Ф2027. Дно очень узкого и глубокого колодца квадратного сечения освещают подвешенной на уровне земли маленькой лампочкой, равноудаленной от его стенок. Стенки колодца зеркальные, но покрыты тонким ровным слоем пыли, так что отражается только 98% энергии падающего света. Во сколько раз темнее станет в центре дна колодца, когда пыли со временем станет в 2 раза больше?

Е.Антышев

Решения задач М1991 – М1995, Ф2003 – Ф2012

М1991. *Имеется 6 монет, одна из которых фальшивая (она отличается по весу от настоящей, но ее вес, как и вес настоящей монеты, неизвестен). Как за 3 взвешивания с помощью весов, показывающих общий вес взвешиваемых монет, найти фальшивую монету?*

Приведем один из возможных алгоритмов.

Обозначим веса монет a, b, c, d, e, f. Первыми двумя взвешиваниями взвесим $X = a + b$ и $Y = c + d$.

Если $X = Y$, то фальшивая монета e или f. Взвешиваем e. Если $e = X/2$, то f – фальшивая, иначе – фальшивая e.

Если $X > Y$, то e и f настоящие. Взвешиваем $Z = a + c + e$. Если a фальшивая, то должно быть $Z = a + b + c = (a+b) + \frac{c+d}{2} = X + \frac{Y}{2}$; если b фальшивая, то $Z = 3c = \frac{3Y}{2}$; если c фальшивая, то $Z = a + c + d = \frac{a+b}{2} + (c+d) = \frac{X}{2} + Y$; если d фальшивая, то $Z = 3a = \frac{3X}{2}$.

Так как $\frac{3X}{2} > X + \frac{Y}{2} > \frac{X}{2} + Y > \frac{3Y}{2}$, то для Z выполнено ровно одно из равенств $Z = X + \frac{Y}{2}$, $Z = \frac{3Y}{2}$, $Z = \frac{X}{2} + Y$, $Z = \frac{3X}{2}$. По этому равенству однозначно находим фальшивую монету.

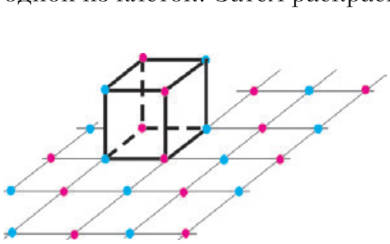
Случай $X < Y$ аналогичен рассмотренному.

М.Малкин

М1992. *На плоскости лежал куб. Его перекатили несколько раз через ребра так, что куб снова оказался на исходном месте той же гранью вверх. Могла ли при этом верхняя грань повернуться на 90° градусов относительно своего начального положения?*

Ответ: нет.

Раскрасим вершины куба в красный и синий цвета так, чтобы соседние вершины имели разные цвета. Разобьем плоскость на клетки так, чтобы грань куба была одной из клеток. Затем раскрасим все вершины клеток в шахматном порядке – так, чтобы вершины куба стояли на точках плоскости тех же цветов (см. рисунок). Тогда при любом перекатывании куба вершины его нижней грани



будут совмещаться с точками тех же цветов. Однако если бы верхняя (а значит, и нижняя) грань повернулась на 90°, то красные точки совместились бы с синими – противоречие.

И.Богданов

М1993. *Пусть H – точка пересечения высот треугольника ABC, а X – произвольная точка, не лежащая на прямых AH, BH, CH. Окружность с диаметром XH вторично пересекает прямые AH, BH, CH в точках A_1, B_1, C_1, а прямые AX, BX, CX – в точках A_2, B_2, C_2 соответственно. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке (или параллельны).*

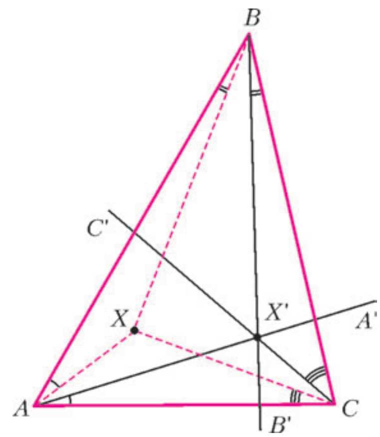


Рис. 1

Воспользуемся следующим фактом: если отразить прямые AX, BX, CX симметрично относительно биссектрис углов A, B, C соответственно, то полученные прямые AA', BB', CC' пересекутся в одной точке X' или будут параллельны (рис.1). (Это следует, например, из теоремы Чевы, записанной в синусах; точки X и X' называются *изогонально сопряженными.*)

Рассмотрим вначале случай, когда точки расположены на окружности в порядке $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ (рис. 2). (Доказательство для любого расположения точек получается, если равенства углов заменить на равенства ориентированных углов, т.е. углов, отсчитываемых от прямой до прямой против часовой стрелки.)

