Числа Пизо

А.ЕГОРОВ

ПРОДОЛЖИМ ИЗУЧЕНИЕ ЧИСЕЛ ПИЗО. МЫ ДОказали, что целые алгебраические числа второй и третьей степеней, обладающие свойством Пизо, являются числами Пизо. Аналогичное утверждение, естественно, справедливо и для произвольных степеней. Доказательством этого мы сейчас и займемся.

Окончание. Начало см. в «Кванте» №5.

Иррациональности степени $r > 3$

Итак, пусть $\alpha > 1$ − целое алгебраическое число степени $r > 3$ и $p(x) = x^r + a_1 x^{r-1} + \ldots + a_r$ − минимальный многочлен числа α. Предположим, что $\left\{\left\{\alpha^n\right\}\right\} \to 0$. Оказывается, что справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *При выполнении перечисленных выше условий* α − *число Пизо.*

Иллюстрация В.Иванюка

Доказательство. Мы должны доказать, что все числа $\alpha_2, \ldots, \alpha_r$, сопряженные с α, по модулю меньше 1.

Вспомним, что если $A_n = (\alpha^n)$, то, начиная с некоторого номера N, т.е. при $n \geq N$, целые положительные числа A_n образуют линейную рекурренту:

$$A_{n+r} + a_1 A_{n+r-1} + \ldots + a_r A_n = 0 .$$

Это, в свою очередь, означает, что

$$A_n = c_1 \alpha_1^n + \ldots + c_r \alpha_r^n ,$$

где $\alpha = \alpha_1$, $n \geq N$, а $c_1, c_2, \ldots, c_r$ – некоторые (вообще говоря, комплексные) числа.

Докажем, что, как и в случае квадратичных и кубических иррациональностей, числа $c_1, c_2, \ldots, c_r$ – не нули.

Предположим, например, что $c_1, \ldots, c_k$ – не нули, а $c_{k+1} = \ldots = c_r = 0$. Тогда при $n \geq N$

$$\begin{cases} A_n = c_1 \alpha_1^n + \ldots + c_k \alpha_k^n, \\ \ldots \\ A_{n+k} = c_1 \alpha_1^{n+k} + \ldots + c_k \alpha_k^{n+k}. \end{cases}$$

Рассмотрим многочлен

$$q(x) = (x - \alpha_1) \ldots (x - \alpha_k) = x^k + q_1 x^{k-1} + \ldots + q_k .$$

Числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ – корни многочлена $q(x)$. Умножим первое из уравнений системы на q_k, второе – на $q_{k-1}, \ldots$ ..., предпоследнее – на q_1 и сложим все уравнения. Получим равенство

$$A_{n+k} + q_1 A_{n+k-1} + \ldots + q_k A_n = \\ = c_1 \alpha_1^n q(\alpha_1) + c_2 \alpha_2^n q(\alpha_2) + \ldots + c_k \alpha_k^n q(\alpha_k) .$$

Но $q(\alpha_1) = q(\alpha_2) = \ldots = q(\alpha_k) = 0$, так что

$$A_{n+k} + q_1 A_{n+k-1} + \ldots + q_k A_n = 0 .$$

Следовательно, *целые* числа A_n образуют линейную рекурренту порядка $k < r$.

Докажем, что все коэффициенты $q_1, \ldots, q_k$ – рациональные числа. Ранее мы уже доказали аналогичное утверждение для случая $r = 3$. Будем действовать сходным образом.

Рассмотрим систему из k уравнений относительно $q_1, \ldots, q_k$:

$$\begin{cases} A_{n+k} + q_1 A_{n+k-1} + \ldots + q_k A_n = 0, \\ A_{n+k+1} + q_1 A_{n+k} + \ldots + q_k A_{n+1} = 0, \\ \ldots \\ A_{n+2k-1} + q_1 A_{n+2k-2} + \ldots + q_k A_{n+k-1} = 0. \end{cases}$$

Пользуясь теорией определителей (это единственное место, где мы вынуждены воспользоваться ссылкой на сравнительно неэлементарные понятия), можно доказать, что определитель системы не равен нулю (это следует из того, что числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ попарно различны и не равны нулю). Отсюда и из известного правила Крамера решения линейных систем следует, что числа $q_1, \ldots, q_k$ – рациональны. Впрочем, если представить себе процедуру решения системы методом исключения неизвестных, нетрудно понять, что при условии существования и единственности решения числа $q_1, \ldots, q_k$ будут рациональны.

