Глава 10 **ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ**

Алгоритмы

А-1 *Задание числовых последовательностей*

1. Рекуррентный способ

Выпишите первые десять членов последовательности, заданной рекуррентно.

1) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 5$

2) $a_1 = 10;\ a_{n+1} = a_n - 3$

3) $a_1 = \frac{1}{2},\ a_{n+1} = 2a_n$

4) $a_1 = 81;\ a_{n+1} = -\frac{a_n}{3}$

5) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 2a_n - 1$

6) $a_1 = 0;\ a_{n+1} = 2a_n - 1$

7) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + n - 1$

8) $a_1 = 2;\ a_{n+1} = a_n + (-1)^n$

9) $a_1 = 1;\ a_{n+1} = a_n \cdot (n+1)^{(-1)^n}$

10) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = 1 - \frac{1}{a_n}$

11) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{n+1}{a_n}$

12) $a_1 = 3,\ a_2 = 5,\ a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$

13) $a_1 = 0;\ a_2 = 1;\ a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$

14) $a_1 = \frac{1}{2};\ a_2 = 1;\ a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$

15) $a_1 = 3;\ a_2 = -3;\ a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$

16) $a_1 = 1;\ a_2 = 5;\ a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$

17) $a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$

18) $a_1 = 0;\ a_2 = 1;\ a_{n+2} = a_{n+1} \cdot a_n + 1$

2. Формула общего члена

Напишите первые десять членов последовательности.

1) $a_n = 2n - 3$

2) $a_n = n^2 - 2$

3) $a_n = (-1)^{n+1}$

4) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

5) $a_n = n^2 - 5n$

6) $a_n = \left[\sqrt{2}\right]^n$, [ ] – обозначение целой части числа

7) $a_n = \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]^n$

3. Словесный способ

Напишите первые десять членов последовательности

1) Последовательность натуральных чисел, кратных пяти.

2) Последовательность натуральных чисел, дающих в остатке 3 при делении на 5.

3) Последовательность приближенных значений числа π с точностью до 10^{-n} по недостатку.

4) Последовательность степеней числа 2 с натуральными показателями.

5) Последовательность натуральных чисел, являющихся произведениями двух различных простых чисел.

6) Последовательность чисел, обратных простым числам.

А-2 *Арифметическая прогрессия*

1. Определение арифметической прогрессии

1.1. Выпишите первые 10 членов арифметической прогрессии.

Для каждой из них напишите формулу общего члена.

1) $a_1 = 1$; $d = 3$

2) $a_1 = 1$; $d = 10$

3) $a_1 = 1$; $d = -5$

4) $a_1 = 100$; $d = -4$

5) $a_1 = 3$; $d = 0{,}2$

6) $a_1 = 0$; $d = -\frac{\pi}{2}$

1.2. Докажите, что последовательности, заданные указанными формулами, являются арифметическими прогрессиями. Найдите разности этих прогрессий.

1) $a_n = 2n + 1$

2) $a_n = 1 - 3n$

3) $a_n = \frac{n}{2} - 1$

4) $a_n = -5n$

5) $a_n = \frac{4n+1}{3}$

6) $a_n = 0{,}2n - 5$

2. Задание арифметической прогрессии

2.1. Составьте формулу общего члена арифметической прогрессии, о которой известно следующее:

1) $a_5 = 15$; $a_{10} = 25$

2) $a_9 = -30$; $a_{19} = -45$

3) $a_5 = 0{,}2$; $a_{16} = 9$

4) $a_9 = -0{,}1$; $a_{17} = -0{,}9$

2.2. Найдите первый член и разность прогрессии, о которой известно следующее:

1) $a_3 = 5$, $a_5 = 19$

2) $a_2 = 1$, $a_{102} = 301$

3) $a_4 = 10$, $a_7 = 19$

4) $a_1 + a_7 = 10$, $a_3 + a_6 = 8$

5) $a_2 + a_5 - a_3 = 10$, $a_1 + a_6 = 17$

6) $a_2 + a_4 = 16$, $a_1 \cdot a_5 = 28$

7) $a_4^2 + a_{12}^2 = 1170$, $a_7 + a_{15} = 60$. Найдите a_1 и d.

8) $a_2 = 19$, a_{22} в 10 раз больше первого члена

2.3. Отрезки арифметической прогрессии

1) Между числами 1 и 29 вставьте шесть чисел, которые с данными числами составили бы арифметическую прогрессию.

2) Между числами 0 и 1 вставьте $n - 1$ чисел так, чтобы вместе с крайними они составляли бы арифметическую прогрессию.

3) Между числами a и b содержится m чисел, образующих вместе с данными числами арифметическую прогрессию. Найдите ее разность.

4) Составьте формулу общего члена арифметической прогрессии, начинающуюся с 1, зная, что сумма первых пяти членов составляет четвертую часть суммы следующих пяти членов.

5) Найдите первый положительный член прогрессии, у которой $a_1 = -101$ и $d = \frac{2}{3}$.

6) Первый член прогрессии равен 1, разность равна $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Найдите член этой прогрессии, ближайший к числу 100.

2.4. Проверьте, является ли число a членом арифметической прогрессии, у которой:

1) $d = 4$, $a_1 = -7$, $a = 41$

2) $d = -2$, $a_1 = 81$, $a = -15$

3) $a_1 = \frac{2}{3}$, $a_3 = \frac{1}{6}$, $a = 5$

4) $a_5 = -21$, $a_7 = -33$, $a = -133$

А-3 *Геометрическая прогрессия*

1. Определение геометрической прогрессии

1.1. Вычислите первые шесть членов прогрессии.

Составьте формулу общего члена.