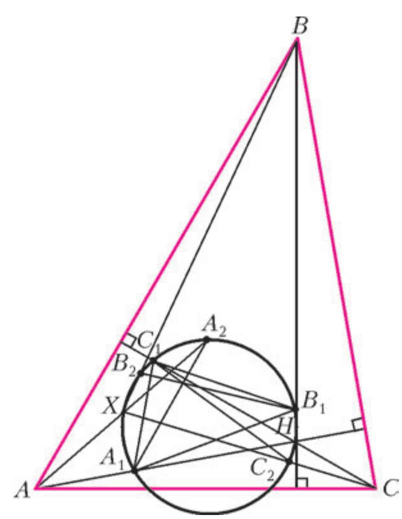


Рис. 2

Из перпендикулярностей $HA_1 \perp BC$ и $HC_1 \perp AB$ и свойства вписанных углов вытекает, что $\angle CBA = \angle A_1HC_1 = \angle A_1B_1C_1$. Аналогично, $\angle BAC = \angle C_1A_1B_1$. Значит, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны (и противоположно ориентированы).

Поскольку XH – диаметр, то $HB_2 \perp XB_2$; отсюда $\angle B'BA = \angle CBX = \angle A_1HB_2 = \angle A_1B_1B_2$. Полученное равенство углов означает, что при преобразовании подобия, переводящем треугольник ABC в треугольник $A_1B_1C_1$, прямая BB' перейдет в прямую B_1B_2. Аналогичное утверждение справедливо и для прямых

A_1A_2 и C_1C_2. Так как прямые AA', BB' и CC' пересекаются в одной точке или параллельны, то прямые A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 также пересекаются в одной точке или параллельны.

А.Заславский, П.Кожевников

М1994. *а) В мешке изюма содержится 2001 изюминка общим весом 1001 г, причем ни одна изюминка не весит больше 1,001 г. Докажите, что весь изюм можно разложить на две чаши весов так, чтобы весы показали разность, не превосходящую 1 г.*
б) В мешке изюма содержится 2001 изюминка общим весом 1001 г, причем ни одна изюминка не весит больше $(1 + x)$ г. При каком наибольшем значении x заведомо можно разложить весь изюм на две чаши весов так, чтобы весы показали разность, не превосходящую 1 г?

Из пункта б) вытекает пункт а), поэтому достаточно решить б).
б) **Ответ**: при $x = 0{,}002$ г.
Пусть $x > 0{,}002$ г. Обозначим через ε меньшее из чисел x и 0,002001. Пусть в мешке 999 изюминок весом $(1+\varepsilon)$ г – назовем эти изюминки *большими*, а оставшийся вес распределен между остальными изюминками произвольным образом (суммарный вес больших изюминок не больше чем $1{,}002001 \cdot 999 < 1001$). Тогда при любом распределении изюма по чашкам на одной из них будет хотя бы 500 больших изюминок с суммарным весом $500(1+\varepsilon)\,\text{г} > 500 \cdot 1{,}002\,\text{г} = 501\,\text{г}$. Тогда на другой чаше вес будет меньше чем 1001 г – 501 г = = 500 г, и разность весов будет больше 1 г.
Теперь достаточно доказать, что при $x = 0{,}002$ г требуемое распределение весов возможно. Назовем изюминку *весомой*, если она весит больше 1 г. Остальные изюминки назовем *невесомыми*. Возможны два случая.
1) Количество весомых изюминок n четно: $n = 2k$. Тогда $k \le 500$, иначе общий вес был бы не меньше 1002 г. В этом случае разложим их на чашки так, чтобы на каждой чашке лежало по k весомых изюминок. Тогда вес изюма на каждой чашке будет не меньше k г и не больше $1{,}002k\,\text{г} = (k + 0{,}002k)\,\text{г} \le (k+1)\,\text{г}$. Таким образом, разница весов на чашках на данный момент не больше 1 г.
Будем брать по очереди каждую из остальных изюминок и класть ее на чашку, вес которой не больше веса другой. Так как наша изюминка не тяжелее 1 г, то эта чашка либо не перевесит (и разность весов уменьшится), либо станет тяжелее другой не более чем на 1 г. Таким образом мы разложим все остальные изюминки и получим нужное распределение.
2) Количество весомых изюминок нечетно: $n = 2k + 1$. В этом случае $k \le 499$, иначе вес изюма больше 1001 г. Поэтому общий вес весомых изюминок не больше $1{,}002(2k+1)\,\text{г} \le 1{,}002 \cdot 999\,\text{г} = 1000{,}998\,\text{г}$, следовательно, суммарный вес остальных не меньше 0,002 г.
Отложим в сторону одну невесомую изюминку. Если ее вес меньше 0,002 г, то добавим к ней еще одну невесомую. Будем продолжать этот процесс, пока суммарный вес отложенных невесомых изюминок меньше 0,002 г. В результате суммарный вес отложенных будет не меньше 0,002 г и не больше 1,002 г. Также отложим в сторону одну весомую изюминку. Остальные изюминки по предыдущему пункту разложим на две чашки так, чтобы разность весов на чашках не превосходила 1 г. Теперь рассмотрим две группы изюминок: отложенную группу невесомых и одну отложенную весомую. Разность весов этих групп не больше 1 г. Положим более тяжелую из них на легкую чашку весов, а более легкую – на тяжелую. Тогда разность весов на чашках осталась не больше 1 г.

И.Богданов

М1995*. *Докажите, что уравнение*

$$n(n+1)(n+2)(n+3) = m(m+1)^2(m+2)^3(m+3)^4$$

не имеет решений в натуральных числах.