Таким образом, числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ – корни многочлена $q(x)$ с рациональными коэффициентами. Пусть M – общий наименьший знаменатель дробей $q_1 = \frac{m_1}{n_1}$, $q_2 = \frac{m_2}{n_2}$, ..., $q_k = \frac{m_k}{n_k}$. Числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ являются корнями многочлена $Q(x) = Mq(x)$ с целыми коэффициентами. Но степень многочлена $Q(x)$ меньше степени многочлена $p(x)$, что противоречит минимальности многочлена $p(x)$. Вот где работает неприводимость минимального многочлена!

Итак, ни одно из чисел $c_1, \ldots, c_r$ не равно нулю. Теперь легко завершить доказательство теоремы. Рассмотрим разность

$$\delta_n = A_n - \alpha^n = (c_1 - 1)\alpha_1^n + c_2 \alpha_2^n + \ldots + c_r \alpha_r^n .$$

Поскольку δ_n стремится к нулю, $\alpha = \alpha_1 > 1$, а числа $c_2, \ldots, c_r$ – не нули, то по лемме (см. «Квант» №5, с.13)

$$c_1 = 1, \ |\alpha_2| < 1, \ldots, |\alpha_r| < 1 .$$

Следовательно, α – число Пизо, и теорема 2 доказана.

Теперь, мы полностью разобрались с целыми алгебраическими числами. Сформулируем окончательный результат.

Теорема 2′. *Целое действительное алгебраическое число $\alpha > 1$ обладает свойством Пизо тогда и только тогда, когда оно является числом Пизо, т.е. когда все числа, сопряженные с α, по модулю меньше 1.*

Мы уже видели, что не целые рациональные числа (т.е. алгебраические числа первого порядка) свойством Пизо обладать не могут. А как обстоят дела с не целыми алгебраическими иррациональностями? Например, как ведут себя степени α^n, где $\alpha = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ – корень уравнения $4x^2 - 4x - 1 = 0$? Сопряженное с α число $\beta = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$ по модулю меньше 1, так что α очень похоже на число Пизо. Однако, как мы увидим дальше, такие числа свойством Пизо не обладают.

Произвольные алгебраические числа

Пусть α – не целое алгебраическое число степени r, т.е. корень неприводимого многочлена

$$p(x) = a_0 x^r + a_1 x^{r-1} + \ldots + a_r ,$$

где $a_0 > 1$, $a_1, \ldots, a_r$ – целые числа. Далее мы будем считать, что многочлен $p(x)$ примитивен, т.е. что его коэффициенты в совокупности взаимно просты.

Предположим, что α обладает свойством Пизо, т.е. $\alpha^n = A_n + \delta_n$, где A_n – натуральное, а $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$. Поскольку α – корень многочлена $p(x)$, так же, как и раньше, получим, что

$$a_0 A_{n+r} + a_1 A_{n+r-1} + \ldots + a_r A_n = 0$$

при всех достаточно больших n. Таким образом, целые числа A_n образуют ЛР с целыми коэффициентами, причем «старший коэффициент» a_0 отличен от 1.

Нашей целью станет изучение таких линейных рекуррент, соответствующих *неприводимым* многочленам $p(x) = a_0x^r + a_1x^{r-1} + \ldots + a_r$.

Сначала мы докажем, что существуют целые числа $p_1, p_2, \ldots, p_m$, где $m > r$, для которых при всех достаточно больших n выполняются равенства

$$A_{n+m} + p_1A_{n+m-1} + \ldots + p_mA_n = 0,$$

т.е. что *целочисленная* ЛР со старшим коэффициентом $a_0 > 1$ является ЛР большего порядка со старшим коэффициентом 1. А уже отсюда и из неприводимости многочлена $p(x)$ будет следовать, что характеристический многочлен

$$P(x) = x^m + p_1x^{m-1} + \ldots + p_m$$

делится на многочлен $p(x)$. Но многочлен $p(x)$ неприводим и примитивен, и поэтому, в силу утверждения 2, $P(x) = h(x)p(x)$, где $h(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами, а это возможно лишь при $a_0 = 1$. Таков наш план. К его осуществлению мы и приступаем.

