. Докажите, что можно так выбрать 50 ящиков, что в них окажется не менее половины всех яблок и не менее половины всех апельсинов.

И.Богданов, Г.Челноков

9 класс

1. В коммерческом турнире по футболу участвовало пять команд. Каждая должна была сыграть с каждой ровно один матч. В связи с финансовыми трудностями организаторы некоторые игры отменили. В итоге оказалось, что все команды набрали различное число очков и ни одна команда в графе набранных очков не имеет нуля. Какое наименьшее число игр могло быть сыграно в турнире, если за победу начислялось три очка, за ничью – одно, за поражение – ноль?

Р.Женодаров, А.Храбров

2. См. задачу 3 для 8 класса.

3. Двое игроков по очереди расставляют в каждой из 24 клеток поверхности куба $2\times 2\times 2$ числа 1, 2, 3, …, 24 (каждое число можно ставить один раз). Второй игрок хочет, чтобы суммы чисел в клетках каждого кольца из 8 клеток, опоясывающего куб, были одинаковыми. Сможет ли первый игрок ему помешать?

Л.Емельянов

4. См. задачу М1973 «Задачника «Кванта».

5. См. задачу 5 для 8 класса.

6. См. задачу М1968,а «Задачника «Кванта».

7. Существует ли такая бесконечная возрастающая арифметическая прогрессия $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ из натуральных чисел, что произведение $a_n\cdot\ldots\cdot a_{n+9}$ делится на сумму $a_n+\ldots+a_{n+9}$ при любом натуральном n?

В.Сендеров

8. В 100 ящиках лежат яблоки и апельсины. Докажите, что можно так выбрать 34 ящика, что в них окажется не менее трети всех яблок и не менее трети всех апельсинов.

И.Богданов, Г.Челноков

10 класс

1. Косинусы углов одного треугольника соответственно равны синусам углов другого треугольника. Найдите наибольший из шести углов этих треугольников.

Н.Агаханов

2. Докажите, что для любого $x>0$ и натурального n выполнено неравенство

$$1+x^{n+1}\ge\frac{(2x)^n}{(1+x)^{n-1}}.$$

А.Храбров

3. См. задачу 4 для 9 класса.

4. Даны $N\ge 3$ точек, занумерованных числами 1, 2, ..., N. Каждые две точки соединены стрелкой от меньшего к большему. Раскраску всех стрелок в красный и синий цвета назовем *однотонной*, если нет двух таких точек A и B, что от A до B можно добраться и только по красным стрелкам, и только по синим. Найдите количество однотонных раскрасок.

И.Богданов, Г.Челноков

5. Арифметическая прогрессия $a_1,a_2,\ldots$, состоящая из натуральных чисел, такова, что при любом n произведение $a_n\,a_{n+31}$ делится на 2005. Можно ли утверждать, что все члены прогрессии делятся на 2005?

В.Сендеров

6. См. задачу 6 для 9 класса.

7. Найдите все пары (a,b) натуральных чисел такие, что при любом натуральном n число a^n+b^n является точной $(n+1)$-й степенью.

В.Сендеров

8. На клетчатой бумаге нарисован прямоугольник, стороны которого образуют углы в 45° с линиями сетки, а вершины не лежат на линиях сетки. Может ли каждую сторону прямоугольника пересекать нечетное число линий сетки?

С.Волчёнков

11 класс

1. Найдите все пары чисел $x,y\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, удовлетворяющие равенству $\sin x+\sin y=\sin(xy)$.

И.Богданов

2. Известно, что существует число S такое, что если $a+b+c+d=S$ и $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=S$ (a, b, c, d отличны от нуля и единицы), то $\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c}+\frac{1}{1-d}=S$. Найдите S.

Р.Женодаров

3. См. задачу 4 для 10 класса.

4. Пусть AA_1 и BB_1 – высоты остроугольного неравнобедренного треугольника ABC. Известно, что отрезок A_1B_1 пересекает среднюю линию, параллельную AB, в точке C'. Докажите, что отрезок CC' перпендикулярен прямой, проходящей через точку пересечения высот и центр описанной окружности треугольника ABC.

Л.Емельянов

5. Докажите, что для любого многочлена P с целыми коэффициентами и любого натурального k существует такое натуральное n, что $P(1)+P(2)+\ldots+P(n)$ делится на k.

А.Голованов

6. См. задачу М1968,б «Задачника «Кванта».

