Материалы вступительных экзаменов 2007 года

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(олимпиада «Ломоносов-2007»)

1. Вычислите $(\sin\alpha - \cos\alpha)(\sin\beta - \cos\beta)$, если $\sin(\alpha+\beta) = 0{,}8$ и $\cos(\alpha-\beta) = 0{,}3$.

2. Решите уравнение

$$\sqrt{2^{\left(x^2\right)}} = \left(2^{\sqrt[5]{x}}\right)^5 .$$

3. Какие значения может принимать выражение

$$\log_{b_{11}b_{50}}\left(b_1 b_2 \ldots b_{60}\right),$$

где $b_1, b_2, \ldots$ – геометрическая прогрессия?

4. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{8-x} - |2x-1|}{\sqrt{x+7} - |2x-1|} \le 1 .$$

5. На стороне AB треугольника ABC взята такая точка D, что окружность, проходящая через точки A, C и D, касается прямой BC. Найдите AD, если $AC = 9$, $BC = 12$ и $CD = 6$.

6. Натуральные числа a, b и c таковы, что $\text{НОК}(a,b) = 60$ и $\text{НОК}(a,c) = 270$ ($\text{НОК}(x,y)$ – наименьшее общее кратное чисел x и y). Найдите $\text{НОК}(b,c)$.

7. Определите, под каким углом видно из начала координат (т.е. внутри какого наименьшего угла с вершиной в точке(0, 0) помещается) множество, заданное на координатной плоскости неравенством

$$14x^2 + xy + y^2 + 14x + 2y + 4 < 0 .$$

8. Грани двугранного угла пересекают боковую поверхность цилиндра радиусом 5, образуя с его осью углы в $70°$ и $80°$, а ребро двугранного угла перпендикулярно этой оси и удалено от нее на расстояние 11. Найдите объем части цилиндра, расположенной внутри двугранного угла.

9. Найдите все значения $x \in (0; \pi]$, удовлетворяющие уравнению

$$|\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x| + |\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x| = \operatorname{tg} 3x .$$

10. В течение четверти учитель по пению ставил детям оценки «1», «2», «3», «4» и «5». Среднее арифметическое всех оценок Вовочки оказалось равным в точности 3,5. И тогда, по предложению Вовочки, учитель заменил одну его оценку «4» парой оценок «3» и «5». Докажите, что от этого средняя оценка Вовочки по пению увеличилась. Найдите наибольшее возможное ее значение после такой замены:

а) одной оценки «4»;

б) всех его оценок «4».

Вариант 2

(механико-математический факультет)

1. Учитель назвал Пете натуральное число и попросил найти сумму его логарифмов по основаниям 3 и 75. Однако Петя по ошибке не сложил эти логарифмы, а перемножил их, получив неверный ответ, который оказался вдвое меньше верного. Какое число назвал ему учитель?

2. Графики функций

$$f(x) = 2x^2 - 2x - 1 \text{ и } g(x) = -5x^2 + 2x + 3$$

пересекаются в двух точках. Найдите коэффициенты a и b в уравнении прямой $y = ax + b$, проходящей через те же точки.

3. Решите уравнение

$$3\cos x\,|3\sin x + \cos x| = \sin x\,|\cos x - 3\sin x| .$$

4. Точки A, B и C лежат на окружности радиуса 2 с центром O, а точка K – на прямой, касающейся этой окружности в точке B, причем $\angle AKC = 46°$, а длины отрезков AK, BK, CK образуют возрастающую геометрическую прогрессию (в указанном порядке). Найдите угол AKO и расстояние между точками A и C. Какой из углов больше: ACK или AOK?

5. Найдите наибольшее значение выражения

$$\sqrt{(x-1)(y-x)} + \sqrt{(7-y)(1-x)} + \sqrt{(x-y)(y-7)}$$

при $x \in [-2; 3]$ и $y \in [0; 11]$.

6. Два конуса имеют общую вершину и единственную общую образующую, которая составляет с их осями углы в $30°$ и $45°$. Двугранный угол расположен так, что каждая его грань касается каждого из конусов по разным образующим. Найдите величину этого угла.

Вариант 3

(факультет вычислительной математики и кибернетики, олимпиада «Абитуриент-2007», апрель)

1. Решите уравнение

$$\frac{-4\cos^3 x + 2\sin 2x + \cos x}{\sin x - 1} = 0 .$$

2. Решите неравенство

$$3^{\frac{x+3}{5x-2}} - 4 \ge 5 \cdot 3^{\frac{9x-7}{5x-2}} .$$

3. В двух одинаковых сосудах объемом по 30 л каждый содержится всего 30 л спирта. Первый сосуд доливают доверху водой и полученной смесью дополняют второй сосуд, затем из второго сосуда отливают в первый 12 л новой смеси. Сколько спирта было первоначально в каждом сосуде, если во втором сосуде оказалось на 2 л спирта меньше, чем в первом?

4. В прямоугольном равнобедренном треугольнике ABC с прямым углом C проведены биссектриса AM и медиана BN, пересекающиеся в точке K. Найдите площадь данного треугольника, если $AK = 2 + \sqrt{2}$.

5. Найдите минимальное и максимальное значения функции

$$y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{\sin\left(x + \frac{5\pi}{6}\right)} .$$

6. Некоторая прямая касается двух сфер, расстояние между центрами которых равно 5. Первой сферы радиуса

$\sqrt{3}$ с центром в точке O_1 эта прямая касается в точке K, а второй сферы радиуса 2 с центром в точке O_2 эта прямая касается в точке L, причем $KL = 2\sqrt{6}$. Чему равен двугранный угол, ребром которого является прямая KL, одна из граней содержит точку O_1, а другая – точку O_2?

Вариант 4

(факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. Найдите все решения уравнения

$$2\sin\left(x+\frac{7\pi}{25}\right)\sin\left(3x+\frac{18\pi}{25}\right)=\cos 4x+2^{\cos\frac{2\pi}{3}},$$

принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{10};\frac{4\pi}{5}\right]$.

2. Решите неравенство

$$\log_{x+2}(2-x)\ge\frac{\left|\log_5(2x+3)-1\right|}{\log_5(x+2)}.$$

3. В треугольнике ABC точка D является основанием высоты, опущенной из точки A на сторону BC. Окружность диаметра $2\sqrt{3}$ проходит через точки B и D и касается внешним образом окружности, описанной около треугольника ACD. Известно, что $AC = 4\sqrt{3}$, а величина угла ABC равна $30°$. Найдите длину стороны BC.

4. Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases}x-y\le -25,\\ x^2-y\le 8,\\ 4x+y\le 1.\end{cases}$$

5. Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$). На ребре CC_1 выбрана точка D. Сечение, проходящее через точки A, B_1 и D, делит призму на два многогранника, $ABCDB_1$ и $B_1AA_1C_1D$, отношение объемов которых равно 13:17. В каком отношении точка D делит ребро CC_1?