Вначале докажем **лемму**:
Пусть a – натуральное число, большее 1, а x – такое целое неотрицательное число, что $(a^2-1)x^2+1$ является квадратом целого числа. Тогда x является одним из членов последовательности $\{x_n\}$, которая задается правилом: $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_{k+2} = 2ax_{k+1} - x_k$ при $k \ge 0$.
Доказательство. Пусть $(a^2-1)x^2+1 = y^2$ для натурального y, $x \ge 1$. Так как $y^2 = (ax)^2 - x^2 + 1 \le (ax)^2$, то можно положить $y = ax - t$, где $t \ge 0$. После замены получаем

$$x^2 + t^2 - 2axt - 1 = 0. \qquad (*)$$

Докажем, что если пара целых неотрицательных чисел x и t удовлетворяет $(*)$, то x и t – последовательные члены последовательности $\{x_n\}$. Пусть это не так для некоторых $x = p$, $t = q$, причем p и q среди всех таких пар выберем с минимальной суммой $p + q$. Очевидно, $p \ne q$. Пусть для определенности $p > q$. Если $q = 0$, то $p = 1$, тогда $q = x_0$ и $p = x_1$ – противоречие. Считаем далее, что $q \ge 1$.
Положим $f(x) = x^2 - 2aqx + q^2 - 1$. Имеем $f(p) = 0$, $f(q) = 2q^2 - 2aq^2 - 1 < 0$, поэтому $f(x)$ имеет второй корень p_1 такой, что $p_1 < q < p$. Из теоремы Виета $p + p_1 = 2aq$, откуда p_1 – целое и $pp_1 = q^2 - 1$, значит, p_1 неотрицательно. Пара (p_1, q) удовлетворяет $(*)$, причем $p_1 + q < q + p$, и по нашему предположению найдется такой номер l, что $p_1 = x_l$ и $q = x_{l+1}$. Но тогда $p = 2aq - p_1 = 2ax_{l+1} - x_l = x_{l+2}$, т.е. p и q – тоже пара последовательных членов последовательности $\{x_k\}$ – противоречие.
Лемма доказана.
Перейдем к решению задачи.
Допустим, m и n удовлетворяют условию задачи. Имеем

$$n(n+1)(n+2)(n+3) = \\ = (n^2+3n)(n^2+3n+2) = (n^2+3n+1)^2 - 1,$$

поэтому

$$m(m+1)^2(m+2)^3(m+3)^4 + 1 = \\ = (m(m+2))\left((m+1)(m+2)(m+3)^2\right)^2 + 1 =$$

$$= \left((m+1)^2 - 1\right)\left((m+1)(m+2)(m+3)^2\right)^2 + 1$$

является точным квадратом. Положив $a = m + 1$, из леммы получаем, что число $(m+1)(m+2)(m+3)^2$ является членом последовательности $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_{k+2} = (2m+2)x_{k+1} - x_k$ при $k \geq 0$. Легко проверить по индукции, что последовательности остатков чисел $x_0, x_1, x_2, \ldots$ при делении на $2m + 1$ и на $2m + 3$ периодичны с периодами $(0, 1, 1, 0, -1, -1)$ и $(0, 1, -1, 0, 1, -1)$ соответственно. Следовательно, x_k может давать при делении на $2m + 1$ и на $2m + 3$ лишь один из остатков $0, \pm 1$. Предположим, что найдется такой номер l, что $x_l = (m+1)(m+2)(m+3)^2$. Тогда

$$16x_l = (2m+2)(2m+4)(2m+6)^2 =$$

$$= ((2m+1)+1)((2m+1)+3)((2m+1)+5)^2 =$$

$$= (2m+1)s + 3\cdot 5^2 = (2m+1)s + 75$$

должно давать один из остатков $0, \pm 16$ при делении на $2m + 1$. Поэтому одно из чисел 75, $75 - 16 = 59$, $75 + 16 = 91$ должно делиться на $2m + 1$. Аналогично,

$$16x_l = (2m+2)(2m+4)(2m+6)^2 =$$

$$= ((2m+3)-1)((2m+3)+1)((2m+3)+3)^2 =$$

$$= (2m+3)s - 9,$$

поэтому получаем, что одно из чисел 9, $9 + 16 = 25$, $|9 - 16| = 7$ должно делиться на $2m + 3$. Для m остаются 3 возможности: 1, 2, 3.

При $m = 1$ имеем $(m+1)(m+2)(m+3)^2 = 96$, а соответствующая последовательность $\{x_k\}$ имеет вид $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = 15$, $x_4 = 56$, $x_k > 96$ при $k \geq 5$; при $m = 2$ имеем $(m+1)(m+2)(m+3)^2 = 300$, а соответствующая последовательность $\{x_k\}$ имеет вид $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 6$, $x_3 = 35$, $x_4 = 204$, $x_k > 300$ при $k \geq 5$; при $m = 3$ имеем $(m+1)(m+2)(m+3)^2 = 720$, а соответствующая последовательность $\{x_k\}$ имеет вид $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 8$, $x_3 = 63$, $x_4 = 496$, $x_k > 720$ при $k \geq 5$.

Замечание. Обратное утверждение леммы тоже верно, т.е. в формулировке леммы описываются все решения уравнения $x^2\left(a^2 - 1\right) + 1 = y^2$. Другое доказательство леммы можно получить, если рассматривать это уравнение как уравнение Пелля и использовать тот факт, что все его решения (x, y) являются членами последовательности целых (x_k, y_k), задаваемых равенством $\left(\sqrt{a^2-1}+1\right)^k = x_k\sqrt{a^2-1} + y_k$, $k \geq 0$.

