Ф2075. В компьютерной модели рассматривается кубический сосуд объемом 1 м^3, заполненный «газом» – в сосуде находятся 1000 частиц диаметром 1 мм каждая и 2 частицы диаметром 1 см. В начальный момент маленькие частицы неподвижны, большие имеют скорости по 100 м/с. Оцените число ударов больших частиц о стенки сосуда за большое время – за 10 лет. Оцените также число столкновений больших частиц с маленькими за то же время. Считайте, что частицы «сделаны» из одного и того же материала. Внешние силы в модели не предусмотрены, удары считаются упругими.

А.Старов

Ф2076. В схеме неуравновешенного «мостика» (рис.3) два резистора имеют сопротивления по 10 Ом, два – по 30 Ом. В диагональ мостика включен амперметр, имеющий пренебрежимо малое сопротивление. Батарейка напряжением 3 В подключена к другой диагонали мостика. Вместо одного из резисторов подключают еще одну такую же батарейку. Найдите максимальное и минимальное возможные значения тока через амперметр в получившейся схеме.

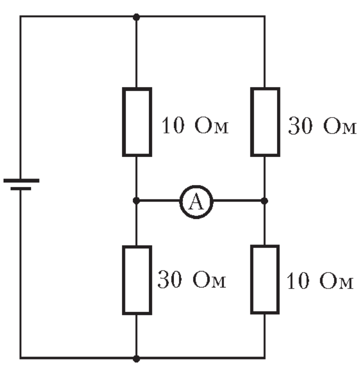


Рис. 3

З.Рафаилов

Ф2077. На тороидальный сердечник, сделанный из сплава с очень большой магнитной проницаемостью, намотаны три одинаковые катушки индуктивностью L = = 1 Гн каждая (рис.4). К выводам одной из катушек подключен резистор сопротивлением R = 100 Ом, две другие катушки соединены последовательно (начало одной – к концу другой). К свободным выводам получившейся «двойной» катушки подключают батарейку напряжением U = 3 В. Через время $\tau = 0{,}5$ с батарейку отключают. Какой ток течет через батарейку через время $0{,}5\tau$ после включения? Какое количество теплоты выделится в резисторе за время τ после включения и после отключения батарейки?

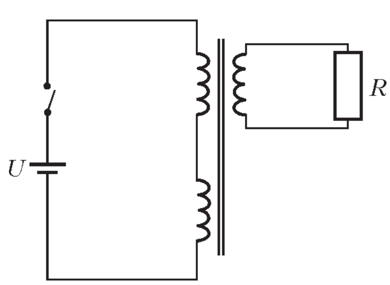


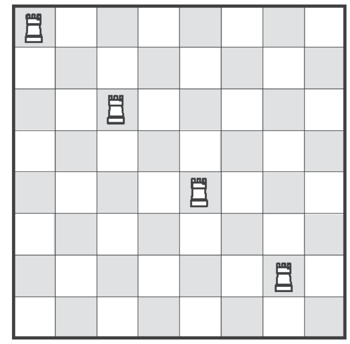
Рис. 4

А.Зильберман

Решения задач М2041 – М2050, Ф2058 – Ф2062

М2041. *Какое наименьшее число ладей нужно поставить на шахматной доске 8×8, чтобы все белые клетки оказались под боем этих ладей?*

Ответ: 4.



Каждая ладья бьет не более 8 белых клеток (4 клетки – на одной горизонтали и 4 клетки – на одной вертикали), поэтому все 32 белые клетки побить менее чем четырьмя ладьями не удастся. Пример, когда четыре ладьи бьют все белые клетки, показан на рисунке.

Р.Женодаров

М2042. *Докажите, что при $0 < x < \frac{\pi}{2}$ выполнено неравенство*

$$(\operatorname{tg} x)^{\sin x} + (\operatorname{ctg} x)^{\cos x} \geq 2.$$

Пусть $a \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right]$, $b \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ и $a + b = \frac{\pi}{2}$. Тогда $(\operatorname{tg} b)^{\sin b} = (\operatorname{ctg} a)^{\cos a}$, $(\operatorname{ctg} b)^{\cos b} = (\operatorname{tg} a)^{\sin a}$. Таким образом, если требуемое неравенство выполняется для $x = a$, то оно выполняется и для $x = b$; поэтому достаточно доказать неравенство для $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right]$. Если $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right]$, то $\operatorname{ctg} x \geq 1$, $\cos x \geq \sin x$, поэтому

$$(\operatorname{tg} x)^{\sin x} + (\operatorname{ctg} x)^{\cos x} \geq (\operatorname{tg} x)^{\sin x} + (\operatorname{ctg} x)^{\sin x} =$$

$$= (\operatorname{tg} x)^{\sin x} + \frac{1}{(\operatorname{tg} x)^{\sin x}} = A + \frac{1}{A}$$