Ограничимся случаем иррациональностей второй степени. Для более высоких степеней рассуждения отличаются лишь большей громоздкостью.

Итак, пусть $\alpha > 1$ – иррациональный корень квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, где $a > 1$, целые числа a, b, c взаимно просты, а β – сопряженное с α число.

Предположим, что $\alpha^n = A_n + \delta_n$, где $\delta_n \to 0$. Тогда

$$aA_{n+2} + bA_{n+1} + cA_n + a\delta_{n+2} + b\delta_{n+1} + c\delta_n =$$
$$= aA_{n+2} + bA_{n+1} + cA_n + \gamma_n = 0.$$

Так как $\gamma_n \to 0$ при $n \to \infty$, то при достаточно больших $n \ge N_0$ числа A_n образуют линейную рекурренту:

$$aA_{n+2} + bA_{n+1} + cA_n = 0.$$

При этом

$$A_n = c_1\alpha^n + c_2\beta^n,$$

где c_1 и c_2 – *отличные от нуля числа* (убедитесь в этом).

Теперь на время прервемся, чтобы сформулировать и доказать одно чисто алгебраическое утверждение.

Алгебраическая лемма

Назовем n-мерным целочисленным вектором произвольный упорядоченный набор $\bar{a} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ целых чисел.

Определение 9. *Пусть A – некоторое множество целочисленных n-мерных векторов. Набор векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_r$ из A называется базисным, если любой вектор $\bar{x} \in A$ можно представить в виде $\bar{x} = \lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2 + \ldots + \lambda_r\bar{a}_r$, где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ – некоторые целые числа.*

Алгебраическая лемма. *Во всяком множестве A целочисленных векторов имеется конечный базисный набор.*

Доказательство. Рассмотрим сначала некоторое множество A одномерных векторов, т.е. целых чисел. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ – эти числа. Будем (для определенности) считать, что $x_1 > 0$. Рассмотрим остатки от деления чисел $x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ на x_1. (Если все числа делятся на x_1, то уже x_1 и есть базисный набор.) Поделим x_i на x_1 с остатком:

$$x_i = q_ix_1 + r_i, \text{ где } 0 \le r_i < x_1.$$

Заметим, что если x_j и x_i дают одинаковые остатки, то

$$x_j - x_i = (q_j - q_i)x_1,$$

и

$$x_j = (q_j - q_i)x_1 + x_i,$$

т.е. x_j – линейная комбинация чисел x_1 и x_i.

Разобьем все множество A на классы чисел, дающих одинаковые остатки при делении на x_1. Пусть этих классов имеется r штук ($r \le x_1$). В каждом классе выберем какое-нибудь число. Множество выбранных чисел и даст нам, очевидно, требуемый базисный набор. Изменив, если надо, нумерацию чисел, можем считать, что это числа $x_1, x_2, \ldots, x_r$.

В самом деле, для любого числа x_m среди чисел $x_1, x_2, \ldots, x_r$ есть число x_k, сравнимое с ним по модулю x_1, и тогда

$$x_m - x_k = q_mx_1,$$

т.е.

$$x_m = x_k + q_mx_1.$$

Далее применим индукцию по n. Предположим, что утверждение уже доказано для n-мерных векторов и A – некоторое множество целочисленных $(n+1)$-мерных векторов ($x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$). Рассмотрим множество B n-мерных векторов, получаемых из векторов множества A отбрасыванием последней координаты x_{n+1}. По предположению индукции, во множестве B имеется базисный набор векторов $\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_k$. Пусть $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k$ – соответствующие им векторы из множества A (набор $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k$ восстанавливается неоднозначно, но это нас не должно беспокоить). Если $\bar{a} \in A$ – произвольный вектор: $\bar{a} = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$, то для некоторых целых чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ будет

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\bar{b}_i,$$

но тогда первые n координат вектора

$$\bar{a}' = \bar{a} - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\bar{a}_i$$