6. Какие значения может принимать $\sin(\alpha+\beta+\gamma)$, если при этих α,β,γ многочлен от x

$$x^4+2^{3\sin\alpha}x^2+x\sqrt{2^{1-\sin\beta}-\cos\gamma}+\sin^2\beta+\cos^2\gamma$$

является квадратом некоторого многочлена относительно x?

Вариант 5

(физический факультет)

1. Решите уравнение

$$\frac{\sin 5x-\sin 3x}{2\sin x}=1.$$

2. Решите уравнение

$$\frac{\left(\sqrt{3}\right)^{2x}+5\cdot 3^{2-x}-14}{49-7^x}=0.$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{x-2}-\sqrt{2x+2}=\sqrt{2x-5}-\sqrt{3x-1}.$$

4. Окружность радиуса 2, вписанная в ΔKLM, касается стороны LM в точке N. Отрезок KN является медианой треугольника и KN= 8. Найдите площадь ΔKLM.

5. Решите неравенство

$$\log_4\left(x^2-4\right)^2+\log_2\frac{x-1}{x^2-4}>0.$$

6. В ΔKLM через точку N высоты KN проведены прямые, перпендикулярные сторонам KL и KM и пересекающие их в точках A и B соответственно. Отрезок AB равен a, а радиус описанной около ΔKLM окружности равен R. Найдите площадь ΔKLM.

7. Для каждого значения a из промежутка $(-3; 0)$ найдите число различных решений уравнения

$$\left(2x^2-5ax+2a^2\right)\sqrt{x-\frac{2}{a}}=0.$$

8. Сфера радиуса $(1/2)\sqrt{17}$ касается всех сторон правильного ΔLMN. Точка S такова, что плоскости SLM, SMN и SNL касаются сферы. Расстояние от точки S до плоскости LMN равно 8. Найдите объем пирамиды $SLMN$.

Вариант 6

(факультеты: химический, наук о материалах, биологический, фундаментальной медицины, биоинженерии и биоинформатики, географический, психологии)

1. Решите уравнение

$$\left(x^2-7|x|+6\right)\sqrt{4x+23}=0.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{x^2+4x+4}{2x+12}\le 1-\frac{\sqrt{x^2+8x+16}}{x+4}.$$

3. В прямоугольном треугольнике DEF на гипотенузу опущены медиана DM и высота DQ. Известно, что $MD=\frac{\sqrt{17}}{2}$ и $\sin\angle DMQ=\frac{8}{17}$. Найдите катеты треугольника DEF.

4. Положительные числа b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 образуют геометрическую прогрессию, а числа $b_5, 6b_3, 27b_1$ – арифметическую. Найдите знаменатель прогрессии b_1, b_2, b_3, b_4, b_5.

5. Прямая l_1 проходит через точки $(-3; 2)$ и $(1; 1)$ координатной плоскости. Прямая l_2 проходит через точку $(-5; 4)$ и перпендикулярна прямой l_1. Найдите координаты точки пересечения прямых l_1 и l_2.

6. Решите уравнение

$$\log_{\cos x}\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)-2\sin^2 x+5\sin 2x=0.$$

7. За 2005 год число книг в фонде библиотеки поселка увеличилось на 0,4%, а за 2006 год – на 0,8%, оставшись при этом меньше 50 тысяч. На сколько книг увеличился фонд библиотеки поселка за 2006 год?

8. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых среди корней уравнения

$$ax^2+(a+4)x+a+1=0$$

имеется ровно один отрицательный.

Вариант 7

(факультеты: географический, почвоведения и факультет глобальных процессов)

1. Решите уравнение

$$\left||x-1|-7\right|=10.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-7}}+x\le\frac{1}{\sqrt{x^2-7}}+9.$$

3. Сумма положительной бесконечно убывающей геометрической прогрессии в 4 раза больше ее второго члена. Во сколько раз второй член меньше первого?

4. Решите уравнение

$$\sin^2 11x=\cos^2 17x.$$

5. Решите неравенство

$$\log_x^3 16 + 2\log_x^2 16^2 + 4\log_x 16^4 \geq 0 .$$

6. Решите систему

$$\begin{cases} x + y + xy = 7, \\ x^2 + y^2 + xy = 13. \end{cases}$$

7. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \left(5 - 2\sqrt{6}\right)^x + \left(5 + 2\sqrt{6}\right)^x - 5a = y - |y| - 8, \\ x^2 - (a - 4)\,y = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

8. Периметр равнобедренного треугольника ABC равен 18. Через середину D основания AB проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке K и делящая площадь треугольника ABC в отношении 5:2, при этом угол ADK равен $135°$. Найдите площадь треугольника ABC.

Вариант 8

(геологический факультет)

1. Решите неравенство

$$|x - 12| \leq \frac{x}{12 - x} .$$

2. Решите уравнение

$$\frac{\cos 2x + \sin x}{\cos x} = \frac{1}{2}\cos x .$$

3. Решите неравенство

$$\sqrt{2^{x^2-4} - 1}\,\left(x^2 - 7x + 6\right) \leq 0 .$$

4. Площадь четырехугольника $ABCD$ равна 9, радиус вписанной в него окружности равен 1, а длины сторон AB и BC равны 3 и 5 соответственно. Чему равны длины сторон AD и CD?

5. Решите неравенство

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_x\left(\log_2\left(\frac{x^2-2x}{2x-1}\right)\right)} \leq 1 .$$

6. Сумма первых пятнадцати членов арифметической прогрессии, состоящей из натуральных чисел, больше 337, но меньше 393. Чему равен восьмой член этой прогрессии, если известно, что он кратен четырем?

7. Числа x, y, z таковы, что

$$\begin{cases} x + 1 = z + y, \\ xy + z^2 + 14 - 7z = 0. \end{cases}$$

При каких значениях z сумма $x^2 + y^2$ максимальна? Найдите это максимальное значение.

8. В каком отношении делит объем куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, где $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$, плоскость, проходящая через вершину A и центры граней $A_1B_1C_1D_1$ и B_1C_1CB?

Вариант 9

(факультеты: социологический и филологический)

1. Решите уравнение

$$-x - 3\sqrt{-x} = 10 .$$

2. Решите неравенство

$$\frac{(x-2)(x-5)(x-8)}{(x+2)(x+5)(x+8)} \geq -1 .$$

3. Один рабочий бригады, состоящей из 5 человек, производит в среднем 14 деталей в час, причем каждый из рабочих производит в час целое число деталей, не превышающее 16. Сколько деталей в час может делать при этих условиях рабочий с самой низкой производительностью?

4. Решите систему

$$\begin{cases} x^2 - 2y - 3 = 0, \\ y^2 + 2x - 3 = 0. \end{cases}$$

5. Решите уравнение

$$5\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 4\sin\left(\frac{5\pi}{6} - x\right) - 1 .$$

6. Периметр треугольника ABC равен 36, а площадь равна 60. Найдите стороны AB и AC, если $BC = 10$.

7. Решите неравенство

$$\log_{(x+3)^2}\left(2x^2 + 9x + 21\right) \geq \log_{(x+3)^2}\left(x^2 - x\right) .$$

8. При каких значениях c уравнение

$$-\sqrt{16 - x^2} = c + x$$

имеет единственное решение?