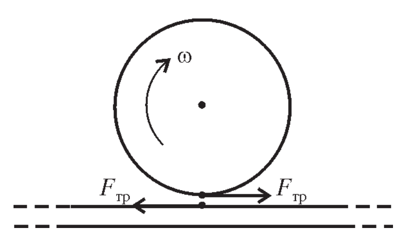
А.Иванов

Ф2003. *Тонкое велосипедное колесо раскрутили вокруг его оси, удерживая ее неподвижной. При этом пришлось совершить работу A и вся эта работа пошла на увеличение механической энергии колеса. Колесо осторожно поставили на горизонтальную поверхность тележки такой же массы, которая может свободно двигаться по гладкому горизонтальному столу. Какое максимальное количество теплоты может выделиться в системе, пока колесо не покинет тележку? Колесо во время движения остается вертикальным.*

Кинетическая энергия колеса после совершения работы A равна

$$A = \frac{1}{2}M\omega_0^2R^2,$$

где M масса, ω_0 – начальная угловая скорость, R – радиус колеса. На достаточно длинной тележке колесо через некоторое время будет двигаться без проскальзывания, и с этого момента выделение тепла прекратится. Ясно, что *максимальное* количество теплоты выделится именно в этом случае. А до момента прекращения проскальзывания на колесо действует сила трения



$$F_{тр} = \mu Mg,$$

и для вращающегося колеса уравнение движения выглядит так (см. рисунок):

$$F_{тр}\cdot R = -MR^2\cdot\frac{\Delta\omega}{\Delta t}, \text{ или } \Delta\omega = -\frac{\mu g}{R}\Delta t.$$

Ускорение оси колеса направлено вправо и равно $a = \mu g$, откуда получаем

$$\Delta v = a\Delta t = \mu g\Delta t = -\Delta\omega R.$$

Ускорение тележки (при равенстве масс) такое же по величине, но направлено влево.

Условие прекращения проскальзывания запишем в виде

$$R\omega_1 = 2v.$$

Тогда получаем

$$R\omega_1 = 2R(\omega_0 - \omega_1), \text{ и } \omega_1 = \frac{2}{3}\omega_0.$$

В этот момент скорости тележки и оси колеса одинаковы и равны $\frac{1}{3}R\omega_0$. Запишем теперь баланс энергий:

$$A = \frac{1}{2}M\left(\frac{2}{3}\omega_0\right)^2R^2 + 2\frac{M(R\omega_0/3)^2}{2} + Q,$$

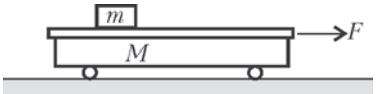
откуда найдем выделившееся количество теплоты:

$$Q = \frac{1}{3}A.$$

А.Сложнов

Ф2004. *На гладком горизонтальном столе находится тележка массой 3 кг, на ее поверхности лежит очень легкий лист бумаги, на нем – груз массой 1 кг. Лист бумаги тянут в горизонтальном направлении силой 10 Н. С каким ускорением движется этот лист, если коэффициент трения между бумагой и каждым из тел составляет 0,7?*

На тележку и на груз (см. рисунок) действуют вправо силы трения со стороны листа бумаги. Они были бы



одинаковы в случае, когда лист проскальзывает относительно обоих тел, но в нашем случае это не так. Разберемся с проскальзыванием.

При малой величине F тела едут вместе, их ускорения одинаковы и равны

$$a = \frac{F}{M+m}.$$

При увеличении силы F более тяжелая ($M = 3m$) тележка начнет отставать, ее максимальное ускорение под действием силы трения $F_{\text{тр}} = \mu mg$ составит

$$a_0 = \frac{\mu mg}{M} = \frac{1}{3}\mu g.$$

Это произойдет при величине действующей силы

$$F_0 = (M+m)\cdot\frac{1}{3}\mu g = \frac{28}{3}\ \text{Н}.$$

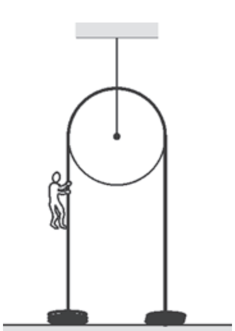
При $F = 10\ \text{Н} > F_0$ тележка проскальзывает, сила трения между листом и тележкой составляет 7 Н. Но лист легкий, поэтому сумма действующих на него сил должна быть нулевой. Значит, на груз действует сила F_1 = 10 Н − 7 Н = 3 Н, и его ускорение составляет $a_1 = 3\ \text{м/с}^2$. Лист имеет *такое же ускорение,* т.е. $3\ \text{м/с}^2$.

Кстати, если задать в условии F > 14 Н, то *нельзя* будет считать массу листа нулевой!