равны нулю, т.е.

$$\bar{a}' = (0, 0, \ldots, 0, \tilde{x}_{n+1}).$$

Рассмотрим множество A' всех векторов вида $\bar{a}'$. Во множестве A', как было доказано раньше, имеется базисный набор векторов. Пусть это будут векторы $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \ldots, \bar{e}'_l$. Вспомним, что при любом $1 \le j \le l$

$$\bar{e}'_j = \bar{e}_j - \sum_{i=1}^{k} \lambda_{ij}\bar{a}_i,$$

где $\bar{e}_j$ – некоторый вектор из A, а $\lambda_{ij} \in \mathbf{Z}$, $1 \le i \le k$. Добавим теперь к векторам $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k$ векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_l$. Это и будет требуемый базисный набор в A.

Действительно, пусть $\overline{a} \in A$ – произвольный вектор. Тогда

$$\overline{a}' = \sum_{j=1}^{l} \mu_j \overline{e}'_j, \quad \text{где } \mu_j \in \boldsymbol{Z},$$

т.е.

$$\overline{a} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overline{a}_i + \sum_{j=1}^{l} \mu_j \overline{e}'_j .$$

Выражая $\overline{e}'_j$ через $\overline{e}_j$ и $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_k$, получим (после сокращений) представление $\overline{a}$ в виде линейной комбинации векторов $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_k, \overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_l$. Лемма доказана.

Завершающий этап

Рассмотрим последовательность A двумерных векторов $\overline{a}_n = (A_n, A_{n+1})$. По доказанному, в этой последовательности есть базисный набор. Пусть это векторы $\overline{a}_{n_1}, \overline{a}_{n_2}, \ldots, \overline{a}_{n_k}$. Но тогда существуют целые числа $p_1, \ldots, p_k$ такие, что

$$\overline{a}_{n_k+1} = \sum_{i=1}^{k} p_i \overline{a}_{n_i} .$$

Обозначив $n_k + 1$ через r, получаем равенство

$$(A_r, A_{r+1}) = \sum_{i=1}^{k} p_i \left(A_{n_i}, A_{n_i+1}\right) = \left(\sum_{i=1}^{k} p_i A_{n_i}, \sum_{i=1}^{k} p_i A_{n_i+1}\right).$$

Приравнивая координаты левой и правой частей, имеем

$$A_r = \sum_{i=1}^{k} p_i A_{n_i}, A_{r+1} = \sum_{i=1}^{k} p_i A_{n_i+1} .$$

Заменив все числа A_n их выражениями через α и β:

$$A_n = c_1\alpha^n + c_2\beta^n ,$$

получаем систему уравнений

$$\begin{cases} c_1\left(\alpha^r - \sum_{i=1}^{k} p_i\alpha^{n_i}\right) + c_2\left(\beta^r - \sum_{i=1}^{k} p_i\beta^{n_i}\right) = 0, \\ c_1\left(\alpha^{r+1} - \sum_{i=1}^{k} p_i\alpha^{n_i+1}\right) + c_2\left(\beta^{r+1} - \sum_{i=1}^{k} p_i\beta^{n_i+1}\right) = 0. \end{cases}$$

Пусть $P(x) = x^r - \sum_{i=1}^{k} p_i x^{n_i}$. Многочлен $P(x)$ имеет целые коэффициенты, а старший его коэффициент равен 1. Систему перепишем так:

$$\begin{cases} c_1 P(\alpha) + c_2 P(\beta) = 0, \\ c_1\alpha P(\alpha) + c_2\beta P(\beta) = 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{cases} c_1(\beta - \alpha) P(\alpha) = 0, \\ c_2(\beta - \alpha) P(\beta) = 0. \end{cases}$$

Но c_1 и c_2 не равны нулю и $\beta \neq \alpha$, поэтому $P(\alpha) = 0$ и $P(\beta) = 0$, т.е. α и β – корни многочлена $P(x)$. А раз так, то

$$P(x) = Q(x)\left(ax^2 + bx + c\right).$$

Из неприводимости и примитивности квадратного трехчлена следует, что $Q(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами (см. утверждение 2). Но тогда, если q_0 – старший коэффициент многочлена $Q(x)$, то старший коэффициент многочлена $P(x)$ равен $1 = a \cdot q_0$ Но это возможно лишь при $a = 1$ и $q_0 = 1$. А это мы и собирались доказать.