7. Каких точных квадратов, не превосходящих 10^{20}, больше: тех, у которых семнадцатая с конца цифра – 7, или тех, у которых семнадцатая с конца цифра – 8?

А.Голованов

8. В 100 ящиках лежат яблоки, апельсины и бананы. Докажите, что можно так выбрать 51 ящик, что в них окажется не менее половины всех яблок, не менее половины всех апельсинов и не менее половины всех бананов.

И.Богданов, Г.Челноков, Е.Куликов

Заключительный этап

9 класс

1. Дан параллелограмм $ABCD$ $(AB<BC)$. Докажите, что окружности, описанные около треугольников APQ, для всевозможных точек P и Q, выбранных на сторонах BC и CD соответственно так, что $CP=CQ$, имеют общую точку, отличную от A.

Т.Емельянова

2. Леша поставил в клетки таблицы 22×22 натуральные числа от 1 до 22^2. Верно ли, что Олег может выбрать такие две клетки, соседние по стороне или вершине, что сумма чисел, стоящих в клетках, делится на 4?

О.Подлипский

3. Сумма чисел a_1,a_2,a_3, каждое из которых больше единицы, равна S, причем $\frac{a_i^2}{a_i-1}>S$ для любого $i=1,2,3$. Докажите, что

$$\frac{1}{a_1+a_2}+\frac{1}{a_2+a_3}+\frac{1}{a_3+a_1}>1.$$

С.Берлов

4. На столе лежат 365 карточек, на обратной стороне которых написаны различные числа. За один рубль Вася может выбрать три карточки и попросить Петю положить их слева направо так, чтобы числа на карточках располагались в порядке возрастания. Может ли Вася, потратив 2000 рублей, с гарантией выложить все 365 карточек на стол слева направо так, чтобы числа на них располагались в порядке возрастания?

М.Гарбер

5. Десять попарно различных ненулевых чисел таковы, что для любых из них либо сумма этих чисел, либо их произведение – рациональное число. Докажите, что квадраты всех чисел рациональны.

О.Подлипский

6. Сколькими способами числа $2^0,2^1,2^2,\ldots,2^{2005}$ можно разбить на два непустых множества A и B так, чтобы уравнение $x^2-S(A)x+S(B)=0$, где $S(M)$ – сумма чисел множества M, имело целый корень?

Н.Агаханов, И.Богданов

7. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA' и BB'. На дуге ACB описанной окружности треугольника ABC выбрана точка D. Пусть прямые AA' и BD пересекаются в точке P, а прямые BB' и AD пересекаются в точке Q. Докажите, что прямая $A'B'$ проходит через середину отрезка PQ.

А.Акопян

8. См. задачу М1975,а «Задачника «Кванта».

10 класс

1. Найдите наименьшее натуральное число, не представимое в виде $\dfrac{2^a-2^b}{2^c-2^d}$, где a, b, c, d – натуральные числа.

В.Сендеров

2. См. задачу М1971 «Задачника «Кванта».
3. См. задачу М1969 «Задачника «Кванта».
4. Окружности ω_B, ω_C – вневписанные для треугольника ABC (т.е. ω_B и ω_C касаются, соответственно, сторон AC и AB и продолжений двух других сторон). Окружность ω'_B симметрична ω_B относительно середины стороны AC, окружность ω'_C симметрична ω_C относительно середины стороны AB. Докажите, что прямая, проходящая через точки пересечения окружностей ω'_B и ω'_C, делит периметр треугольника ABC пополам.

П.Кожевников

5. В некоторые 16 клеток доски 8×8 поставили по ладье. Какое наименьшее количество пар бьющих друг друга ладей могло при этом оказаться?

Е.Куликов

6. См. задачу 7 для 9 класса.
7. Натуральные числа x и y таковы, что $2x^2-1=y^{15}$. Докажите, что если $x>1$, то x делится на 5.

В.Сендеров

8. См. задачу М1974 «Задачника «Кванта».

11 класс

1. Какое наибольшее конечное число корней может иметь уравнение

$$|x-a_1|+\ldots+|x-a_{50}|=|x-b_1|+\ldots+|x-b_{50}|,$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_{50}$, $b_1, b_2, \ldots, b_{50}$ – различные числа?