А.Старов

Ф2005. *Через легкий блок, закрепленный на большой высоте над горизонтальной поверхностью земли, переброшена гибкая веревка. Концы веревки сложены внизу двумя «бухтами», которые не препятствуют движению. С одной стороны блока за веревку ухватился человек массой M = 60 кг, который быстро перебирает руками, стараясь висеть на одной высоте над землей. При некоторой установившейся скорости движения веревки это ему удается. Найдите эту скорость. Масса одного метра веревки $\rho = 2$ кг/м. Ускорение свободного падения считать равным $g = 10$ м/с^2. Трение в блоке отсутствует.*

Слева на веревку (см. рисунок) действует дополнительная сила $F = Mg$, именно эта сила «вовлекает» в движение все новые куски веревки. При установившемся режиме масса веревки, вовлеченной в движение



за время Δt, будет равна $\Delta m = \rho v_{\text{уст}}\Delta t$. Изменение импульса за это время составит $\Delta m v_{\text{уст}}$. Тогда запишем

$$Mg\Delta t = \Delta m v_{\text{уст}} = \rho v_{\text{уст}}^2 \Delta t,$$

откуда и найдем установившуюся скорость:

$$v_{\text{уст}} = \sqrt{\frac{Mg}{\rho}} \approx 17\ \text{м/с}.$$

А.Повторов

Ф2006. *Теплоизолированный сосуд, содержащий гелий при температуре T_0 = 30 К движется со скоростью v = 1000 м/с. Какой станет температура газа в сосуде через некоторое время после резкой остановки сосуда? Теплообменом газа со стенками сосуда пренебречь. Моль гелия имеет массу m = 4 г.*

Проекции скоростей молекул газа на оси координат v_x, v_y, v_z в системе отсчета, связанной с движущимся сосудом, соответствуют температуре T_0. После остановки сосуда нужно рассмотреть движение молекул в новой, неподвижной, системе отсчета:

$$v_x^* = v + v_x,\ v_y^* = v_y,\ v_z^* = v_z.$$

Энергия одной молекулы составит, в среднем,

$$\frac{m_0}{2}\left(v_x^{*2} + v_y^{*2} + v_z^{*2}\right) = \frac{m_0}{2}\left(\overline{(v+v_x)^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2}\right) =$$

$$= \frac{m_0}{2}v^2 + \frac{m_0}{2}\left(\overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2}\right) + \overline{m_0 v v_x}.$$

Последнее слагаемое равно нулю $(\overline{v}_x = 0)$, поэтому средняя кинетическая энергия молекулы составит

$$\bar{\varepsilon} = \frac{m_0 v^2}{2} + \frac{3}{2}kT_0.$$

После хаотизации движения частиц в сосуде можно будет говорить о температуре T_1 такой, что

$$\frac{3}{2}kT_1 = \frac{m_0 v^2}{2} + \frac{3}{2}kT_0.$$

Удобно рассмотреть один моль газа, тогда получим

$$T_1 = T_0 + \frac{1}{3}\frac{\mathrm{M}v^2}{R} \approx 190\ \text{К},$$

где $\mathrm{M} = 4$ г/моль − молярная масса гелия, $R = 8{,}3$ Дж/(моль · К) − универсальная газовая постоянная.

А.Старов

Ф2007. *В цилиндре под поршнем находится при нормальных условиях порция гелия в количестве $\nu = 2$ моль. Ей сообщают количество теплоты Q = 100 Дж, при этом температура гелия увеличивается на $\Delta T = 10$ К. Оцените изменение объема газа, считая его теплоемкость в этом процессе постоянной.*

В условии задачи сказано про постоянную теплоемкость − это сделано для того, чтобы исключить экзотические процессы, в которых давление и температура при небольших добавках энергии могут очень сильно меняться (вначале в одну сторону, потом в другую). Считая изменение условий (давление, температура) малыми − мы это еще проверим, − получим

$$Q = p\Delta V + \nu C_V \Delta T,$$

где $p = 10^5$ Па − нормальное атмосферное давление, $C_V = \frac{3}{2}R$ − молярная теплоемкость гелия при постоянном объеме. Отсюда получаем

$$\Delta V = \frac{Q - \nu C_V \Delta T}{p} = -1{,}5\cdot 10^{-3}\ \text{м}^3 .$$

Итак, объем *уменьшается* на 1,5 литра.
По сравнению с начальным значением (при нормальных условиях) $2\cdot 22{,}4$ л ≈ 45 л это изменение и в самом деле невелико.

А.Газов

Ф2008. *Закрепленная неподвижно непроводящая тонкостенная сфера массой M равномерно заряжена по поверхности полным зарядом Q. Из нее вырезают маленький кусочек, масса которого равна 1/10000 массы сферы, сминают его в крошечный комочек, помещают в центр сферы (заряд кусочка при этом сохраняется) и отпускают. Какая скорость у него будет на большом расстоянии от сферы? А какую скорость он приобретет к моменту вылета из сферы? Силы тяжести отсутствуют.*

Комочек можно считать *точечным* зарядом $q = Q/10000$ с массой $m = M/10000$. Если комочек отпустить из центра без начальной скорости, он начнет ускоряться как раз в сторону дырки – поле «испорченной» сферы внутри уже не нулевое.
Проще всего найти скорость на бесконечности. Потенциал поля сферы, обозначим ее радиус R, в центре равен

$$\varphi = \frac{Q-q}{4\pi\varepsilon_0 R} ,$$

а потенциал на бесконечности – нулевой. Тогда, согласно закону сохранения энергии,