для положительного A. Но

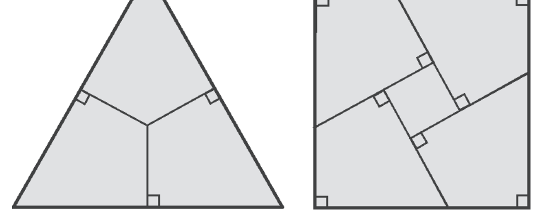
$$A + \frac{1}{A} = \left(\sqrt{A} - \frac{1}{\sqrt{A}}\right)^2 + 2 \geq 2.$$

Н.Агаханов, И.Богданов

М2043. *Можно ли сконструировать такой набор «Юный паркетчик» из четырех одинаковых многоугольников и квадратика, чтобы из всех пяти деталей можно было сложить квадрат, а из трех одинаковых деталей – равносторонний треугольник?*

Ответ: можно.

Опустив перпендикуляры из центра на стороны, разобьем правильный треугольник на три дельтоида (см. рисунок). Из четырех таких дельтоидов можно составить квадрат, в котором недостает центрального квадратика.



О.Нечаева

М2044. *Пусть $f(x)$ – некоторый многочлен ненулевой степени. Может ли оказаться, что уравнение $f(x) = a$ при любом значении a имеет четное число решений?*

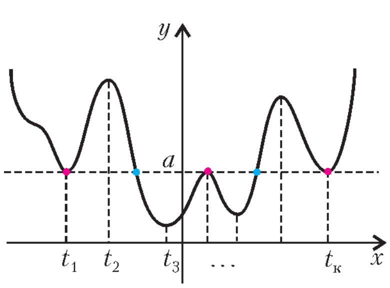
Ответ: не может.

Покажем, что в любом случае найдется такое a, что уравнение $f(x) = a$ имеет нечетное число решений.

Пусть $t_1, t_2, \ldots, t_k$ – точки, в которых меняется знак производной $f'(x)$ (таких точек конечное количество, так как все они – корни $f'(x)$). Таким образом, на каждом из интервалов $(-\infty, t_1), (t_1, t_2), \ldots, (t_k, +\infty)$ функция $f(x)$ монотонна, и в точках $t_1, t_2, \ldots, t_k$ происходит смена интервала возрастания на интервал убывания или наоборот.

Пусть степень многочлена $f(x)$ нечетна. Учитывая, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ – бесконечности разных знаков, получаем, что при любом a уравнение $f(x) - a = 0$ имеет нечетное количество корней, в которых функция $f(x) - a$ меняет знак. Достаточно выбрать a, отличное от $f(t_1), f(t_2), \ldots, f(t_k)$, тогда уравнение $f(x) - a = 0$ не имеет других корней (т.е. корней, в которых $f(x) - a$ сохраняет знак). Случай нечетной степени многочлена $f(x)$ можно разобрать и по-другому, заметив, что при достаточно большом a уравнение $f(x) = a$ имеет ровно одно решение.

Пусть степень многочлена $f(x)$ четна. Учитывая, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ – бесконечности одного знака, получаем, что при любом a уравнение $f(x) - a = 0$ имеет четное количество корней, в которых функция $f(x) - a$ меняет знак. Поскольку $f'(x)$ – многочлен нечетной степени, то $f'(x)$ меняет знак в нечетном числе точек, т.е. k нечетно. Отсюда следует, что найдется такое a, что в наборе $f(t_1), f(t_2), \ldots, f(t_k)$ нечетное количество чисел, равных a. Для найденного значения a уравнение $f(x) = a$ имеет нечетное число решений – четное количество, в которых функция $f(x) - a$ меняет знак, и нечетное количество, в которых функция $f(x) - a$ не меняет знак (см. рисунок).



П.Кожевников

М2045. *На доске записано число $\underbrace{111\ldots11}_{99\text{ единиц}}$. Двое играют в следующую игру. Игроки ходят по очереди, причем за ход разрешается либо записать ноль вместо одной из единиц, кроме первой и последней, либо стереть один из нулей. Проигрывает тот, после хода которого число будет делиться на 11. Кто выигрывает при правильной игре?*

Ответ: первый.