И.Рубанов

2. См. задачу 3 для 10 класса.
3. Пусть A', B' и C' – точки касания вневписанных окружностей с соответствующими сторонами треугольника ABC. Описанные окружности треугольников $A'B'C$, $AB'C'$ и $A'BC'$ пересекают второй раз описанную окружность треугольника ABC в точках C_1, A_1 и B_1 соответственно. Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику, образованному точками касания вписанной окружности треугольника ABC с его сторонами.

Л.Емельянов

4. Натуральные числа x, y, z ($x>2$, $y>1$) таковы, что $x^y+1=z^2$. Обозначим через p количество различных простых делителей числа x, через q – количество различных простых делителей числа y. Докажите, что $p\ge q+2$.

В.Сендеров

5. Существует ли ограниченная функция $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ такая, что $f(1)>0$ и $f(x)$ удовлетворяет при всех $x, y\in\boldsymbol{R}$ неравенству

$$f^2(x+y)\ge f^2(x)+2f(xy)+f^2(y)?$$

Н.Агаханов

6. Можно ли расположить в пространстве 12 прямоугольных параллелепипедов $P_1, P_2, \ldots, P_{12}$, ребра которых параллельны координатным осям Ox, Oy, Oz, так, чтобы P_2 пересекался (т.е. имел хотя бы одну общую точку) с каждым из оставшихся, кроме P_1 и P_3, P_3 пересекался с каждым из оставшихся, кроме P_2 и P_4, и т.д., P_{12} пересекался с каждым из оставшихся, кроме P_{11} и P_1, P_1 пересекался с каждым из оставшихся, кроме P_{12} и P_2? (Поверхность параллелепипеда принадлежит ему.)

А.Акопян

7. Четырехугольник $ABCD$ с попарно непараллельными сторонами описан около окружности с центром O. Докажите, что точка O совпадает с точкой пересечения средних линий четырехугольника $ABCD$ тогда и только тогда, когда $OA\cdot OC=OB\cdot OD$.

А.Заславский, М.Исаев, Д.Цветов

8. См. задачу М1975,б «Задачника «Кванта».

Призеры олимпиады

Дипломы I степени

по 9 классам получили

Ардинарцев Никита – Санкт-Петербург, ФМЛ 239, 8 кл.,
Сафин Станислав – Краснодар, лицей ИСТЭК;

по 10 классам –

Еремин Алексей – Краснодар, школа 47;

по 11 классам –

Трепалин Андрей – Долгопрудный, ФМШ 5,
Астахов Василий – Саратов, ФТЛ 1,
Белоусов Кирилл – Челябинск, ФМЛ 31,
Магазинов Александр – Ярославль, школа 33 им.К.Маркса.

Дипломы II степени

по 9 классам получили

Горинов Евгений – Киров, ФМЛ, 8 кл.,
Кевер Михаил – Санкт-Петербург, ФМЛ 239, 8 кл.,
Волков Владислав – Санкт-Петербург, ФМЛ 239, 8 кл.,
Есин Алексей – ст.Старонижестеблиевская Краснодарского кр., школа 55,
Илюхина Мария – Москва, лицей «Вторая школа»,
Лысов Михаил – Москва, лицей «Вторая школа»,
Митрофанов Иван – Коломна, гимназия 2,
Киселев Павел – Раменское, Раменская гимназия,
Стебелев Максим – Барнаул, лицей «Грани»,
Шмаров Владимир – Саров, лицей 15,
Лишанский Андрей – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Сидоров Александр – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ»,
Ярушин Дмитрий – Челябинск, ФМЛ 31,
Остроумова Людмила – Ярославль, школа 33 им.К.Маркса,

по 10 классам –

Трифонов Иван – Ангарск, школа 10,
Дружинин Андрей – Иркутск, лицей 2,
Пантелеев Леонид – Киров, КЭПЛ,
Девятов Ростислав – Москва, лицей «Вторая школа»,

Климовский Арсений – Москва, СУНЦ МГУ,
Пономарева Елизавета – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа,
Козачок Марина – Долгопрудный, ФМШ 5,
Баранов Дмитрий – Жуковский, гимназия 1,
Матвеев Константин – Омск, лицей 66,
Дремов Виктор – Волгодонск, школа 24,
Глазман Александр – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Образцов Тимофей – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Столяров Дмитрий – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Ситников Александр – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Сахипов Рамиль – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Катышев Алексей – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Пикалов Павел – Екатеринбург, гимназия 9,
Красильников Александр – Ульяновск, гимназия 79,
Смотров Дмитрий – Челябинск, ФМЛ 31,
Иванов Григорий – Ярославль, лицей 2;

по 11 классам –

Ефимов Александр – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа,
Гаврилюк Андрей – Долгопрудный, ФМШ 5,
Калинин Никита – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Булиткин Даниил – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Подхалюзин Александр – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Козлов Павел – Ярославль, гимназия им.А.Л.Кекина.