Вариант 10

(экономический факультет, отделение экономики)

1. Для каждого значения x, удовлетворяющего условию

$$x^2 - |x| - 42 = 0 ,$$

найдите все числа y, для которых выполнено неравенство

$$-7\sqrt{y^2 - 10y + 34} \geq 4x + 7 .$$

2. Найдите все решения уравнения

$$\cos 3x = \sin x ,$$

удовлетворяющие одновременно двум неравенствам:

$$\sin x \geq 0, \quad \cos x \leq 0 .$$

3. Решите неравенство

$$\left(x^2 - \log_2\left(\frac{3^x}{5}\right) - \log_3\left(5^x\right)\right)\log_5\left(125 \cdot 25^{x-3}\right) < 0 .$$

4. Бригаде грузчиков выделена некоторая сумма денег на разгрузку баржи, однако 3 человека заболели и в работе не участвовали. Оставшиеся выполнили задание, заработав каждый на 1,5 тысячи рублей больше, чем в случае работы в составе полной бригады. Определите выделенную бригаде сумму денег, если 5%-й сбор за ее банковский перевод обошелся работодателю дополнительно в величину, находящуюся в пределах от 1,2 до 1,6 тысяч рублей.

5. Внутри треугольника ABC взята точка K так, что треугольник ABK – равносторонний. Известно, что расстояние от точки K до центра окружности, описанной около треугольника ABC, равно 6 и величина угла ACB равна $\arcsin\dfrac{5}{2\sqrt{13}}$. Найдите длину стороны AB.

6. Найдите все значения a, при которых функция

$$f(x) = |2 - x|\,x + \arcsin\left(\frac{a}{10}\right)$$

не является монотонно возрастающей на отрезке числовой оси, который соединяет корни квадратного трехчлена

$$x^2 - \left(a^2 - 8a + 14\right)x + \left(a^2 - 6a + 6\right)(8 - 2a) .$$

7. В основании пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$, не являющийся ромбом. Вершины A, B и C расположены на некоторой сфере так, что прямая AD проходит через центр этой сферы. Вершина S, также лежащая на данной сфере, равноудалена от концов диагонали AC основания. Найдите наибольшее возможное значение объема пирамиды, если $AC = 2\sqrt{3}$, $BD = 2$.

Вариант 11

(Московская школа экономики)

1. Решите неравенство
$$\sqrt{x^2 - 3x + 2} \le x - 1 .$$

2. Решите уравнение
$$\log_{(-2\cos x)}(3\sin x - \cos 2x) = 0 .$$

3. Решите неравенство $\left|\frac{x}{10} - \frac{1}{5}\right| \ge \left|\frac{x}{4} - \frac{1}{2}\right|$.

4. Решите уравнение
$$4 \cdot 25^{\sqrt{x}} - 23 \cdot 5^{\sqrt{x}} + 15 = 0 .$$

5. Для перевозки 90 т груза затребовали некоторое количество одинаковых грузовиков. В связи с тем что на каждую машину погрузили на 0,75 т меньше, дополнительно было затребовано еще 4 грузовика. На сколько процентов увеличилось число грузовиков по сравнению с первоначальной заявкой?

6. Найдите все целочисленные решения уравнения
$$x^2 - 14x + 4y^2 + 32y + 88 = 0 .$$

7. Диагонали вписанного в окружность четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. Найдите периметр и площадь треугольника ABC, если $BC = CD = 6$, $AB = 7$ и $CE = 3$.

8. При каких значениях параметра a уравнение
$$16^x - 3 \cdot 2^{3x+1} + 2 \cdot 4^{x+1} - (4 - 4a) \cdot 2^{x-1} - a^2 + 2a - 1 = 0$$
имеет три различных корня?

Вариант 12

(Институт стран Азии и Африки)

1. Решите неравенство
$$|x + 3|\,(|x - 1| - 3) \le 0 .$$

2. Фермер получил кредит в банке под определенный процент годовых. Через год фермер в счет погашения кредита вернул в банк $\frac{1}{6}$ часть от всей суммы, которую он должен был банку к этому времени. А еще через год в счет полного погашения кредита фермер внес в банк сумму, на 20% превышающую величину полученного кредита. Каков процент годовых по кредиту в данном банке?

3. Решите неравенство
$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_4 \frac{x^2 - 2x}{x + 10}\right) \ge 0 .$$

4. Решите уравнение
$$\sqrt{x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1} + \sqrt{6x + 2y - x^2 - y^2 - 9} + \sqrt{x + y - 1} = 2\sqrt{x - y + 1}\,\sin z + 6\sin^2\frac{z}{2} .$$

5. В треугольнике ABC проведена прямая, пересекающая стороны AB и BC в точках P и Q соответственно. Известно, что $AB = 3$, $AC = \sqrt{5}$, длина медианы, проведенной из вершины A к стороне BC, равна $\sqrt{6}$ и длины отрезков AP, PQ, QC равны между собой. Найдите длину отрезка PQ.

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множество решений неравенства
$$6x^2 + 4a^2 + 6ax - 3x - 24a + 35 < 0$$
содержит хотя бы одно целое число.

7. Определите, какая из двух пирамид $SABC$ или $QKNM$ имеет меньший объем, если длины ребер SA, SB, SC и QK, QN, MN равны 2, а длины ребер AB, BC, AC и KN, KM, QM равны $\sqrt{3}$.

Вариант 13

(факультет государственного управления)

1. На велотреке, имеющем форму окружности, из диаметрально противоположных точек одновременно стартуют два велосипедиста со скоростями 775 и 800 метров в минуту соответственно. Сколько полных кругов проедет первый велосипедист к моменту, когда его догонит второй, если длина велотрека равна четверти километра?

2. Решите уравнение
$$\left|\left|\sin x - \frac{1}{4}\right| - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{3}\left(\sin x + \frac{1}{4}\right).$$

3. Диагональ разбивает выпуклый четырехугольник на два равных треугольника со сторонами длиной 5, 12 и 13. Найдите радиус наименьшего круга, в который можно поместить такой четырехугольник.

4. Решите неравенство
$$\sqrt{(\log_4 x)^2 - 2} \ge \log_2 \frac{x}{4} - 1 .$$

5. Город административно поделен на пять частей: западную, северную, восточную, южную и центральную. Средняя цена дизельного топлива по бензозаправочным станциям в восточном районе составляет 18 рублей за литр, в западном – 18 рублей 35 копеек, в центральном – 20 рублей с полтиной, в северном районе – 17 рублей с четвертью соответственно, в южном районе цена совпадает со средней ценой по всем бензозаправкам города. Известно, что в центральной части бензозаправочных станций в полтора раза больше, чем в западной, а на востоке – на треть больше, чем на западе. Во сколько раз бензозаправочных станций в северном районе меньше, чем на востоке, если средняя цена дизтоплива по заправочным станциям города составляет 18 рублей 60 копеек?

6. Найдите значения a и b такие, при которых система
$$\begin{cases} |bx| - |y| = 2a, \\ (x - b)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$
имеет ровно три решения.