1) $a_1 = 1$; $q = 3$

2) $a_1 = 1$; $q = -\frac{1}{4}$

3) $a_1 = 10$; $q = -0{,}1$

4) $a_1 = 3$; $q = 2$

5) $a_1 = 1$; $q = 3$

6) $a_1 = 3$; $q = 6$

7) $a_1 = 5$; $q = 1$

1.2. Докажите, что последовательности, заданные указанными формулами, являются геометрическими прогрессиями. Укажите знаменатель прогрессии и первый член.

1) $a_n = 2^n$

2) $a_n = \frac{1}{5^n}$

3) $a_n = (0,1)^n$

4) $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+2}$

5) $a_n = 0,1 \cdot 3^n$

6) $a_n = 5^{3-n}$

2. Задание геометрической прогрессии

2.1. Вставьте между данными числами пропущенные члены так, чтобы получилась геометрическая прогрессия.

1) $a_1 = 1$, $a_3 = 49$

2) $a_2 = 2$, $a_5 = 128$

3) $a_3 = 10$, $a_8 = -10^{-4}$

4) $a_4 = \sqrt{3}$, $a_9 = 27$

5) $a_1 = 8$, $a_9 = 256$

6) $a_1 = 1$, $a_7 = \frac{1}{64}$

7) $a_1 = 5$, $a_6 = 3125$

2.2. Найдите первый член геометрической прогрессии и ее знаменатель.

1) $a_1 + a_3 = 52$, $a_2^2 = 100$

2) $a_1a_2a_3 = 64$, $a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 = 584$

3) $a_1 + a_2 = 15$, $a_3 + a_4 = 60$

2.3. Отрезки геометрической прогрессии

1) Между числами 1 и 2 вставьте одно число так, чтобы оно вместе с данными числами составляло бы геометрическую прогрессию.

2) Между числами 3 и $\frac{3}{16}$ вставьте три числа так, чтобы они вместе с данными числами составляли бы геометрическую прогрессию.

3) Между числами a и b ($0 < a < b$) геометрической прогрессии содержится n ее членов. Каков знаменатель этой прогрессии?

4) Первый член прогрессии равен $\frac{1}{\sqrt{5}}$, знаменатель $q = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Найдите член этой прогрессии, ближайший к числу 13 (седьмому члену ряда Фибоначчи).

5) Между двумя членами a и b геометрической прогрессии со знаменателем $q = \sqrt[12]{2}$ находится семь других ее членов. Определите с тремя знаками после запятой, насколько близко отношение членов b и a к числу $\frac{3}{2}$ (отношение частот для нот, образующих восходящую квинту).

А-4 *Суммирование*

1. Сумма членов арифметической прогрессии

1.1. Найдите n первых членов арифметической прогрессии, о которой известно следующее:

1) $a_1 = 1$; $d = 3$; $n = 10$

2) $a_1 = 100$; $d = -4$; $n = 51$

3) $a_4 = -10$; $a_{10} = 16$; $n = 10$

4) $a_1 = 17$, $a_{25} = 31$; $n = 20$

5) $d = 2$; $n = 10$; $a_{10} = -10$

6) $d = \frac{1}{4}$; $n = 7$; $a_7 = 10\frac{1}{2}$

1.2. Арифметическая прогрессия задана формулой общего члена $a_n = 75 - 4n$. Найдите сумму всех ее положительных членов.

1.3. 1) $s_n = 28$, $a_3 = 8$, $a_5 = 2$. Найдите a_1 и n.

2) $s_3 = 30$, $s_5 = 75$, $s_n = 105$. Найдите a_1, d и n.

3) $s_n = n^2 - n$. Найдите a_1, d.

4) $s_n = 3 + 4n - n^2$. Найдите d.

1.4. Параметры арифметической прогрессии обозначены следующим стандартным образом: a_n – ее n-ый член, d – разность, s_n – сумма первых n ее членов. Определите недостающие данные по указанным в таблице значениям параметров (заполните таблицу).

№ п/п	a_1	d	n	a_n	s_n
1	0	1,5	15		
2	100	–3		–101	
3	–45	3			0
4	10		41	0	
5	–1,1		102		402,9
6	2			101	515
7			5	$1 + 2\sqrt{2}$	5
8		$\frac{1}{3}$		$\frac{11}{6}$	$\frac{10}{3}$
9		7	11		–726
10		–25	41	0	

1.5. В таблицу внесены параметры арифметических прогрессий. Два параметра в каждой строке вычислены неверно. Найдите ошибки и исправьте их.

№ п/п	a_1	d	n	a_n	s_n
1	1	1	100	60	3400
2	1	0,5	10	5	27,5
3	–38	2	15	–20	–400
4	2	11	11	101	500
5	1	–1	41	0	225

2. Сумма членов геометрической прогрессии

2.1. Первый член геометрической прогрессии равен 1, знаменатель $q = -\sqrt{2}$. Найдите сумму ее первых десяти положительных членов.

2.2. Параметры геометрической прогрессии обозначены следующим стандартным образом: a_n – ее n-ый член, q– знаменатель, s_n – сумма первых n ее членов. Определите недостающие данные по указанным в таблице значениям параметров (заполните таблицу).

№ п/п	a_1	q	n	a_n	s_n
1	1	3	10		
2		$\frac{1}{2}$	8	2	
3	2		7	1458	
4		3		567	847
5	$\frac{1}{2}$			$\frac{1}{128}$	$\frac{127}{128}$
6	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{6561}$	
7		–2	19		174763
8			10	32	$31(2+\sqrt{2})$
9	1		4		$\frac{51}{64}$
10	–1	$\frac{3}{2}$			$-\frac{665}{32}$

2.3. Найдите первый член геометрической прогрессии и ее знаменатель.