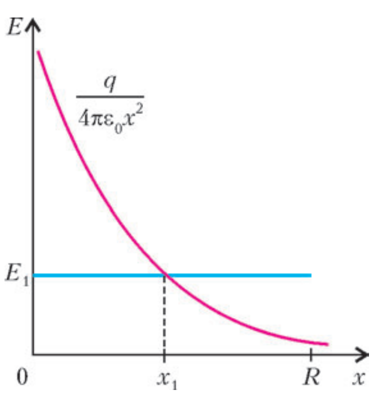
$$\frac{mv_1^2}{2} = q\varphi ,$$

откуда находим скорость комочка на бесконечности:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2q\varphi}{m}} \approx \sqrt{\frac{2\cdot Q\cdot 10^{-4}\cdot Q}{4\pi\varepsilon_0 R\cdot M\cdot 10^{-4}}} = \sqrt{\frac{Q^2}{2\pi\varepsilon_0 RM}} .$$

Сложнее оценить скорость к моменту вылета из сферы. Вернем назад (мысленно!) вырезанный кусочек поверхности с зарядом q и одновременно добавим такой же кусочек с зарядом $-q$. Ясно, что силы, действующие на интересующий нас комочек, определяются его взаимодействием с добавленным кусочком с зарядом $-q$. Вдали этот кусочек напоминает точечный заряд $-q$, а при подлете к нему он становится похожим на бесконечную заряженную плоскость, создающую поле

$$E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^2} .$$



На графике (см. рисунок) показаны поле точечного заряда и поле бесконечной плоскости в зависимости от расстояния x до центра дырки. Будем считать взаимодействие на участке от R до x_1 по первой из зависимостей, т.е. по модели точечного заряда, а на участке от x_1 до нуля – по модели бесконечной плоскости. Вначале найдем «точку пересечения» x_1:

$$\frac{Q\cdot 10^{-4}}{4\pi\varepsilon_0 x_1^2} = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^2} ,$$

откуда

$$x_1 = 0{,}014R .$$

Кинетическая энергия комочка определяется работой электростатических сил:

$$\frac{mv_2^2}{2} = q\left(\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2\right) =$$

$$= q\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x_1} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} + E_1 x_1\right) \approx \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 x_1} + \frac{qQx_1}{8\pi\varepsilon_0 R^2} .$$

Отсюда получаем скорость комочка на вылете из сферы:

$$v_2 \approx \sqrt{\frac{Q^2}{2\pi\varepsilon_0 RM}\cdot 7\cdot 10^{-3}} \approx \frac{v_1}{12} .$$

Видно, что комочек серьезно набирает скорость только после вылета из сферы.
И еще – важно, что сфера непроводящая, иначе пришлось бы учитывать перераспределение зарядов при подлете комочка к поверхности сферы. Впрочем, наличие дырки в этом месте очень способствует уменьшению этого эффекта.

А.Зильберман

Ф2009. *К идеальной батарейке с ЭДС $U_0 = 1{,}3$ В подключена мостиковая электрическая цепь, собранная из трех одинаковых вольтметров и двух одинаковых миллиамперметров, причем один из миллиамперметров включен в диагональ мостика (рис. 1). Известно, что показания миллиамперметров отличаются в 3 раза. Определите показания каждого из вольтметров. Сопротивление вольтметра больше, чем у миллиамперметра.*

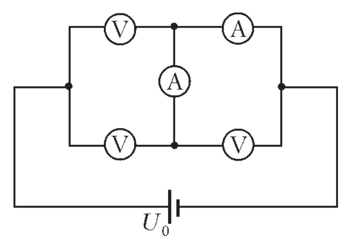


Рис. 1

Если сопротивление вольтметра больше, чем сопротивление амперметра (слово «амперметр» – короче, чем «миллиамперметр»), то ток через верхний амперметр больше. На рисунке 2 эти токи обозначены I и $3I$. Пусть сопротивление амперметра r, а вольтметра R. Напряжения вольтметров составляют: верхнего $U_0 - r\cdot 3I$, нижнего справа $r\cdot 3I + r\cdot I = 4rI$, нижнего слева $U_0 - 4rI$. Теперь запи-

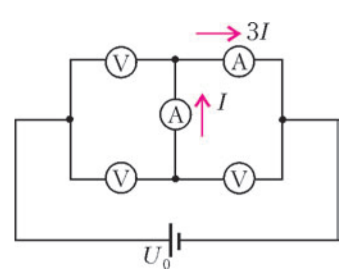


Рис. 2

шем соотношения для токов в верхнем и нижнем узлах:

$$\frac{U_0-3rI}{R}+I=3I\,,$$

$$\frac{U_0-4rI}{R}=I+\frac{4rI}{R}\,.$$

Отсюда легко выразить величину rI:

$$rI=\frac{U_0}{13}=0{,}1\ \text{В}\,.$$

Тогда показание верхнего вольтметра будет

$$U_1=U_0-3rI=1\ \text{В}\,,$$

нижнего правого –

$$U_2=4rI=0{,}4\ \text{В}$$

и нижнего левого –

$$U_3=U_0-U_2=0{,}9\ \text{В}\,.$$

А.Простов

Ф2010. *Две одинаковые легкие пружины прикреплены к маленькому массивному телу. Одна из пружин другим концом приклеена к полу, другая пружина – к потолку. Рассмотрим два варианта малых колебаний тела – в вертикальном и горизонтальном направлениях. Найдите отношение периодов таких колебаний. Пружины в положении равновесия вертикальны. Начальные длины пружин считать малыми.*