Покажем, что первый игрок не проиграет, так как каждым своим ходом он может получать число вида $1011\ldots11$, которое не делится на 11 в силу того, что разность сумм цифр, стоящих на четных и на нечетных местах, равна 1 или 2. Действительно, первым ходом первый игрок заменяет вторую слева единицу на ноль, а далее либо стирает ноль, появившийся после хода второго игрока, либо, если тот стер единственный ноль, опять заменяет вторую слева единицу на ноль (что он всегда сможет сделать, иначе число на доске равно 11, и второй игрок уже проиграл).

М.Мурашкин

М2046. *Муха села в полдень на секундную стрелку часов и решила ездить, придерживаясь следующего правила: если одна стрелка обгоняет другую и муха сидит на одной из этих стрелок, то она пересаживается на другую. Сколько оборотов сделает муха к полуночи?*

Ответ: 245.

Посадим в полдень мух A, B, C на каждую из стрелок – секундную, минутную, часовую. Когда стрелки встречаются, пусть мухи, сидящие на этих стрелках, меняются местами. В результате в любой момент времени A впереди B (по суммарному пройденному расстоянию), а B впереди C, но A обгоняет C не более чем на круг. Всего три мухи с полудня до полуночи сделали $1 + 12 + 60 \cdot 12 = 733$ оборота (суммарное число оборотов, которые делают часовая, минутная и секундная стрелки). Так как $733 = 244 \cdot 3 + 1$, то мухи B и C сделали по 244 оборота, а муха A – на один оборот больше.

Из приведенных рассуждений можно дополнительно сделать вывод от том, что за миг до полуночи муха A сидела на часовой стрелке, муха B – на минутной, а муха C – на секундной.

И.Богданов

М2047. *Из точки T, лежащей внутри треугольника ABC, стороны AB, BC, CA видны под углом 120° каждая. Докажите, что прямые, симметричные прямым AT, BT, CT относительно прямых BC, CA, AB соответственно, пересекаются в одной точке.*

Пусть T_a, T_b, T_c – точки, симметричные T относительно прямых BC, CA, AB соответственно; T' – центр описанной окружности треугольника $T_aT_bT_c$ (рис.1). Так как $CT_a = CT = CT_b$, то прямая CT' является серединным перпендикуляром к отрезку T_aT_b и биссектрисой угла T_aCT_b. Следовательно, прямые CT и CT' симметричны относительно биссектрисы угла ACB. Аналогично, прямые BT и BT', AT и AT' симметричны относительно соответствующих биссектрис треугольника ABC. (Доказанное означает, что точки T и T' *изогонально сопряжены* относительно треугольника ABC.)

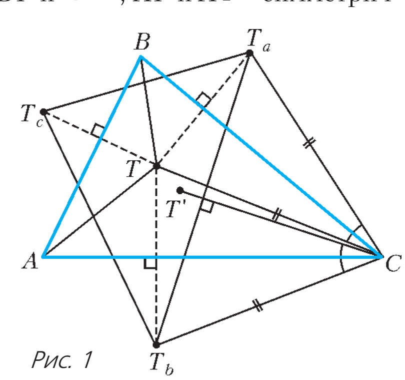


Рис. 1

Пусть теперь точки T'_a, T'_b, T'_c – точки, симметричные T' от-

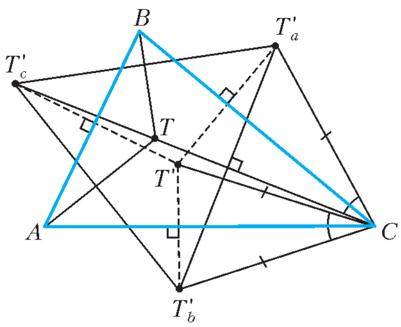


Рис. 2

носительно BC, CA, AB соответственно (рис.2). Рассуждая как и выше, получим, что T – центр описанной окружности треугольника ABC, а прямые AT, BT, CT являются серединными перпендикулярами к его сторонам. Поскольку углы между отрезками AT, BT, CT равны по 120°, углы треугольника $T_a'T_b'T_c'$ равны по 60°, т.е. треугольник $T_a'T_b'T_c'$ правильный. Отсюда следует, что точки T_a', T_b', T_c' лежат на прямых AT, BT, CT соответственно, значит, прямые, симметричные прямым AT, BT, CT относительно прямых BC, CA, AB соответственно, проходят через точку T'.