Дипломы III степени

по 9 классам получили

Урбанович Тимофей – Иркутск, лицей 2,
Чувашов Сергей – Киров, ФМЛ,
Рогожников Алексей – Москва, Химический лицей 1303,
Махлин Игорь – Москва, гимназия 1543,
Лурье Денис – Жуковский, гимназия 1,
Борискин Павел – Саров, лицей 3,
Баранов Эдуард – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Логунов Александр – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Новикова Наталья – Ижевск, ИЕГЛ «школа-30»;

по 10 классам –

Тхоржевский Никита – Череповец, школа 34,
Хохуля Никита – Краснодар, лицей ИСТЭК,
Корнаков Илья – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа,
Белов Борис – Раменское, гимназия 2,
Музычка Степан – Черноголовка, школа 8,
Калинина Елена – Саров, лицей 3,
Рябченко Александр – Новосибирск, СУНЦ НГУ,
Хапланов Арсений – Ростов-на-Дону, ФМЛ 33,
Затицкий Павел – Санкт-Петербург, ФМЛ 239;

по 11 классам –

Шевяков Вадим – Сухиничи, школа 1,
Прохоренко Егор – Краснодар, гимназия 36,
Родионов Игорь – Фрязино, школа 1,
Кузьменко Юрий – Долгопрудный, ФМШ 5,
Севенюк Михаил – Нижний Новгород, школа 85,
Нетай Игорь – Ростов-на-Дону, школа 103,
Ананьевский Алексей – Санкт-Петербург, Аничков лицей,
Шмаков Кирилл – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Гимадеев Ренат – Казань, ФМЛ 131,
Тропин Николай – Магнитогорск, школа 65,
Ботов Михаил – Ярославль, школа 33 им.К.Маркса.

Публикацию подготовили
Н.Агаханов, П.Кожевников, Д.Терёшин

XXXIX Всероссийская олимпиада школьников по физике

В этом году заключительный этап очередной Всероссийской физической олимпиады школьников прошел в Мордовии, в городе Ковылкино, что находится в 100 километрах от столицы республики.

В олимпиаде приняли участие 174 школьника 9–11 классов в составе команд от федеральных округов России и городов Москвы и Санкт-Петербурга.

Ниже приводятся условия задач теоретического и экспериментального туров заключительного этапа и список призеров олимпиады.

Теоретический тур

9 класс

Задача 1. Три резиновых шнура

Три резиновых шнура связывают вместе и медленно растягивают в разные стороны (рис.1). В некоторый момент длины всех трех шнуров оказываются одинаковыми и равными $L_1 = 20$ см. Затем шнуры растягивают под другими углами (рис.2). В этом случае равенство длин шнуров наступает при длине $L_2 = 30$ см каждого их них. Известна начальная длина самого длинного шнура в недеформированном состоянии: $l = 15$ см. Найдите длины двух других шнуров и отношение жесткостей шнуров. Считайте, что резиновые шнуры подчиняются закону Гука.

И.Иоголевич

Задача 2. Средняя скорость поезда

Поезд метро проходит расстояние s между станциями, разгоняясь с ускорением a до середины перегона и тормозя

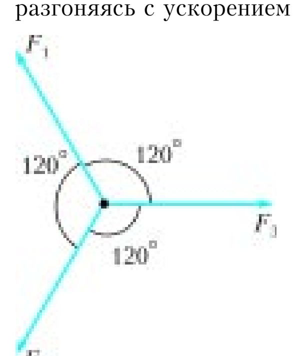

Рис. 1

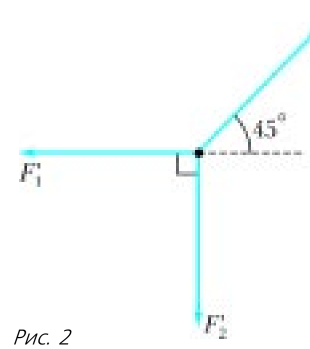

Рис. 2