Силы натяжения пружин в положении равновесия (рис.1) равны $T_1=kl_1$ и $T_2=kl_2$, причем $T_1-T_2=Mg$. Сместим груз по вертикали вниз на малую величину x, при этом возникнет возвращающая дополнительная сила

$$F_1=2kx\,.$$

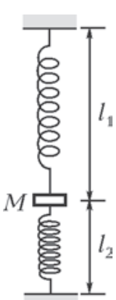


Рис. 1

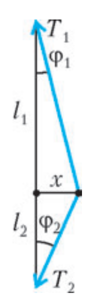


Рис. 2

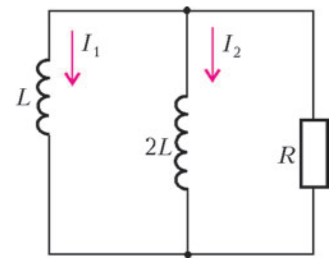
Запомним это значение, а считать пока ничего не будем. Теперь сместим груз по горизонтали вправо на ту же малую величину x. Длины пружин при этом изменяются совсем мало, тогда и силы натяжения остаются прежними. Возвращающая сила возникает как сумма проекций сил $\vec{T_1}$ и $\vec{T_2}$ на горизонтальное направление (рис.2):

$$F_2=T_1\sin\varphi_1+T_2\sin\varphi_2\approx kl_1\frac{x}{l_1}+kl_2\frac{x}{l_2}=2kx\,.$$

Видно, что при том же по величине смещении возникают одинаковые возвращающие силы. Значит, и периоды колебаний должны быть одинаковыми.

Р.Александров

Ф2011. *Параллельно включены катушки с индуктивностями L и 2L и резистор сопротивлением R. В данный момент токи через катушки одинаковы по величине, текут в одну сторону и составляют I_0 каждый. Какой полный заряд протечет через резистор за большое время, и сколько тепла выделится в резисторе? Указанные элементы цепи считать идеальными, никаких других элементов в цепи нет.*



Токи через катушки изменяются со временем так, что ЭДС индукции $\mathcal{E}$ в любой момент одинаковы. Отсюда следует, что изменения токов катушек связаны соотношением $\Delta I_1=2\Delta I_2$. Через резистор сопротивлением R протекает ток (см. рисунок) $I=I_1+I_2$. Спустя очень большой интервал времени будет достигнуто условие $I_1+I_2=0$. Тогда можно записать

$$(I_0-I_1)=2(I_0-I_2)$$

и при $I_1=-I_2$ получим

$$I_1=-\frac{1}{3}I_0\,,\ I_2=\frac{1}{3}I_0\,,$$

т.е. ток через катушку индуктивностью L изменит направление на противоположное.

Заряд, протекающий через резистор за малый интервал времени Δt_i, равен $\Delta q_i=\frac{\mathcal{E}_i}{R}\Delta t_i$. Подставив значение $\mathcal{E}_i=-L\frac{\Delta I_{1i}}{\Delta t_i}$, получим

$$\Delta q_i=-\frac{L}{R}\Delta I_{1i}\,.$$

Суммарный заряд, прошедший через резистор, будет

$$Q=\sum\Delta q_i=-\frac{L}{R}\sum\Delta I_{1i}=-\frac{L}{R}\left(-\frac{1}{3}I_0-I_0\right)=\frac{4}{3}\frac{LI_0}{R}\,.$$

Количество теплоты $W_{\text{т}}$, выделившееся в резисторе, найдем из баланса начальной и конечной энергий:

$$\frac{LI_0^2}{2}+\frac{2LI_0^2}{2}=\frac{L(I_0/3)^2}{2}+\frac{2L(I_0/3)^2}{2}+W_{\text{т}}\,,$$

откуда

$$W_{\text{т}}=\frac{4}{3}LI_0^2\,.$$

З.Рафаилов

Ф2012. *Катушку индуктивности и конденсатор соединили параллельно и подключили к сети переменного напряжения 220 В, 50 Гц последовательно с амперметром переменного тока (сопротивление амперметра очень мало). Показания амперметра составили при этом 0,015 А. Теперь катушку и конденсатор соединили последовательно и вновь подключили к сети. Напряжение, измеренное на конденсаторе вольтметром (его сопротивление можно считать очень большим), составило 300 В, а напряжение на зажимах катушки оказалось равным 85 В. Считая показания приборов точными, определите по этим данным емкость конденсатора, индуктивность катушки и сопротивление провода, которым намотана катушка. Конденсатор можно считать идеальным, потери*

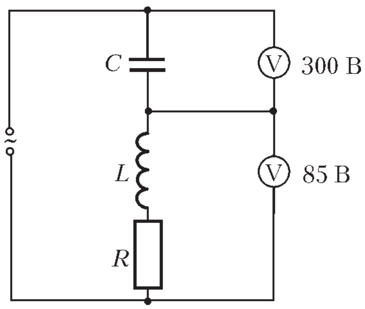


Рис. 1

в сердечнике катушки очень малы – неидеальность катушки определяется сопротивлением провода, которым она намотана.