Комментарии

1. Точки T и T' называются, соответственно, *первой точкой Торричелли* и *первой точкой Аполлония* треугольника ABC. (О свойствах этих точек можно прочитать, например, в книге А.В.Акопяна и А.А.Заславского «Геометрические свойства кривых второго порядка» – М.: МЦНМО, 2007.)

2. Из решения вытекает, что если из точки T выпустить с равными скоростями три бильярдных шарика в направлениях, противоположных направлениям к соответствующим вершинами треугольника ABC, то, отразившись от сторон треугольника ABC, шарики одновременно придут в точку T', пройдя расстояние, равное радиусу описанной окружности треугольника $T_a'T_b'T_c'$.

А.Заславский

М2048. *Найдите такое наибольшее натуральное k, что найдется натуральное n > 1, для которого каждое из чисел $n, n^2, \ldots, n^k$ представимо в виде $x^2 + y^2 + 1$, где x, y – целые числа.*

Ответ: $k = 5$.

Лемма. Всякое отличное от нуля число вида $a^2 + b^2$ (a, b – целые) представимо в виде $4^t(8u+v)$, где $t \ge 0$, $u \ge 0$, v = 1, 2 либо 5.

Доказательство. Пусть $a = 2^r c$, $b = 2^s d$, где c и d нечетны, и для определенности $r \le s$. Тогда $a^2 + b^2 = 4^r\left(c^2 + \left(2^{s-r}d\right)^2\right)$. Получаем, что c^2 дает при делении на 8 остаток 1, а $\left(2^{s-r}d\right)^2$ – остаток 0, 1 или 4, откуда и следует утверждение леммы.

Для доказательства неравенства $k < 6$ достаточно установить, что при $n > 1$ система

$$\begin{cases} n^2 - 1 = x^2 + y^2, \\ n^6 - 1 = z^2 + t^2 \end{cases}$$

не имеет решений.

Предположим противное. Из первого равенства системы следует, что n нечетно (так как $x^2 + y^2$ не может давать остаток 3 при делении на 4). Следовательно, в равенстве

$$\left(x^2 + y^2\right)\left(n^4 + n^2 + 1\right) = z^2 + t^2$$

второй сомножитель левой части дает остаток 3 при делении на 8.

С помощью леммы получаем

$$\left(8u_1 + v_1\right)(8l + 3) = 8u_2 + v_2,$$

где каждое из чисел v_1, v_2 принимает одно из значений 1, 2, 5. Ясно, что такое равенство невозможно.

Для завершения решения остается заметить, что

$$3 = 1^2 + 1^2 + 1, \; 3^2 = 2^2 + 2^2 + 1, \; 3^3 = 5^2 + 1^2 + 1,$$

$$3^4 = 8^2 + 4^2 + 1, \; 3^5 = 11^2 + 11^2 + 1.$$

Замечания

1. Результаты, приведенные в статье В.Сендерова и А.Спивака «Суммы квадратов и целые гауссовы числа» («Квант» № 3 за 1999 г.), позволяют из равенства $\left(x^2 + y^2\right)A = z^2 + t^2$, где $z^2 + t^2 \ne 0$, вывести, что $A = x_1^2 + y_1^2$. Но A дает остаток 3 при делении на 4 – противоречие.

2. Нетрудно доказать существование бесконечного количества таких чисел n, что каждое из чисел $n, \ldots, n^4$ представимо в виде $x^2 + y^2 + 1$.

3. Что мы знаем о таких n, что представимы все числа $n, \ldots, n^5$? Нетрудно показать, что при $4 \le n \le 98$ таких чисел нет. (Для этого полезно заметить, что любое $n > 1$, для которого n, n^2, n^3 представимы, принадлежит одной из прогрессий $72s + 35$, $48s + 3$, где $s \ge 0$. Подумайте также, как можно почти без вычислений рассмотреть случай $n = 35$.) При $n = 99$ все числа n, n^2, n^3, n^4, n^5 представимы. Как явствует из статьи «Суммы квадратов и целые гауссовы числа», достаточно непосредственно убедиться, что $99^4 + 99^3 + 99^2 + 99 + 1 = 97039801$ и $99^2 + 99 + 1 = 9901$ – простые числа.

В.Сендеров

М2049. *От правильного октаэдра с ребром 1 отрезали 6 углов – пирамидок с квадратным основанием и ребром 1/3. Получился многогранник, грани которого – квадраты и правильные шестиугольники. Можно ли копиями такого многогранника замостить пространство?*

Ответ: можно.