1) $s_3 = 13,\ \dfrac{a_1 + a_2}{a_2 + a_3} = \dfrac{1}{3}$

2) $s_4{}^2 = m^2,\ a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2 + a_4{}^2 = n^2$

3) $s_4 = m,\ a_1{}^2 - a_2{}^2 - a_3{}^2 + a_4{}^2 = n^2$

2.4. Вычислите сумму.

1) $1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{10}$

2) $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{8} + \ldots + \dfrac{1}{2^{100}}$

3) $2 - 5 + 2^2 - 5^2 + 2^3 - 5^3 + \ldots + 2^{10} - 5^{10}$

4) $9 + 99 + 999 + \ldots + 99\ldots9$ (в последнем числе 10 девяток)

3. Суммирование рядов

3.1. А. Использование формул суммы прогрессий.

Вычислите сумму.

1) $-1 + 5 + 6 + 11 + 12 + 17 + 18 + \ldots + 101 + 102$

2) $1 - 2 + 3 - 2^2 + 3^2 - 2^3 + 3^3 + \ldots - 2^{10} + 3^{10}$

3) $1 + \dfrac{1}{2} + 3 + \dfrac{1}{4} + 5 + \dfrac{1}{8} + \ldots + \dfrac{1}{2^{n-1}} + 2n - 1$

4) $\dfrac{1+1}{2} + \dfrac{1+3}{2^2} + \dfrac{1+3^2}{2^3} + \ldots + \dfrac{1+3^{n-1}}{2^n}$

5) $9 + 99 + 999 + \ldots$ (n членов)

6) $7 + 77 + 777 + \ldots$ (n членов)

В. Степенные суммы.

Пусть $s_n^{(k)} = 1^k + 2^k + \ldots + n^k$.

Известны формулы $s_n^{(1)} = \dfrac{n(n+1)}{2}$; $s_n^{(2)} = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; $s_n^{(3)} = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$;

$s_n^{(4)} = \dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$.

Вычислите следующие суммы:

7) $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)$

8) $\sum\limits_{k=1}^{n} k(2k-1)$

9) $\sum_{k=1}^{n} k(k^2+1)$

10) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$

11) $\sum_{k=1}^{n} (k^2-1)(k^2+2)$

12) $\sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{24}$

C. Метод разностей.

Типичный пример.

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)} = \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = 1-\frac{1}{n+1}.$$

13) $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

14) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n!$ (подсказка: $k \cdot k! = (k+1)! - k!$)

15) $\frac{1}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}$

16) $\sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k!}$

17) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{8\cdot 9\cdot 10}$ (сначала проверьте тождество $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k}\right)-\frac{1}{k+1}$)

18) $\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{4k^2-1}$ (подсказка: $\frac{k^2}{4k^2-1}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$)

3.2. Зная сумму членов последовательности $1, 2q, 3q^2, \ldots, nq^{n-1}$, найдите следующие суммы.

1) $1+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\ldots+\frac{n}{2^{n-1}}$

2) $x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n$

3) $a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$, где $a_1, \ldots, a_n$ – арифметическая прогрессия с разностью d, а $b_1, \ldots, b_n$ – геометрическая прогрессия со знаменателем q.

А-5 *Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия*

1. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

1) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots$

2) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}+\dots$

3) $\frac{3}{4}+\frac{3}{8}+\frac{3}{16}+\dots$

4) $\frac{3}{3}+\frac{5}{3^2}+\frac{9}{3^3}+\dots+\frac{1+2^n}{3^n}+\dots$

5) $1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\dots$

6) $\frac{4}{3}+1+\frac{3}{4}+\frac{9}{16}+\dots$

7) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\dots$

8) $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}+\dots$

9) $1-\left(\sqrt{2}-1\right)+\left(\sqrt{2}-1\right)^2-\left(\sqrt{2}-1\right)^3+\dots$

10) $\frac{1+2}{2^2}+\frac{1+2^2}{2^4}+\frac{1+2^3}{2^6}+\dots$

2. Обратите периодическую дробь в обыкновенную.

1) 0,66…

2) 2,1333…

3) 0,5242424…

4) 2,0090909…

3. Найдите сумму всех дробей вида $\frac{1}{m^n}$ при всех m и n, больших или равных двум. Для этого расположите эти числа в виде бесконечной прямоугольной таблицы.

$$\begin{array}{cccc} \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^3} & \frac{1}{2^4} & \dots \\ \frac{1}{3^2} & \frac{1}{3^3} & \frac{1}{3^4} & \dots \\ \frac{1}{4^2} & \frac{1}{4^3} & \frac{1}{4^4} & \dots \end{array}$$

Найдите суммы чисел, стоящих по строкам, которые известны по формулам для сумм прогрессий. Затем сложите все найденные суммы.

А-6 *Свойства последовательностей*

1. Среди следующих последовательностей выберите возрастающие, убывающие и те, которые не являются монотонными.

1) $1,\ \sqrt{2},\ 2,\ 2\sqrt{2},\ \dots,\ a_n = a_{n-1}\cdot\sqrt{2}$

2) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots$

3) $1,\ \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}},\ \dots,\ a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

4) $\frac{1}{3}, \frac{2^2}{3^3}, \frac{3^2}{3^3},\ \dots,\ a_n = \frac{n^2}{3^n}$

5) $1,\ \sqrt{2},\ \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4},\ \dots$

6) $1,\ \frac{2}{2!}, \frac{2^2}{3!},\ \dots,\ a_n = \frac{2^{n-1}}{n!}$

2. Какие из следующих последовательностей являются ограниченными?