Начнем со второй схемы – последовательного соединения конденсатора и катушки (рис.1). Видно, что напряжения 300 В и 85 В почти противофазны: $300\ \text{В} - 85\ \text{В} \approx 220\ \text{В}$. Ясно, что для начала можно пренебречь сопротивлением провода, считая катушку идеальной. Тогда несложно найти индуктивность катушки L и емкость конденсатора C, а дальше, опираясь на полученные значения, можно найти и сопротивление провода R.

Итак, для последовательного включения запишем

$$\frac{\omega L}{1/(\omega C)} = \frac{85}{300},\ \text{или}\ \omega^2 LC = \frac{85}{300}.$$

Для параллельного включения конденсатора и катушки можно записать

$$\frac{220}{\omega L} - \frac{220}{1/(\omega C)} = 0{,}015,$$

или

$$\omega L = \frac{\left(1 - \omega^2 LC\right)\cdot 220}{0{,}015}.$$

Подставляя значение $\omega^2 LC = \dfrac{85}{300}$, для $\omega = 314\ \text{с}^{-1}$ получаем

$$L = 33{,}5\ \text{Гн},$$

$$C = 0{,}09\cdot 10^{-6}\ \text{Ф} = 0{,}09\ \text{мкФ}.$$

Найдем теперь значение R. Для этого определим сдвиг фаз между током в цепи (последовательная схема) и напряжением 85 В на *неидеальной* катушке (рис.2):

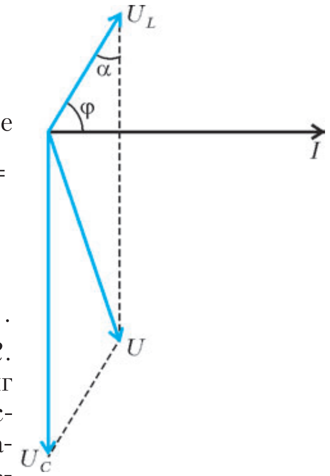


Рис. 2

$$\sin\varphi = \cos\alpha = \frac{300^2 + 85^2 - 220^2}{2\cdot 300\cdot 85} = 0{,}957.$$

Тогда

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L}{R} = 3{,}3,\ \text{и}\ R = 3{,}5\ \text{кОм}.$$

Погрешность получается небольшой – судя по величине $\sin\varphi \approx 0{,}96$, а упрощение расчетов очень существенное.

А.Длиннов

Победители конкурса имени А.П. Савина «Математика 6–8» 2005/06 учебного года

Лучших результатов в конкурсе добились следующие школьники:

Злыденко Олег – Беер-Шева, Израиль, 8 кл.,
Левин Дорон – Беер-Шева, Израиль, 8 кл.,
Габидулина Надежда – Севастополь, гимназия 1, 7 кл.,
Дудкин Александр – Харьков, ФМЛ 27, 7 кл.,
Кольцов Иван – Ярославль, 8 кл.,
Лысакевич Анастасия – Харьков, ФМЛ 27, 8 кл.,
Балкашин Александр – Харьков, ФМЛ 27, 7 кл.,
Ибраимова Айжана – Бишкек, ФМШЛ 61, 7 кл.,
Гарагатый Игорь – Харьков, ФМЛ 27, 8 кл.,
Калашник Владислав – Харьков, ФМЛ 27, 8 кл.

и кружки:

Математического клуба при Университете им. Бен-Гуриона в Негеве, Беер-Шева, Израиль, руководители *П.Самовол, Й.Хейфец*,
гимназии 127, Снежинск, руководитель *А.А.Малеев*,
центра «Олимп», Ярославль, руководитель *И.М.Игнатович*,
«Эврика» при ФМЛ 27, Харьков, руководители *Е.Л.Аринкина, А.Л.Берштейн, В.Я.Крупчицкий*,
школы индивидуального образования одаренных детей, Магнитогорск, руководитель *А.В.Христева*,
гимназии 1, Самара, руководитель *А.А.Гусев*,
школы 9 им. А.С. Пушкина, Пермь, руководитель *О.Н. Вязьмина*,
школы 622, Санкт-Петербург, руководитель *Н.А.Петровская*,
«Эрудит» ФМШ 32, Астрахань, руководитель *Т.М.Сергеева*,
Малого университета при Харьковском национальном университете им. В.Н.Каразина, руководители *С.А.Лифиц, А.С.Щербина*,
центра дополнительного математического образования, Курган, руководитель *О.И.Южаков.*

Жюри конкурса отмечает также хорошие работы следующих учеников:

Кравченко Александра – Харьков, ФМЛ 27, 7 кл.,
Филимоновой Карины – Харьков, ФМЛ 27, 6 кл.,
Жениленко Вячеслава – Харьков, ФМЛ 27, 7 кл.,
Доричевой Даши – Ярославль, 8 кл.,
Хараджиева Олега – Набережные Челны, гимназия 26, 7 кл.,
Горелышева Сергея – Харьков, ФМЛ 27, 6 кл.,
Лисичкина Владислава – Харьков, гимназия 47, 8 кл.,
Бичурина Игоря – Харьков, гимназия 55, 8 кл.,
Комориной Галины – Краснодар, школа 42, 7 кл.

и кружков:

ФМШЛ 61, Бишкек, руководитель *Л.С.Хохлова*,
Политехнической гимназии, Нижний Тагил, руководитель *Т.В.Сабурова*,
школы 10, Ангарск, руководитель *Л.В.Шварева.*