Обозначим через $\mathcal{M}$ множество точек $M = (k, l, m)$, где k, l, m – целые числа одной четности. Для каждой точки $M \in \mathcal{M}$ пусть $V(M)$ – множество точек X пространства, для которых M – ближайшая точка множества $\mathcal{M}$, т.е. $V(M)$ – пересечение полупространств $P(M, M')$, задаваемых неравенствами $XM \le XM'$ для всех точек $M' \in \mathcal{M}$, отличных от M. (Множества $V(M)$ называются *областями Вороного* для множества точек $\mathcal{M}$.) Для двух различных точек $M, M' \in \mathcal{M}$ множества $V(M)$ и $V(M')$ совмещаются сдвигом на вектор $\overrightarrow{MM'}$, так как множество $\mathcal{M}$ переходит в себя при сдвиге на этот вектор; ясно, что множества $V(M)$

($M \in \mathcal{M}$) покрывают все пространство, причем множества $V(M)$ и $V(M')$ ($M \neq M'$) могут пересекаться только по части плоскости – серединного перпендикуляра к отрезку MM'. Докажем, что $V(O)$ (O – начало координат) – усеченный октаэдр, подобный данному в условии. Отсюда будет вытекать, что пространство замощено многогранниками, равными $V(O)$.

Для шести точек $M = (\pm 2, 0, 0)$, $(0, \pm 2, 0)$, $(0, 0, \pm 2)$ полупространства $P(O, M)$ дают в пересечении куб K, задаваемый системой неравенств $-1 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$, $-1 \le z \le 1$. Пусть какое-то из полупространств $P(O, M)$ ($M \in \mathcal{M}$) не содержит куб K целиком; тогда это полупространство не содержит одну из вершин этого куба $X = (\pm 1, \pm 1, \pm 1)$. В таком случае $MX < OX = \sqrt{3}$; единственная точка M множества $\mathcal{M}$, удовлетворяющая этому неравенству, – точка X. Итак, $V(O)$ – это пересечение куба K и восьми полупространств $P(O, X)$, где X – вершины куба. Полупространства $P(O, X)$ задаются неравенствами $\pm x \pm y \pm z \le \frac{3}{2}$ и дают в пересечении правильный октаэдр T с вершинами $\left(\pm\frac{3}{2}, 0, 0\right)$, $\left(0, \pm\frac{3}{2}, 0\right)$, $\left(0, 0, \pm\frac{3}{2}\right)$. Легко видеть, что грани куба K делят ребра октаэдра T на три равные части, т.е. в пересечении $K \cap T$ образуется усеченный октаэдр, подобный многограннику из условия задачи.

А.Канель

М2050. *В однокруговом турнире по волейболу (без ничьих) участвовало 2^n команд, причем команда «Чемпион» заняла первое место. Назовем команду плохой, если она выиграла у «Чемпиона». Оргкомитет планирует провести турнир по олимпийской системе и предполагает, что все встречи закончатся так же, как в предыдущем турнире. Докажите, что можно так составить расписание, что «Чемпион» опять победит, причем все плохие команды проиграют (и прекратят участие) уже в первых двух турах.*

Пусть «Чемпион», в дальнейшем – Ч, одержал k побед в круговом турнире. Так как среднее число побед у команды равно $\frac{2^n - 1}{2}$, то $k \ge 2^{n-1}$.

Назовем k команд, у которых Ч выиграл, *хорошими*, а остальные команды – *плохими*. Рассмотрим произвольный набор из d плохих команд. В матчах друг с другом и с Ч они одержали суммарно $\frac{d(d-1)}{2} + d = \frac{d(d+1)}{2}$ побед. Так как каждая из них одержала не больше k побед, то в матчах с хорошими командами они одержали не более $kd - \frac{d(d+1)}{2}$ побед, т.е. хотя бы одна из них одержала не больше $k - \frac{d+1}{2}$ побед, и, значит, она потерпела не менее $\frac{d+1}{2}$ поражений.