В общем случае все рассуждения аналогичны. Именно, рассматривая последовательность A целочисленных r-мерных векторов $\overline{a}_n = (A_n, A_{n+1}, \ldots, A_{n+r-1})$, выбираем в A базисный набор. Исходя из базисного набора, строим многочлен $P(x)$. Доказываем, что все корни $\alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_r$ являются корнями $P(x)$, т.е. $P(x)$ делится на неприводимый и примитивный многочлен $p(x)$ и частное является многочленом с целыми коэффициентами. Откуда и следует, что старший коэффициент a_0 многочлена $p(x)$ равен 1.

Тем самым доказана замечательная теорема.

Теорема 3. *Алгебраическое число α обладает свойством Пизо тогда и только тогда, когда α – число Пизо.*

Какие бывают числа Пизо

Определение 10. *Многочлен $p(x)$ с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом, равным 1, называется многочленом Пизо, если один из его корней $\alpha > 1$, а остальные корни не равны нулю и по модулю меньше единицы.*

Докажем, что всякий многочлен Пизо неприводим. Пусть $p(x) = p_1(x)p_2(x)$, где $p_1(x)$ и $p_2(x)$ – многочлены с целыми коэффициентами, и $\alpha > 1$ – корень многочлена $p(x)$. Тогда $p_1(\alpha)p_2(\alpha) = 0$. Пусть, для определенности, $p_1(\alpha) = 0$. Но свободный член многочлена $p_2(x)$, равный по теореме Виета произведению его корней, не равен нулю и по модулю меньше 1. Противоречие.

Докажем, что существуют числа Пизо любой наперед заданной степени r. Для этого достаточно построить многочлен Пизо степени r. Построение осуществим так.

Возьмем точки $x_1 = \frac{1}{r}$, $x_2 = \frac{2}{r}$, …, $x_{r-1} = \frac{r-1}{r}$, $x_r = 1$ и построим многочлен $f(x)$ с рациональными коэффициентами степени $r - 1$ такой, что

$$f(1) = -2, f\left(\frac{r-1}{r}\right) = 2, \ldots, f(x_k) = (-1)^{k+1} \cdot 2, \ldots, f(x_1) = f\left(\frac{1}{r}\right) = (-1)^r \cdot 2 .$$

Вот один из способов такого построения (для знатоков – мы строим так называемый интерполяционный многочлен Лагранжа). Сначала строим многочлены $\varphi_i(x)$ такие, что $\varphi_i(x_i) = 1$, а $\varphi_i(x_k) = 0$ при $i \neq k$:

$$\varphi_1(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_r)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\ldots(x_1 - x_r)},$$

$$\varphi_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_3)\ldots(x - x_r)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)\ldots(x_2 - x_r)},$$

$$\ldots$$

$$\varphi_r(x) = \frac{(x - x_1)\ldots(x - x_{r-1})}{(x_r - x_1)\ldots(x_r - x_{r-1})}.$$

Все многочлены $\varphi_i(x)$ имеют рациональные коэффициенты и степень $r-1$.

Пусть

$$g(x) = -2\varphi_r(x) + 2\varphi_{r-1}(x) + \ldots + (-1)^r \cdot 2\varphi_1(x).$$

Коэффициенты многочлена $g(x)$ рациональны, а

$$g(x_i) = (-1)^{r-i+1} \cdot 2 \text{ при } i = 1, 2, \ldots, r.$$

Предположим, что M – наименьший общий знаменатель его коэффициентов. Многочлен $P(x) = Mg(x)$ имеет целые коэффициенты. При этом

$$P(x_i) = (-1)^{r-i+1} \cdot 2M.$$

Знаки чисел $P(x_i)$ чередуются, и каждое из этих чисел по модулю не меньше чем 2.