7. Общество рыболовов и охотников, две трети членов которого – рыболовы, а одна треть – охотники, решило переизбрать правление. Председатель общества подготовил проект состава правления из 100 человек. Какое наибольшее число охотников можно было включить в проект состава правления, чтобы за него проголосовало более половины членов общества, если известно, что за проект проголосует столько процентов рыболовов, сколько рыболовов в предложенном проекте, и столько процентов от числа охотников, сколько в нем охотников?

Вариант 14

(дополнительный набор на платные образовательные программы для абитуриентов факультетов механико-математического, вычислительной математики и кибернетики, химического, биологического, почвоведения, географического, наук о материалах, фундаментальной

медицины, психологии, биоинженерии и биоинформатики, Московской школы экономики)

1. Решите уравнение

$$\lg\sqrt{y} - \frac{1}{2}\sqrt{\lg y} = 3\,.$$

2. Решите уравнение

$$\cos^4 x + \sin^3 x = 1\,.$$

3. На координатной плоскости расположен квадрат. Две его вершины имеют координаты $(4; -5)$ и $(-6; 5)$. Найдите координаты двух других его вершин.

4. Решите неравенство

$$3^{-\frac{1}{x}+2} - 2\cdot 9^{-\frac{1}{x}+\frac{1}{4}} \le 27^{-\frac{1}{x}}\,.$$

5. Основанием пирамиды $SABCD$ служит прямоугольник $ABCD$, площадь которого равна Q. Ребро SA перпендикулярно плоскости основания, а ребра SB и SD наклонены к ней под углами δ и γ. Найдите объем пирамиды.

6. Решите неравенство

$$\left(\arcsin x - \frac{\pi}{6}\right)\lg\left(x^2 + \frac{9}{25}\right) > 0\,.$$

7. Около окружности радиуса R описана равнобочная трапеция. Площадь четырехугольника, вершинами которого служат точки касания окружности и трапеции, равна S. Найдите площадь трапеции.

8. К десятичной записи целого числа $n \ne 0$ приписали справа какую-то цифру. К получившемуся новому числу прибавили квадрат числа n, а потом вычли 3. Получилось число $14n$. Какое число n было взято и какая цифра была приписана?

ФИЗИКА

Физический факультет

Задачи устного экзамена

1. Два тонких жестких стержня длиной L каждый вращаются вокруг неподвижных точек O_1 и O_2 в плоскости рисунка 1. Расстояние между этими точками равно h. Найдите модуль скорости движения точки C пересечения этих стержней вдоль первого стержня в тот момент, когда угол между стержнями равен α, угол CO_1O_2 равен β, а скорости свободных концов стержней равны $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$.

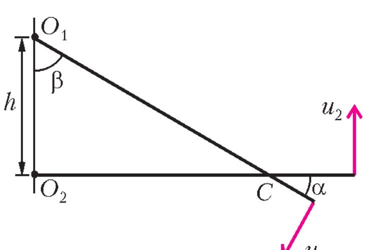

Рис. 1

2. Неподвижный клин с углом α при основании имеет гладкую нижнюю и шероховатую верхнюю части своей наклонной плоскости. На верхней части клина удерживают тонкий однородный жесткий стержень массой m, расположенный в плоскости рисунка 2. Коэффициент трения между стержнем и верхней частью клина равен μ. После того как стержень отпускают, он начинает поступательно скользить по клину. Найдите максимальное значение силы натяжения стержня в процессе его движения. Влиянием воздуха пренебречь.

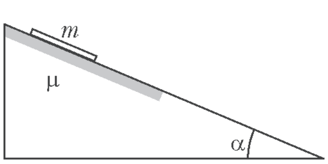

Рис. 2

3. К вертикальной стене одним концом шарнирно прикреплен однородный тяжелый жесткий стержень, на другом конце которого подвешен груз, как показано на рисунке 3. Стержень удерживают в горизонтальном положении легкой жесткой проволокой, прикрепленной к нему на расстоянии l = 30 см от шарнира. Другой конец проволоки прикреплен к стене так, что проволока и стержень лежат в одной вертикальной плоскости. На каком расстоянии h от шарнира должна быть прикреплена к стене проволока, чтобы ее абсолютное удлинение было минимальным? Трением в шарнире пренебречь.

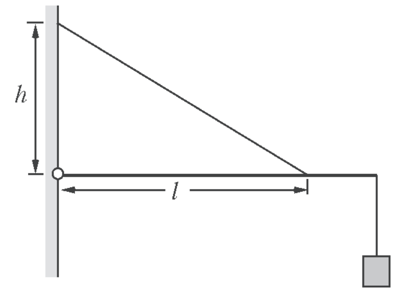

Рис. 3

4. На гладком горизонтальном столе лежат одинаковые грузы малых размеров, расположенные в вершинах правильного n-угольника. Масса каждого груза равна m. Грузы соединены между собой одинаковыми легкими пружинами жесткостью k. Грузы смещают от положений равновесия на одинаковые расстояния так, как показано на рисунке 4. После этого грузы одновременно отпускают. Определите период малых колебаний грузов. Считать, что при колебаниях оси пружин остаются прямолинейными.

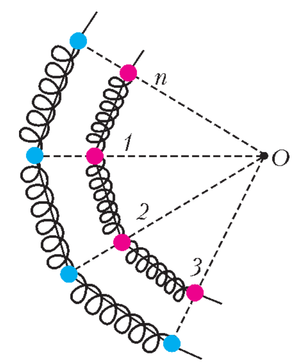

Рис. 4

5. На рисунке 5 показана зависимость внутренней энергии U идеального газа, используемого в качестве рабочего вещества теплового двигателя, от количества теплоты Q, которое газ получил с момента *1* начала цикла *1–2–3–1*. Найдите КПД этого цикла.

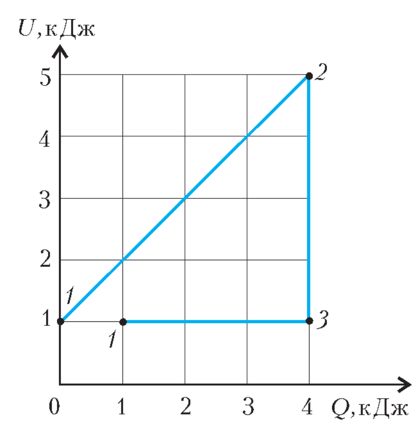

Рис. 5

6. В цилиндре под поршнем находится смесь воздуха, насыщенного водяного пара и воды в сконденсированном состоянии. Масса воды равна массе водяного пара. Если изотермически уменьшить объем смеси в k = 2 раза, ее давление увеличится в n = = 1,5 раза. Во сколько раз изменится давление смеси, если ее объем не уменьшать, а увеличивать при той же температуре до тех пор, пока вся вода не испарится?