1) $1, -2, 3, -4, \ldots, a_n = (-1)^{n+1} \cdot n$

2) $-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, a_n = (-1)^n \cdot \frac{n}{n+1}$

3) $2 \cdot 1, 2 \cdot 2, 2 \cdot 6, 2 \cdot 24, \ldots, a_n = 2 \cdot n!$

4) $2, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{12}, \ldots, a_n = \frac{2}{n!}$

5) $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \ldots, a_n = \frac{n+1}{n}$

6) $0, \frac{3}{2}, \frac{8}{3}, \frac{15}{4}, \ldots, a_n = \frac{n^2-1}{n}$

7) $2, \frac{5}{4}, \frac{10}{9}, \ldots, a_n = \frac{n^2+1}{n^2}$

8) $\frac{1}{2}, \frac{2^2}{2^2}, \frac{9}{8}, \ldots, a_n = \frac{n^2}{2^n}$

9) $\frac{1}{2}, \frac{2}{2^2}, \frac{6}{8}, \ldots, a_n = \frac{n!}{2^n}$

3. Каждая из следующих последовательностей задается многочленом от n некоторой степени k. Определите эту степень, вычисляя последовательности разностей и зная, что при этом степень уменьшается на единицу.

1) 5, 8, 11, 14, 17, …

2) 3, 7, 13, 21, 31, …

3) 1, 3, 6, 10, 15, 21, …

4) 1, 5, 14, 30, 55, 91, …

5) 1, 6, 21, 52, 105, 186, …

6) 0, 12, 72, 240, 600, 1250, …

А-7 *Метод математической индукции*

1. Докажите формулу методом математической индукции.

1) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

2) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{6}$

3) $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$

4) $1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$

5) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

6) $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$

2. Докажите утверждение методом математической индукции.

1) $\frac{n(n+1)}{2}$ – целое число

2) $n^3 + 5n$ делится на 6

3) $\frac{n}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{6}$ – целое число

4) $3^{2^n} - 1$ делится на 2^{n+2}

5) $2^{2n-1} + 3n + 4$ делится на 9.

3. Докажите неравенство.

1) $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}<1-\frac{1}{n}$ $(n \geq 2)$

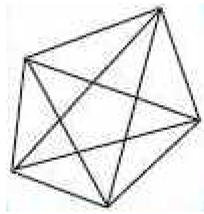
2) $2^n > n^2+2$ $(n \geq 5)$

3) $n! \geq 2^n$ $(n \geq 4)$

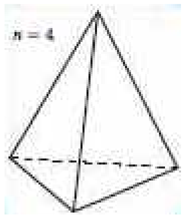
4) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}>\frac{3}{5}$ $(n \geq 3)$

4. Докажите утверждения:

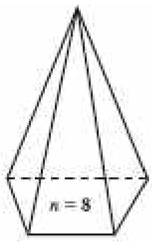
1) Выпуклый n-угольник имеет $\frac{n(n-3)}{2}$ диагоналей.

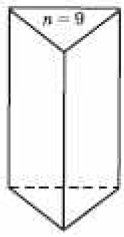


2) Количество вершин выпуклого n-гранника, каждая грань которого является треугольником, равно $\frac{n+4}{2}$.



3) Для каждого $n > 7$ существует многогранник, имеющий n ребер.





5. Проверка формул методом математической индукции.

1) $1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\,\frac{n(n+1)}{2}$

2) $1+2\cdot x+3x^2+\ldots+n\cdot x^{n-1}=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$

3) $1+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+...+\frac{n}{2^{n-1}}=4-\frac{n+2}{2^{n-1}}$

4) $\frac{1}{1\cdot3\cdot5}+\frac{2}{3\cdot5\cdot7}+...+\frac{n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)(2n+3)}$

5) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-...+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$

6) $1^4+2^4+\ldots+n^4=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$

Соответствия

С-1 Угадывание формулы общего члена
С-2 Составление рекуррентного соотношения
С-3 Преобразование последовательности
С-4 Прогрессии в геометрии

С-1 *Угадывание формулы общего члена*

1. Предложите формулу общего члена для следующих последовательностей.

1) $\frac{2}{1}, \frac{5}{2}, \frac{10}{3}, \frac{17}{4}, \frac{26}{5}, \ldots$

2) 1, 3, 7, 15, 31, …

3) 0, 3, 2, 5, 4, 7, …

4) 2, 10, 26, 50, 82, …

5) 2, 6, 12, 20, 30, …

6) $\frac{1}{10}, \frac{1}{30}, \frac{1}{50}, \frac{1}{70}, \frac{1}{90}, \ldots$

7) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$

8) 1, 4, 9, 16, 25, …

9) 0, 7, 26, 63, 124, …

10) 2, 5, 10, 17, 26, …

2. Предложите формулу общего члена для каждой из последовательностей.

1) 4; 8; 12; 16; 20; …

2) 2; 5; 8; 11; 14; …

3) 3; 12; 48; 192; …

4) –1; 1; –1; 1; …

5) 1; –2; 3; –4; …

6) $0; 1; 0; \frac{1}{2}; 0; \frac{1}{3}; 0; \frac{1}{4}; \ldots$

7) 1; 1; 2; 2; 3; 3; 4; 4; …

8) $\frac{1}{2}; \frac{2}{5}; \frac{3}{10}; \frac{4}{17}; \frac{5}{26}; \frac{6}{37}; \ldots$

9) 1; 7; 31; 127; 511; …

10) 2; 10; 26; 82; 242; …

С-2 *Составление рекуррентного соотношения*

1. Предложите рекуррентную формулу для задания следующих последовательностей.

1) 2, –6, 18, –54, 162, –486, …

2) 6, 6 · 3, 6 · 3 · 4, …

3) 5, 7, 10, 14, 19, 25, 32, …

4) $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{24}, -\frac{1}{120}, \ldots$

5) 1 · 3, 1 · 3 · 5, 1 · 3 · 5 · 7, 1 · 3 · 5 · 7 · 9, …

6) 7, 13, 25, 49, 97, …

7) 3, 5, 9, 17, 33, 55, …

8) 3, 9, 6, –3, –9, –6, 3, …

2. Предложите рекуррентное соотношение для задания последовательности.