Пусть теперь

$$f(x) = x^r + P(x).$$

Степень многочлена $f(x)$ равна r, его коэффициенты – целые числа, старший коэффициент равен 1, а знаки чисел $f(x_i) = x_i^r + P(x_i)$ чередуются. Поэтому $f(x)$ имеет корень на каждом из промежутков $(x_1; x_2)$, $(x_2; x_3), \ldots, (x_{r-1}; x_r)$. А так как $f(x_r) = f(1) < 0$, то и на промежутке $(1; +\infty)$ тоже есть корень.

Таким образом, многочлен $f(x)$ степени r имеет в точности r действительных корней. Один из них больше 1, остальные положительны и меньше 1. По доказанному ранее, многочлен $f(x)$ неприводим и больший его корень – число Пизо.

Итак, чисел Пизо достаточно много. Однако при любом натуральном k в промежутке $(k; k+1)$ содержится лишь *конечное* количество чисел Пизо данной степени r. Это следует из того, что если $P(x) = x^r + a_1 x^{r-1} + \ldots + a_r$ – многочлен Пизо и $k < \alpha < k+1$ – его корень, то a_k – целое число, равное сумме произведений корней многочлена $p(x)$ по k, умноженной на $(-1)^k$. Всего таких произведений C_r^k, а каждое из них по модулю меньше чем $k+1$ (один корень – между k и $k+1$, а остальные – по модулю меньше 1), так что $|a_k| < (k+1)C_r^k$.

Но уже таких многочленов конечное число, так как все они имеют ограниченные в совокупности целые коэффициенты.

В то же время, в каждом промежутке $(k; k+1)$ есть числа Пизо любой наперед заданной степени.

Мы приведем без доказательства соответствующие многочлены Пизо.

Для *второй* степени – это многочлен

$$x^2 - kx - 1,$$

где k – натуральное число. Один из его корней $\alpha = \dfrac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$ лежит в интервале $(k; k+1)$, второй корень отрицателен и по модулю меньше 1.

Для *третьей* степени это многочлен

$$x^3 - x - 1,$$

имеющий корень в интервале (1; 2), и многочлен

$$x^3 - (k+1)x^2 + 1$$

при натуральном $k \ge 2$ для промежутка $(k;\ k+1)$.

Наконец, для *произвольной* степени r это многочлен

$$x^r - x^{r-1} - \ldots - 1$$

для промежутка (1; 2) и многочлен

$$x^r - (k+1)x^{r-1} + 1$$

для промежутка $(k; k+1)$.

Все перечисленные многочлены неприводимы и являются многочленами Пизо.

Известно и *наименьшее* не целое число Пизо. Это корень уравнения

$$x^3 - x - 1 = 0,$$

равный (по формуле Кардано)

$$x = \frac{1}{\sqrt[3]{18}}\left(\sqrt[3]{9+\sqrt{69}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{69}}\right).$$

Доказано также, что множество чисел Пизо замкнуто, т.е. если последовательность α_n, состоящая из чисел Пизо, имеет предел

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \beta,$$

то число β является числом Пизо.

Вопрос о существовании неалгебраических чисел $\alpha > 1$, обладающих свойством Пизо, открыт. Однако доказано, что если $\{\{\alpha^n\}\}$ стремится к нулю достаточно быстро, точнее – если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \{\{\alpha^n\}\}^2$ сходится, то α является алгебраическим числом и, следовательно (в силу теоремы 3), – числом Пизо.

Заключение

Впервые публикации о числах Пизо появились в научной литературе в 1946 году. Авторами их были французский математик Пизо и индийский математик Виджаярагхаван. В последующие годы неоднократно появлялись статьи о числах Пизо. В самое последнее время обнаружена связь чисел Пизо с теорией квазикристаллов в физике.

В 2000 году задача о числах Пизо была предложена школьникам – участникам конференции Турнира городов. Почти элементарное доказательство свойств чисел Пизо и подборка задач об этих числах были разработаны А.Канелем-Беловым, С.Дориченко и автором этой статьи.

Поправка. В пятом номере журнала на с.11 допущена опечатка. Второй абзац в правой колонке должен быть таким:

Но тогда

$$A_{N+k} = \left(\frac{p}{q}\right)^k A_N$$

при всех $k > 1$. Это невозможно, так как A_N не делится на q^k при достаточно больших k, т.е. A_{N+k} – не целое.