7. Четыре незаряженные одинаковые металлические пластины, площадь каждой из которых S, расположены в воздухе на малом расстоянии d параллельно друг другу так, как показано на рисунке 6. Внутренним пластинам сообщили равные по модулю, но противоположные по знаку заряды. Затем внешние пластины соединили между собой через резистор, сопротивление которого R. В

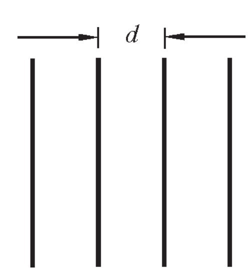

Рис. 6

результате в этом резисторе выделилось количество теплоты Q. Пренебрегая излучением, определите модуль q зарядов внутренних пластин.

8. Металлический стержень, один конец которого шарнирно закреплен в точке O, вращают с такой постоянной угловой скоростью ω, что он образует с вертикалью постоянный угол α (рис.7). Другой конец стержня касается проводящей полусферы. Центр полусферы совпадает с точкой O. Радиус полусферы R. Вся система находится в однородном вертикальном магнитном поле, индукция которого B. К полусфере подключен резистор с достаточно большим сопротивлением r. Другой конец резистора подключен к стержню в точке O. Найдите мощность P, выделяющуюся в резисторе.

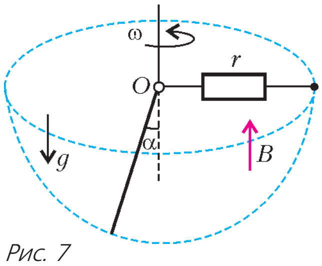

Рис. 7

9. К идеальной катушке индуктивности, зашунтированной резистором сопротивлением R, подключают на время τ источник с малым внутренним сопротивлением и ЭДС $\mathcal{E}$. При этом за время подключения источника и время после его отключения в резисторе выделяются одинаковые количества теплоты. Найдите индуктивность катушки L.

10. Оптическая система состоит из тонкой собирающей линзы $Л$ с фокусным расстоянием F и плоского зеркала $З$, плоскость которого перпендикулярна главной оптической оси линзы. Между линзой и зеркалом находится стержень C, расположенный перпендикулярно главной оптической оси линзы так, как показано на рисунке 8. Расстояние от стержня до линзы равно d, причем $d > F$. Найдите расстояние x между линзой и зеркалом, при котором отношение размеров двух действительных изображений стержня равно $k > 1$.

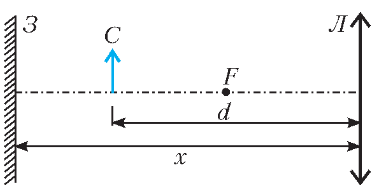

Рис. 8

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Задачи устного экзамена

1. Тяжело нагруженную лодку подтягивают к пристани с помощью веревки, перекинутой через ролик, находящийся на высоте h над уровнем воды. По какому закону должна меняться со временем сила $F(t)$, которую нужно прикладывать к веревке, чтобы поддерживать скорость движения лодки в воде постоянной и равной v_0? В момент времени $t = 0$ лодка движется со скоростью v_0, сила, с которой тянут за веревку, равна F_0, а расстояние от лодки до пристани составляет l_0 (рис.9). Сопротивление воды считать пропорциональным скорости лодки.

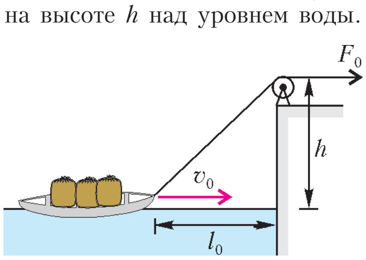

Рис. 9

2. Правая чаша рычажных весов находится под мелким моросящим дождем, а левая укрыта от него навесом. Каждая чаша представляет собой тонкостенную цилиндрическую емкость с площадью дна $S = 0{,}05$ м^2 и высотой бортика $h = 1$ мм. Интенсивность равномерно падающего дождя такова, что дождевая вода целиком заполняет предварительно опорожненную чашу весов за время $\tau = 30$ с. Какой массы m гирю нужно положить на левую чашу весов, чтобы уравновесить весы в случае, когда правая чаша заполнена дождевой водой до краев? Капли дождя падают вертикально со скоростью $v = 3$ м/с. Плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м^3. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2. Соударение капель с водой в чаше считать неупругим.

3. Развивая максимальную мощность двигателя, автобус движется по горизонтальному участку шоссе с постоянной скоростью v_0. Когда автобус при неизменной мощности двигателя въезжает на подъем с углом наклона α_1, его скорость падает до v_1. С какой скоростью v_2 автобус будет преодолевать подъем с углом наклона $\alpha_2 < \alpha_1$ при той же мощности, развиваемой двигателем? Проскальзывание ведущих колес автобуса на всех участках шоссе отсутствует. Силу сопротивления воздуха считать пропорциональной скорости автобуса.

4. Два одинаковых шарика подвешены на невесомых нерастяжимых нитях, как показано на рисунке 10. Силы натяжения верхней и средней нитей T_1 и T_2 известны. Найдите силу натяжения T_3 нижней нити, если она горизонтальна.

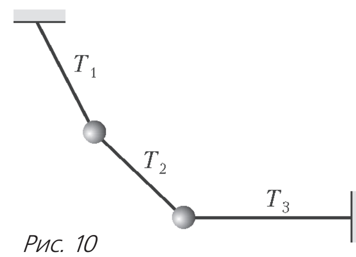

Рис. 10

5. Тонкостенный стакан вместимостью $V_0 = 200$ см^3 и массой $m = 100$ г погружают в воду, держа его дном вверх. На какой глубине h предоставленный самому себе стакан перестанет всплывать? Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па, плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м^3, температура воды не меняется с глубиной. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2. Размерами стакана по сравнению с глубиной его погружения, давлением паров воды, а также объемом стенок стакана пренебречь.

6. Садовый насос, расположенный в скважине на глубине h, подает воду на поверхность земли по шлангу площадью сечения S. Какую мощность N развивает насос, если известно, что он наполняет водой ведро объемом V за время τ? Плотность воды ρ, ускорение свободного падения g.

7. К потолку покоящейся кабины лифта на пружине жесткостью k подвешена гиря массой m. В некоторый момент времени лифт начинает двигаться вверх с постоянным ускорением a. Какой путь s пройдет кабина лифта к тому моменту, когда длина пружины достигнет максимального значения?

8. В космический корабль, совершающий межпланетный перелет, попал метеорит, пробивший в корпусе маленькое отверстие, через которое наружу стал выходить воздух. Объем корабля $V = 1000$ м^3, начальное давление воздуха в нем $p_0 = 10^5$ Па, температура $t = 27$ °C. Через какое время τ после попадания метеорита давление воздуха в корабле уменьшится на $\Delta p = 10^3$ Па, если площадь отверстия $S = 1$ см^2? Молярная масса воздуха $M = 29$ г/моль, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}3$ Дж/(моль·К). При решении учесть, что $\Delta p \ll p_0$; температуру воздуха внутри корабля считать постоянной, а процесс истечения воздуха – квазиравновесным.