1) 2, 9, 16, 23, 30, …

2) $3, -\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{8}, \ldots$

3) 1, 2, 5, 10, 17, 26, …

4) $1, \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{6}{8}, \frac{24}{16}, \frac{120}{32}, \ldots$

5) 1, 2, 6, 15, 31, 56, 82, …

6) 0, 3, 2, 5, 4, 7, 6, …

7) $1, \frac{2}{1}, 3\cdot\frac{1}{2}, \frac{4\cdot 2}{1\cdot 3}, 5\cdot\frac{3}{2\cdot 4}, \frac{2\cdot 4\cdot 6}{1\cdot 3\cdot 5}, \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6}, \ldots$

8) 1, 3, 4, 7, 11, 18, …

9) 2, 5, 3, –2, –5, –3, 2, 5, …

10) 1, 2, 4, 9, 23, 64, 186, 551, …

С-3 *Преобразование последовательности*

1. Преобразования арифметической прогрессии

Дана арифметическая прогрессия $a_1, a_2, \ldots$ с разностью d_0. Будут ли арифметическими прогрессиями следующие последовательности? Если ответ положителен, найдите разность новой прогрессии.

1) $a_1, a_3, a_5, \ldots$

2) $a_2, a_5, a_8, a_{11}, \ldots$

3) $b_1, b_2, \ldots$, где $b_n = a_n + c$

4) $b_1, b_2, \ldots$, где $b_n = a_n + kn$

5) $b_1, b_2, \ldots$, где $b_n = ka_n$

6) $b_1, b_2, \ldots$, где $b_n = a_n + n^2$

7) $b_1, b_2, \ldots$, где $b_1 = a_1 + \ldots + a_k$, $b_2 = a_{k+1} + \ldots + a_{2k}$, $b_3 = a_{2k+1} + \ldots + a_{3k}$ и т. д.

8) $b_1, b_2, \ldots$, где $b_n = a_{n+1} + a_n$

9) $b_1, b_2, \ldots$, где $b_n = 3a_{n+1} + 2a_n$

10) Будет ли последовательность $2^{a_1}, 2^{a_2}, 2^{a_3}, \ldots$ геометрической прогрессией?

2. Преобразования геометрической прогрессии

Дана геометрическая прогрессия $a_1, a_2, \ldots$ со знаменателем q_0. Будут ли геометрическими прогрессиями следующие последовательности? Если ответ положителен, найдите знаменатель новой прогрессии.

1) $b_2, b_4, b_6, \ldots$

2) $b_1, b_4, b_7, b_{10}, \ldots$

3) $\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \frac{1}{b_3}, \ldots$

4) $\sqrt{b_1}, \sqrt{b_2}, \sqrt{b_3}, \ldots$

5) $b_1, b_2, \ldots$, где $b_n = 2a_n$

6) $b_1, b_2, \ldots$, где $b_n = a_n^2$

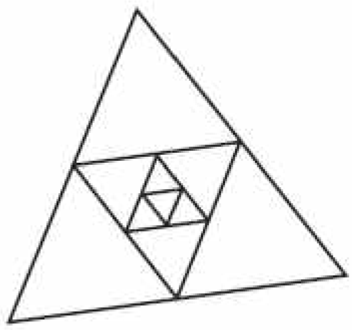
7) $b_1, b_2, \ldots$, где $b_n = a_{n+1} + a_n$

8) $b_1, b_2, \ldots$, где $b_n = ka_{n+1} + la_n$

9) $b_1, b_2, \ldots$, где $b_n = a_{n+1} \cdot a_n$

10) Будет ли арифметической прогрессией последовательность $\lg a_1, \lg a_2, \lg a_3, \ldots$?

С-4 *Прогрессии в геометрии*



1. В треугольнике соединяют середины сторон и получают новый треугольник, с которым поступают аналогично. Так получают последовательность треугольников $\triangle_1$, $\triangle_2$, … . Параметры этих треугольников, встречающиеся в следующих вопросах, имеют те же номера, что и сами треугольники (например, p_k – периметр треугольника $\triangle_k$ и т. п.).

а) Какие последовательности образуют следующие величины?

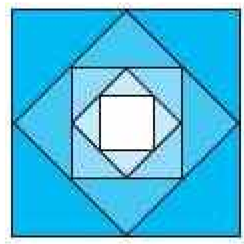
– периметры $p_1, p_2, \ldots$ построенных треугольников;

– площади $S_1, S_2, \ldots$ треугольников;

– суммы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ их углов;

– радиусы $R_1, R_2, \ldots$ описанных окружностей.

б) Вычислите суммы $p = p_1 + p_2 + \ldots$ и $S = S_1 + S_2 + \ldots$.



2. В квадрате соединяют середины сторон и получают новый квадрат, с которым поступают аналогично. Обозначим последовательность построенных квадратов через $K_1, K_2, \ldots$, а через L_i обозначим часть квадрата K_i, получающуюся после вырезания из него следующего квадрата K_{i+1} ($K_i = L_i \cup K_{i+1}$).

а) Какие последовательности образуют следующие величины?

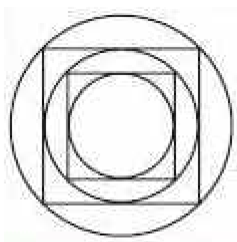
– Стороны $a_1, a_2, \ldots$ квадратов;

– их площади $S_1, S_2, \ldots$;

– площади $T_1, T_2, \ldots$ фигур $L_1, L_2, \ldots$;

– объемы $V_1, V_2, \ldots$ кубов с гранями, равными квадратам $K_1, K_2, \ldots$.

б) Вычислите суммы $a = a_1 + a_2 + \ldots$, $S = S_1 + S_2 + \ldots$, $T = T_1 + T_2 + \ldots$, $V = V_1 + V_2 + \ldots$.

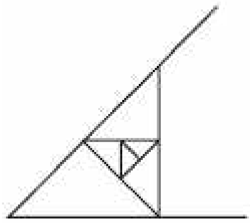


3. В круг радиуса R вписан квадрат, в квадрат вписан круг, в этот круг вписан второй квадрат и т. д. до бесконечности.

а) Какие последовательности образуют радиусы $R_1, R_2, \ldots$ построенных кругов, их площади $S_1, S_2, \ldots$, стороны $a_1, a_2, \ldots$ квадратов и площади $T_1, T_2, \ldots$ квадратов.

б) Вычислите суммы $R_1 + R_2 + \ldots$ и $T_1 + T_2 + \ldots$.

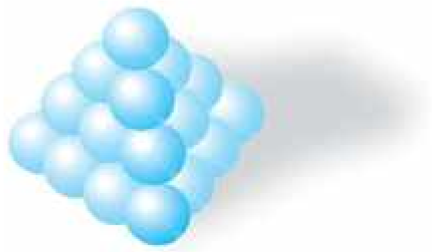
4. На стороне угла в 45° взята точка на расстоянии 1 от вершины. Из этой точки опущен перпендикуляр на вторую сторону, из основания этого перпендикуляра – новый перпендикуляр на первую сторону и т. д.



Вычислите сумму длин всех перпендикуляров.

5. Задача, аналогичная предыдущей, но для угла в 30°.

6. Ядра укладывают в виде правильной n-угольной пирамиды, имеющей k слоев. Какую последовательность образуют числа ядер в одном слое (при $n = 3$ и 4)?



Вычислите общее число ядер при следующих данных:

а) $n = 3$, $k = 10$;

б) $n = 4$, $k = 12$;

в) $n = 3$, в нижнем слое 210 ядер;

г) $n = 3$, пирамида усечена – в нижнем слое 105 ядер, в верхнем – 36;

д) $n = 4$, пирамида усечена, имеет 9 слоев и в верхнем слое 49 ядер.

Приложения

П-1 *Вычисление квадратного корня*

Для приближенного вычисления различных величин обычно используется *метод последовательных приближений*. Он состоит в том, что для нахождения неизвестного точного значения величины x строится последовательность приближенных значений этой величины x_1, x_2, x_3, …, причем так, что абсолютная погрешность приближения, то есть число $|x - x_n|$ «стремится к нулю», т. е. можно добиться того, что она станет как угодно малой.

Для приближенного вычисления квадратного корня из a $(a > 0)$ можно взять произвольное начальное значение $x_1 > 0$ и построить последовательность, задаваемую рекуррентным соотношением $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$.

1) Подставьте в рекуррентную формулу вместо x_{n+1} и x_n неизвестное число x и решите полученное уравнение. Ответ $x = \sqrt{a}$ показывает, что если мы «перейдем к пределу», т. е. заменим при больших номерах n число x_n на x, то мы действительно получим $\sqrt{a}$.

2) Возьмите $a = 9$, $x_1 = 3$ и устно убедитесь, что при всех n число x_n одно и то же и равно $3 = \sqrt{9}$.

3) Возьмите $a = 10$, $x_1 = 3$ и подсчитайте $\sqrt{10}$ с шестью верными знаками после запятой. Для проверки верности цифр воспользуйтесь калькулятором.

4) Обозначим через y_n относительную погрешность, т. е. число $\frac{x_n - \sqrt{a}}{\sqrt{a}}$.

а) Выразите x_n через y_n.

б) Подставьте в рекуррентную формулу вместо x_{n+1} и x_n найденные выражения через y_{n+1} и y_n и докажите рекуррентную формулу $y_{n+1} = \frac{y_n^2}{2(1 + y_n)}$.

в) Проверьте, что $y_n > 0$ (при $n \ge 2$).

г) Докажите, что $y_{n+1} < \frac{y_n}{2}$ (при $n \ge 2$).

Из последнего неравенства вытекает, что относительная погрешность вычисления на каждом шаге уменьшается вдвое.

П-2 *Метод половинного деления*

Метод половинного деления применяется для приближенного вычисления корня уравнения. Пусть мы решаем уравнение $f(x) = 0$ и знаем, что на конечном промежутке $[a; b]$ этот корень единственный, причем функция f на концах промежутка принимает значения разных знаков. Делим отрезок $[a; b]$ пополам, вычисляем значение функции f в его середине и из двух отрезков $\left[a; \frac{a+b}{2}\right]$ и $\left[\frac{a+b}{2}; b\right]$ выбираем тот, на концах которого значения функции f снова будут разных знаков. Продолжая это деление пополам, мы можем поместить корень внутрь отрезка сколь угодно малой длины.

1. Постройте график функции $y = x^5 + x - 1$ на отрезке [0; 1], нанеся несколько точек. Убедитесь, что на этом отрезке уравнение $x^5 + x - 1 = 0$ должно иметь один корень.

2. Вычислите значения y при $x = 0{,}5;\ 0{,}75;\ 0{,}875;\ 0{,}8125;\ 0{,}78125$.

3. Продолжите вычисления, пока не получите значения корня с точностью до 10^{-5}.

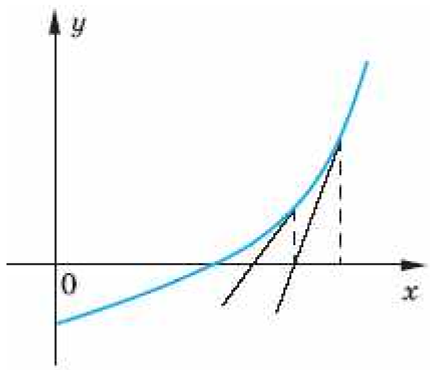
П-3 *Метод касательных Ньютона*

Ньютон предложил метод приближенного нахождения корня уравнения, который «работает» быстрее метода половинного деления. Для уравнения $x^5 + x - 1 = 0$ и промежутка [0; 1] этот метод выглядит следующим образом.