9. В закрытом цилиндрическом сосуде под невесомым тонким поршнем находится один моль идеального одноатомного газа при температуре $T_0 = 300$ К (рис.11). В пространстве над поршнем создан ваку-

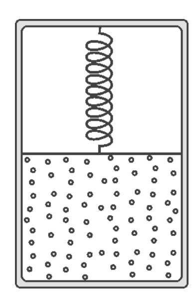
Рис. 11

ум. Поршень удерживается в равновесии пружиной, помещенной между поршнем и крышкой цилиндра, причем пружина не деформирована, если поршень располагается у дна цилиндра. Какое количество теплоты Q нужно сообщить газу, чтобы его объем увеличился в $n = 1{,}5$раза? Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}3$ Дж/(моль·К). Теплоемкостью сосуда и теплообменом с окружающей средой пренебречь.

10. В закрытом с одного конца цилиндрическом сосуде находятся два тонких поршня, способных перемещаться без трения и разделяющих пространство внутри сосуда на два отсека (рис.12). В левом отсеке заключен водяной пар при давлении p, а в правом – воздух при том же давлении, причем длины отсеков одинаковы и равны L. Правый поршень медленно передвинули влево на расстояние l. На какое расстояние x сместится при этом левый поршень? Температуру пара и воздуха считать постоянной. Давление насыщенного водяного пара при этой температуре равно $2p$.

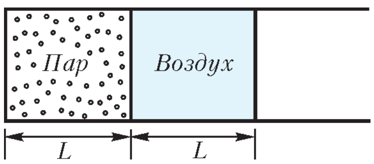

Рис. 12

11. Пластины плоского воздушного конденсатора расположены горизонтально. Верхняя пластина сделана подвижной и находится в начальном состоянии на высоте $h = 1$ мм над нижней пластиной, которая закреплена. Конденсатор зарядили до разности потенциалов $U = 1000$ В, отключили от источника и освободили верхнюю пластину. Какую скорость приобретет падающая пластина к моменту соприкосновения с нижней пластиной? Масса верхней пластины $m = 4{,}4$ г, площадь каждой пластины $S = 0{,}01$ м^2, электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м. Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

12. Экран электронно-лучевой трубки представляет собой прямоугольник с диагональю $d = 51$ см и соотношением сторон 3:4. Сила тока в электронном луче $I = 0{,}5$ мА. Предположим, что все электроны луча, попавшие на экран, остаются на нем, распределяясь по его поверхности равномерно. Через какое время τ после включения устройства напряженность электрического поля вблизи поверхности экрана достигнет по величине напряженности поля на поверхности уединенного металлического шара радиусом $R = 10$ см, заряженного до потенциала $\varphi = 3$ кВ? Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

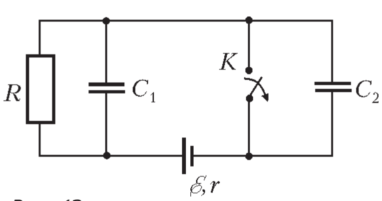

Рис. 13

13. В цепи, изображенной на рисунке 13, ключ K в течение длительного времени находился в замкнутом состоянии. В некоторый момент ключ разомкнули. Какое количество теплоты Q выделилось в схеме после этого? Емкости конденсаторов $C_1 = 1$ мкФ и $C_2 = 2$ мкФ, сопротивление резистора $R = 4$ Ом, ЭДС источника $\mathcal{E} = 10$ В, его внутреннее сопротивление $r = 1$ Ом.

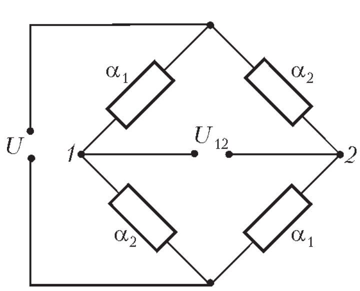

Рис. 14

14. Для измерения температуры t собрана схема, состоящая из четырех резисторов и подключенная к источнику с ЭДС U и малым внутренним сопротивлением (рис.14). Температурные коэффициенты сопротивления резисторов попарно равны и составляют α_1 и α_2 соответственно, а сопротивления всех резисторов при температуре 0 °C одинаковы. Как зависит напряжение U_{12} между точками *1* и *2* от температуры? Считать, что в диапазоне измеряемых температур $\alpha_1 t \ll 1$ и $\alpha_2 t \ll 1$.

15. Два параллельных металлических стержня расположены на расстоянии l друг от друга в плоскости, перпендикулярной однородному магнитному полю с индукцией B (рис.15). Стержни соединены неподвижным проводником сопротивлением R. Два других проводника сопротивлениями R_1 и R_2 находятся слева и справа от неподвижного проводника и скользят по стержням в одну и ту же сторону со скоростями v_1 и v_2. Какой ток I течет по неподвижному проводнику? Сопротивление стержней пренебрежимо мало.

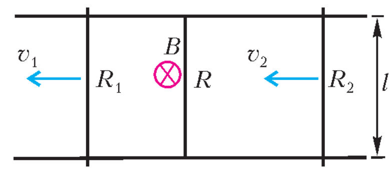

Рис. 15

16. Цепь, изображенная на рисунке 16, состоит из конденсатора, катушки индуктивности, источника с ЭДС $\mathcal{E}$ и пренебрежимо малым внутренним сопротивлением, а также ключа K. В начальный момент времени ключ разомкнут, а конденсатор заряжен до напряжения U_0 с полярностью, указанной на рисунке. Какого максимального значения U_{max} может достичь напряжение на конденсаторе после замыкания ключа? Сопротивлением катушки и соединительных проводов пренебречь.

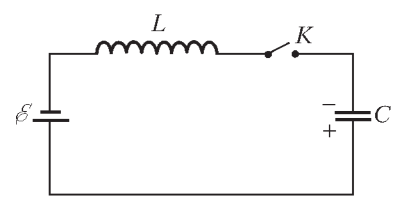

Рис. 16

17. Оптическая схема, изображенная на рисунке 17, состоит из непрозрачного экрана с маленьким отверстием O и двух плоских зеркал *1* и *2*. Луч света проходит через отверстие O, отражается от зеркал *1* и *2* и выходит обратно через это отверстие, причем угол падения луча на зеркало *1* равен α, а после отражения от зеркала *2* луч распространяется параллельно зеркалу *1*. Когда зеркало *1* сместили влево параллельно самому себе на расстояние d_1, луч перестал попадать в отверстие O. На какое расстояние d_2 нужно сместить параллельно самому себе зеркало *2*, чтобы луч снова попал в это отверстие? Размер отверстия пренебрежимо мал.

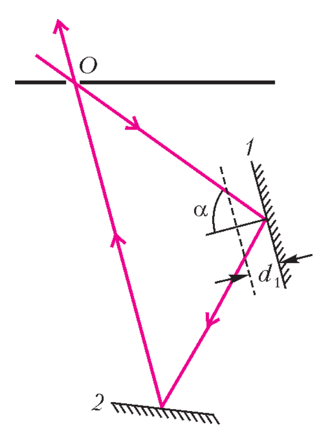

Рис. 17

18. Оптический сканер представляет собой правильную шестигранную призму с зеркальной поверхностью, вращающуюся вокруг своей оси O (рис.18). Ширина каждой грани a. Снизу на сканер падает вертикальный световой луч, продолжение которого проходит на расстоянии $a/2$ от оси вращения сканера. Рядом со сканером вертикально расположена тонкая собирающая линза большого диаметра. Фокусное расстояние линзы равно F, а ее главная оптическая ось проходит через ось вращения сканера. В правой фокальной

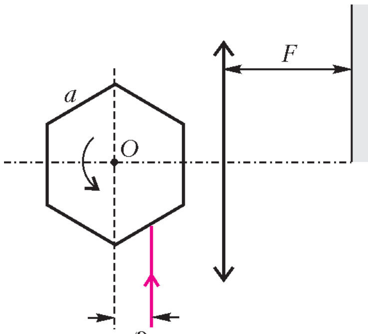

Рис. 18

плоскости линзы расположен широкий экран, нижний край которого находится на оптической оси линзы. Определите длину d отрезка, который заметает на экране световой луч, отраженный от поверхности сканера.

19. Оптическая система состоит из двух одинаковых тонких собирающих линз с фокусным расстоянием F каждая. Линзы расположены на расстоянии L друг от друга ($F < L < 2F$) так, что их главные оптические оси совпадают. Слева от системы на расстоянии $2F$ от левой линзы находится точечный источник света. На какое расстояние h сместится изображение источника, даваемое этой системой, если правую линзу сдвинуть перпендикулярно ее оптической оси вниз на расстояние H?

20. Интерференционная картина «кольца Ньютона» наблюдается в отраженном монохроматическом свете с длиной волны $\lambda = 0,63$ мкм. Интерференция возникает в заполненном бензолом тонком зазоре между выпуклой поверхностью плосковыпуклой линзы и плоской стеклянной пластинкой. Найдите радиус r первого (внутреннего) темного кольца, если радиус кривизны поверхности линзы R = 10 м, а показатели преломления линзы и пластинки одинаковы и превышают показатель преломления бензола n = 1,5. Свет падает по нормали к пластинке.

Химический факультет

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Сформулируйте закон электролиза Фарадея.

2. Что такое система отсчета?

3. Протон движется в электрическом и магнитном полях по прямой линии. Какова скорость протона, если индукция магнитного поля B = 50 мТл, а напряженность электрического поля $E = 10^4$ В/м ?

4. На тонкую рассеивающую линзу падает луч света *1*, ход преломленного в линзе луча *2* известен (рис.19). Линзу заменили на собирающую с теми же положениями фокусов. Постройте ход луча *1* после преломления в этой линзе.

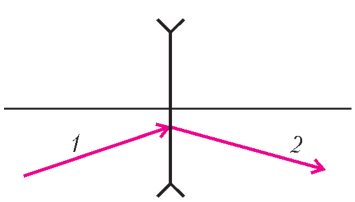

Рис. 19

5. В баллоне находится двухатомный идеальный газ. При нагревании газа его абсолютная температура увеличилась в два раза, а половина молекул диссоциировала (распалась на атомы). Во сколько раз изменилось (увеличилось или уменьшилось) давление газа в баллоне?

6. По двускатной крыше вдоль поверхности AB соскальзывает сосулька (рис.20). Какова скорость сосульки v_0 в момент отрыва от поверхности AB, если расстояние от точки B до точки соударения с поверхностью крыши BC равно l, а скорость сосульки перед соударением в n раз больше v_0? Считать угол α известным, сопротивлением воздуха пренебречь.

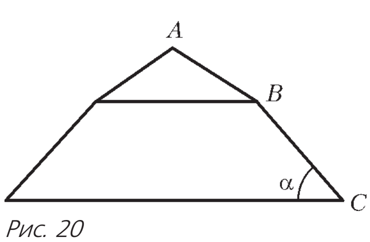

Рис. 20

7. На легкой диэлектрической нити в однородном магнитном поле подвешен маленький положительно заряженный шарик (рис.21). Шарик отклонили от положения равновесия так, что нить стала горизонтальной, и отпустили. Найдите силу натяжения нити при прохождении шариком нижнего положения. Индукция магнитного поля равна B и направлена перпендикулярно плоскости движения шарика. Масса и заряд шарика m и q соответственно, длина нити l.

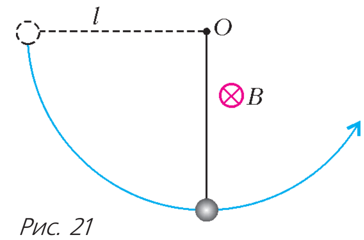

Рис. 21

8. При нормальном падении на дифракционную решетку пучка света от гелий-неонового лазера с длиной волны $\lambda = 633$ нм наблюдается всего k = 7 дифракционных максимумов. Каков период d данной дифракционной решетки?

9. В цепи, схема которой изображена на рисунке 22, сопротивление резисторов R = 4 Ом, внутреннее сопротивление источника тока r = 2 Ом. Во сколько раз изменится энергия электрического поля конденсатора после замыкания ключа K?

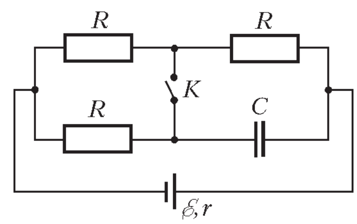

Рис. 22

10. На гладкой горизонтальной поверхности находится клин, имеющий массу M = 0,64 кг (рис.23). О гладкую наклонную поверхность клина ударяется шарик массой m = 0,15 кг, летевший горизонтально. Каким должен быть угол клина α, чтобы шарик отскочил вертикально вверх? Удар считать абсолютно упругим.

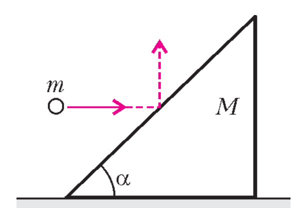

Рис. 23

Вариант 2

1. Сформулируйте законы преломления света.

2. Что такое резонанс?

3. Магнитный поток через поверхность, ограниченную проводящим контуром, меняется так, как показано на рисунке 24. Постройте график зависимости от времени ЭДС, индуцируемой в этом контуре.

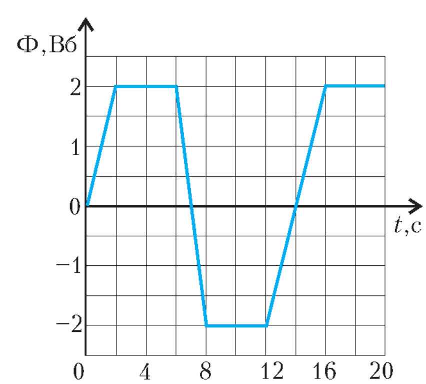

Рис. 24

4. Два одинаковых бруска находятся на наклонной плоскости на одном уровне. Брускам сообщают одинаковые начальные скорости вдоль наклонной плоскости: первому – вниз, к основанию наклонной плоскости, второму – в противоположном направлении, к вершине плоскости. Какой из брусков будет иметь бóльшую скорость, когда они окажутся у основания наклонной плоскости? Считать, что коэффициент трения между брусками и поверхностью $\mu < \mathrm{tg}\,\alpha$.