1) Рассмотрите последовательность с первым членом $x_1 = 1$ с помощью рекуррентной формулы Ньютона $x_{n+1} = x_n - \dfrac{y_n}{5x_n^n + 1}$, где y_n – значение функции $y = x^5 + x - 1$ при $x = x_n$. Вычислите x_2 и x_3.

2) Продолжите вычисления до тех пор, пока y_n не станет меньше, чем 10^{-5}.

Замечание. Метод Ньютона называют методом касательных, потому что новая точка P_{n+1} $(x_{n+1}; y_{n+1})$ строится из предыдущей P_n $(x_n; y_n)$ с помощью проведения касательных.



Исследования и доказательства

И-1 *Арифметическая прогрессия*

1. Три числа образуют арифметическую прогрессию

1) Пусть числа a, b, c составляют арифметическую прогрессию.

Докажите тождества.

а) $3(a^2 + b^2 + c^2) = 6(a - b)^2 + (a + b + c)^2$

б) $a^2 + 8bc = (2b + c)^2$

в) $\frac{2}{9}(a + b + c)^3 = a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b)$

2) Числа a^2, b^2, c^2 образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что числа $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$, $\frac{1}{a+b}$ также образуют арифметическую прогрессию.

3) a_k, a_l, a_m – члены арифметической прогрессии с номерами k, l, m соответственно. Докажите тождество $(l - m)\, a_k + (m - k)\, a_l + (k - l)\, a_m = 0$.

4) Даны три многочлена $f_1 = x^2 - 2x - 1$, $f_2 = x^2 + 1$, $f_3 = x^2 + 2x - 1$. Докажите, что их квадраты образуют арифметическую прогрессию.

5) Могут ли числа $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ быть членами одной арифметической прогрессии?

2. Совпадения

1) В некоторой арифметической прогрессии $a_{10} = 30$, $a_{30} = 10$. Найдите a_{35}.

2) Пусть при некоторых p и q имеем $a_p = q$ и $a_q = p$. Найдите a_n.

3) Даны две арифметические прогрессии: $a_1, a_2, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots$. Известно, что для некоторых номеров l, m, n и p, q, r верны равенства $a_l = p$, $a_m = q$, $a_n = r$ и $b_p = l$, $b_q = m$, $b_r = n$. Докажите, что произведение разностей этих прогрессий равно 1.

3. Суммы арифметических прогрессий

Пусть S_n – сумма n членов некоторой арифметической прогрессии.

1) Докажите, что $S_m = S_n \Rightarrow S_{m+n} = 0$.

2) Пусть $S_m = n$, $S_n = m$. Докажите, что $S_{m+n} = -(m + n)$.

3) Докажите, что $\frac{S_m}{S_n} = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow \frac{a_m}{a_n} = \frac{2m-1}{2n-1}$.

4) Докажите, что для всякой арифметической прогрессии верно тождество $a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 + ... + a_{2n-1}^2 - a_{2n}^2 = \frac{n}{2n-1}\left(a_1^2 - a_{2n}^2\right)$.

5) Пусть $f(x) = ax^2 + bx$. Докажите, что существует такая арифметическая прогрессия, для которой сумма n членов s_n равна значению функции f при $x = n$: $s_n = f(n)$.

4. Суммирование методом разностей

1) Докажите равенство $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{10}+\sqrt{19}} + \frac{1}{\sqrt{19}+\sqrt{28}} + ... + \frac{1}{\sqrt{91}+\sqrt{100}} = 1$.

2) Докажите, что для всякой арифметической прогрессии с положительными членами верно тождество $\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}$.

3) Проверьте, что первое равенство является частным случаем второго равенства.

И-2 *Геометрическая прогрессия*

1. Числа образуют геометрическую прогрессию

Пусть числа a, b, c и d образуют геометрическую прогрессию. Докажите тождества.

1) $(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) = (ab + bc + cd)^2$

2) $(a - d)^2 = (b - c)^2 + (c - a)^2 + (d - b)^2$

3) Пусть числа a, b, c образуют геометрическую прогрессию. Докажите тождество $\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2b^2c^2} = \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}$.

4) Существует ли прямоугольный треугольник, длины сторон которого образуют геометрическую прогрессию?

5) Могут ли числа 2, 3, 5 быть членами одной геометрической прогрессии?

6) В геометрической прогрессии $a_{m+n} = x$, $a_{m-n} = y$. Докажите, что $a_m = \sqrt{xy}$.

2. Суммы геометрических прогрессий

1) Докажите тождество $s_n = a_1 \cdot a_n \cdot \left(a_1^{-1} + a_2^{-1} + ... + a_n^{-1}\right)$.

2) Пусть $a_1, a_2, \ldots$ – геометрическая прогрессия. Докажите, что отношение сумм $a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n-1}$ и $a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n}$ равно знаменателю этой прогрессии.

3) Пусть $t_1, t_2, \ldots$ – суммы бесконечно убывающих геометрических прогрессий с первыми членами 1 и знаменателями q, q^2, …, q^n соответственно. Докажите, что $\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + ... + \frac{1}{t_n} = n - \frac{1-q^n}{1-q} \cdot q$.

4) Пусть s_k – сумма k членов геометрической прогрессии.

Докажите, что $s_n(s_{3n} - s_{2n}) = (s_{2n} - s_n)^2$.

5) Пусть $a_1, a_2, \ldots$ – геометрическая прогрессия с положительными членами, $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $t_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}$.