5. В середине неподвижно закрепленного горизонтального цилиндрического сосуда, открытого с одной стороны, находится тонкий поршень. В закрытой части цилиндра – воздух. Какую минимальную силу следует приложить к поршню, чтобы медленно вытащить его из цилиндра? Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па. Площадь поперечного сечения цилиндра $S = 4$ см^2. Температуру считать постоянной. Трением пренебречь. Воздух можно считать идеальным газом.

6. Батарея состоит из четырех конденсаторов, соединенных так, как показано на рисунке 25. Во сколько раз изменится электроемкость батареи (увеличится или уменьшится) при замыкании ключа K?

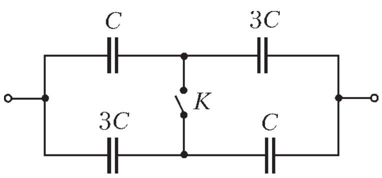

Рис. 25

7. Для размораживания водопроводной трубы, в которой замерзла вода, применили электрический нагреватель. Нагреватель подключили к источнику напряжением $U = 220$ В. Каким должно быть сопротивление нагревателя, чтобы за время $\tau = 1$ мин он растапливал $m = 1$ кг льда? Учесть, что потери тепла составляют $k = 40\%$. Удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}3 \cdot 10^5$ Дж/кг.

8. Стержень длиной $l = 1$ м опирается на пол и на стену. Нижний конец стержня скользит по полу, удаляясь от стены, а верхний скользит по стене вниз. Найдите путь, пройденный точкой C, лежащей на середине стержня, при движении стержня от вертикального до горизонтального положения.

9. В цепи, схема которой приведена на рисунке 26, резисторы имеют сопротивления $R_1 = 100$ Ом и $R_2 = 200$ Ом. Амплитуда подведенного напряжения $U_0 = 20$ В. Какое количество теплоты выделяется в цепи за время $\tau = 1$ мин? Период колебаний напряжения $T \ll \tau$. Диоды считать идеальными.

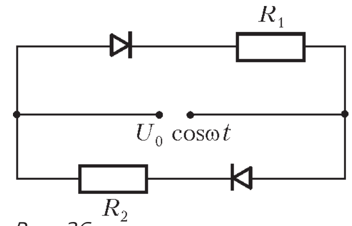

Рис. 26

10. Тонкий стержень AB расположен под углом $\alpha = 45°$ к главной оптической оси собирающей линзы (рис.27). Под каким углом β к оси расположено действительное изображение стержня, даваемое линзой? Фокусное расстояние линзы $F = 20$ см. Расстояние от нижнего конца стержня до линзы $d = 60$ см.

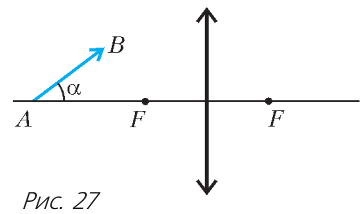

Рис. 27

Публикацию подготовили А.Бегунц, С.Волошин, В.Воронин, Е.Григорьев, Д.Денисов, А.Зотеев, В.Королев, Т.Лукашенко, Г.Медведев, В.Панферов, В.Погожев, А.Разгулин, И.Сергеев, А.Склянкин, В.Ушаков, Е.Хайлов, С.Чесноков, Е.Шикин, Б.Щедрин

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

КОНКУРС «МАТЕМАТИКА 6–8»

(см. «Квант» №4 за 2007 г.)

1. Занумеруем монеты слева направо вдоль горизонтального отрезка, на котором они лежат: 1, 2, ..., 99, 100. Сдвинем все четные монеты вниз, а потом «изогнем» два полученных горизонтальных отрезка с монетами так, чтобы верхние (нечетные) монеты расположились вдоль верхней части окружности, а нижние (четные) – вдоль нижней (рис.1). В этом случае любые две соседние монеты отличаются по весу менее, чем на 0,02 грамма.

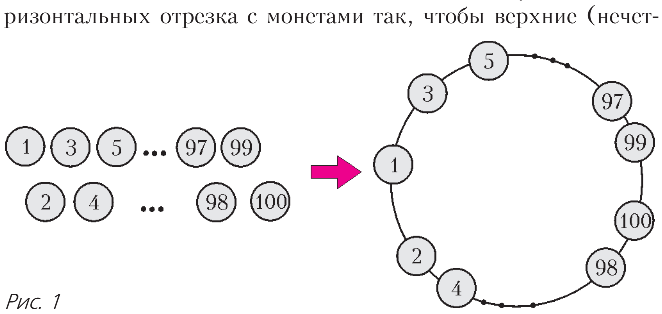

Рис. 1

2. а) См. рис.2. Несложно убедиться в том, что если при пересечении трех кругов образуются 6 областей, то найдется круг, содержащий ровно 3 области. Любая сумма, большая 15 и составленная из чисел от 1 до 6, требует наличия в каждом круге не менее 4 областей.

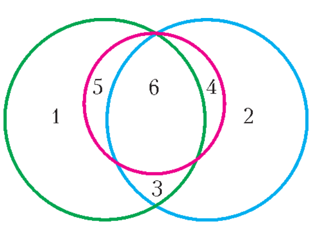

Рис. 2

б) См. рис.3 (один из кругов полностью содержится в другом).

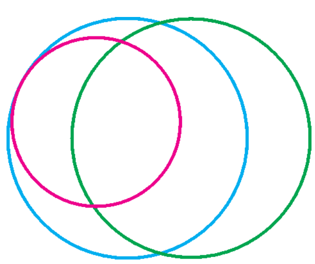

Рис. 3

в) См. рис.4. В многоугольниках $ACEFLGHK$, $ABDLFHK$, $BCEGLK$ сумма чисел равна 16.

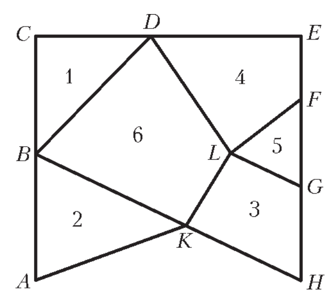

Рис. 4

3. Запишем доказываемое неравенство в виде

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{q}+\frac{1}{p}+\frac{1}{n}+\frac{1}{m}+\frac{201}{mnpqr} \le 2 .$$

Сумма дробей в левой части максимальна лишь в том случае, когда p, q, r, m, n принимают минимально возможные значения, то есть выбираются из множества {1, 3, 5, 7, 9}. Тогда в левой части стоит выражение $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{201}{945} = 2 \le 2$.

4. Традиционное решение основано на свойстве средней линии треугольника. Мы приведем другое решение, использующее идею площади. Пусть точка M делит пополам сторону AB, а точка N – сторону CD четырехугольника $ABCD$ и пусть MN делит пополам диагональ AC в точке K (рис.5). Так как в четырехугольнике

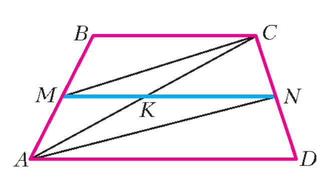

Рис. 5