а) Докажите, что $\frac{s_n}{t_n} = a_1 a_n$.

б) Докажите, что $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = \left(\frac{s_n}{t_n}\right)^{\frac{n}{2}}$.

в) Докажите, что $a_n^2 = \frac{s_{2n-1}}{t_{2n-1}}$.

И-3 *Рекуррентное соотношение*

1. Решение рекуррентного соотношения

1) Последовательность задана первым членом $a_1 = 1$ и рекуррентным соотношением $a_{n+1} = 2a_n + 1$. Вычислите общий член последовательности.

2) $a_1 = 1$; $a_{n+1} = 2a_n + l$. Докажите формулу $a_n = (l + 1) \cdot 2^{n-1} - l$.

3) Докажите, что последовательность с первым членом a_1 и рекуррентным соотношением $a_{n+1} = qa_n + l$ является «сдвинутой» геометрической прогрессией с тем же знаменателем q, т. е. ее общий член можно вычислить по формуле $a_n = b_1 q^{n-1} + c$, где $b_1 = a_1 + \frac{l}{q-1}$, $c = -\frac{l}{q-1}$.

2. Последовательность средних арифметических

Последовательность начинается с чисел 1; 4 и задана рекуррентным соотношением $a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + a_n}{2}$, т. е. каждый ее член, начиная с третьего, равен среднему арифметическому двух предыдущих.

1) Выпишите восемь первых членов последовательности.

2) Предложите формулу, связывающую числитель и знаменатель дроби a_n.

3) Докажите, что $a_n = \frac{3 \cdot 2^{n-2} + (-1)^n}{2^{n-2}}$.

3. Числа Фибоначчи

Напомним, что числа Фибоначчи – это числа последовательности φ_1, φ_2, …, где $\varphi_1 = \varphi_2 = 1$, $\varphi_{n+2} = \varphi_{n+1} + \varphi_n$.

Цель работы: найти явную формулу для чисел Фибоначчи.

Численный эксперимент

1) Выпишите первые десять членов последовательностей, задающихся одним и тем же рекуррентным соотношением $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, но различающихся первыми членами: а) $\varphi_1 = \varphi_2 = 1$; б) $a_1 = 1$, $a_2 = 3$; в) $b_1 = 1$, $b_2 = 5$.

2) Выпишите последовательности разностей для построенных рядов чисел и удостоверьтесь, что они являются теми же последовательностями, но со сдвинутыми номерами.

3) Найдите такие числа x и y, что

$a_1x + b_1y = \varphi_1$

$a_2x + b_2y = \varphi_2$

4) Проверьте, что при найденных x и y верны равенства $\varphi_n = a_nx + b_ny$ при $3 \leq n \leq 10$.

5) Докажите формулу, связывающую последовательности (φ_n), (a_n) и (b_n) в общем виде.

Обобщенные числа Фибоначчи

Назовем обобщенным рядом Фибоначчи любую последовательность x_1, x_2, …, члены которой связаны рекуррентным соотношением Фибоначчи: $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$. Каждый обобщенный ряд Фибоначчи однозначно задается своими первыми двумя членами x_1 и x_2. Обычные числа Фибоначчи получаются при $x_1 = x_2 = 1$. Множество всех обобщенных рядов Фибоначчи обозначим через Φ.

1) Пусть последовательности x_1, x_2, … и y_1, y_2, … являются обобщенными рядами Фибоначчи (т. е. принадлежат множеству Φ). Докажите, что последовательность сумм $z_n = x_n + y_n$ также является обобщенным рядом Фибоначчи.

2) Докажите, что если $(x_1, x_2, \ldots) \in \Phi$, то для любого постоянного числа c последовательность $y_n = cx_n$ также принадлежит множеству Φ.

Результат предыдущих двух задач можно сформулировать так: обобщенные ряды Фибоначчи можно складывать между собой и умножать на постоянные числа.

3) Найдите обобщенный ряд Фибоначчи, который был бы геометрической прогрессией с первым членом $x_1 = 1$.

Указание. Обозначьте знаменатель искомой прогрессии через q, запишите формулу общего члена прогрессии и подставьте ее в рекуррентную формулу Фибоначчи. После сокращения вы получите квадратное уравнение для нахождения q. Найдите его корни.

4) Пусть q_1 и q_2 найденные в предыдущей задаче числа, такие что прогрессии $(1, q_1, q_1^2, \ldots)$ и $(1, q_2, q_2^2, \ldots)$ являются обобщенными рядами Фибоначчи. Составьте систему $\begin{cases} 1 \cdot x + 1 \cdot y = 1 \\ q_1 x + q_2 y = 1 \end{cases}$ для выражения первых двух членов обычного ряда Фибоначчи через первые члены прогрессий и решите ее.

5) Докажите, что числа x и y, найденные в предыдущей задаче, «обслуживают» не только первые два, но любой член ряда Фибоначчи, то есть что для любого n верна формула $\varphi_n = x q_1^{n-1} + y q_2^{n-1}$.

6) Найдите формулы общего члена для последовательностей (a_n) и (b_n), которые рассматривались в численном эксперименте.

Линейные рекуррентные соотношения

1) Найдите знаменатели геометрических прогрессий, удовлетворяющих рекуррентному соотношению $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$.

2) Выпишите несколько первых членов последовательности, удовлетворяющей рекуррентному соотношению $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ с начальными членами $a_1 = 0$, $a_2 = 1$.

3) Составьте и решите линейную систему, выражающую первые два члена последовательности предыдущей задачи с первыми двумя членами геометрических прогрессий из задачи 1).

4) Найдите формулу общего члена изучаемой прогрессии.

Рассматриваемый нами метод нахождения общего члена последовательности, заданной рекуррентным соотношением, может быть обобщен для любого соотношения вида $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$. Предложите путь этого обобщения.