Пусть $B_1, \ldots, B_{2^n-k-1}$ – все плохие команды, а b_i – количество хороших команд, которым B_i проиграла. Можно считать, что $b_1 \le \ldots \le b_{2^n-k-1}$. По доказанному выше, $b_d \ge \frac{d+1}{2}$, т.е. $b_1 \ge 1$, $b_2, b_3 \ge 2$, $b_4, b_5 \ge 3, \ldots$

Опишем распределение команд по парам в первом туре турнира на выбывание. Назовем G_1 хорошую команду, выигравшую у B_1 (такая есть, ибо $b_1 \ge 1$), G_2 – отличную от нее хорошую команду, выигравшую у B_3 (такая есть, ибо $b_3 \ge 2$), G_3 – отличную от них хорошую команду, выигравшую у B_5 (такая есть, ибо $b_5 \ge 3$), и т.д. В первом туре поставим в пары G_i с B_{2i-1}; тогда все B_{2i-1} выбывают в первом туре. Далее, если найдутся еще нераспределенные плохая команда B и хорошая G такие, что G выигрывает у B, то поставим их в пару. Будем проводить такое распределение до тех пор, пока таких пар не останется.

Теперь все нераспределенные плохие команды выигрывают у всех нераспределенных хороших; поставим в пару каждой плохой какую-нибудь хорошую. Далее, Ч поставим в пару еще нераспределенную хорошую команду (такая найдется, ибо $k \ge 2^{n-1}$), а остальные хорошие разобьем на пары. Расписание первого тура построено.

Заметим, что для каждой плохой команды B_{2i}, прошедшей во второй тур, все $b_{2i} \ge i + 1$ выигрывающих у нее хороших команд также прошли во второй тур. Пользуясь изложенным выше способом, поставим во втором туре в пару каждой оставшейся плохой команде хорошую, выигрывающую у нее. Тогда после второго тура плохих команд не останется.

И.Богданов

Ф2058. *В системе на рисунке 1 все грузы одинаковы. Вначале грузы удерживают, затем отпускают, и система приходит в движение без рывков. Найдите ускорения подвижных блоков.*

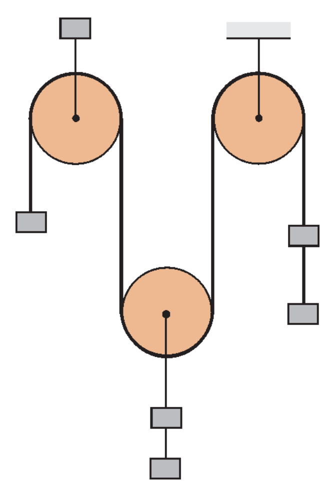


Рис. 1

Введем обозначения (рис.2): T – сила натяжения длинного куска нити; a – ускорение верхнего блока и привязанного к нему самого верхнего груза массой m; b – ускорение нижнего блока и привязанного к нему груза массой $2m$. (Пары грузов массами m заменены грузами массой $2m$.)

Нарисуем для удобства два узелка на длинной нити – A и $Б$ и займемся кинематикой. Впрочем, сначала чуть-чуть динамики. Ускорение самого левого груза равно b, оно равно ускорению нижнего груза – там силы вдвое больше ($2T$ и $2mg$), но и масса вдвое больше.

Если направить стрелки ускорений в одну сторону, то ускорение каждого блока равно полусумме ускорений участков нити по обе стороны от него. Тогда ускорение узелка A равно $(2a - b)$, а узелка $Б$ – $(3b - 2a)$.

Теперь запишем уравнения динамики для самого верх-

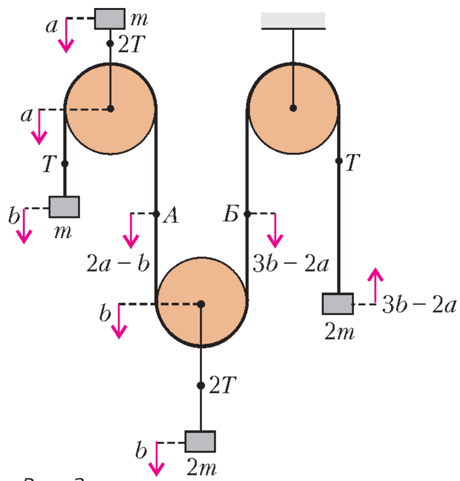


Рис. 2

него груза:

$$mg + 2T = ma,$$

для груза слева:

$$mg - T = mb,$$

для груза справа:

$$T - 2mg = 2m(3b - 2a).$$

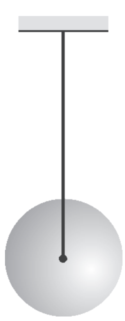
Решая систему, получим

$$a = \frac{23}{15}g,\quad b = \frac{11}{15}g,\quad T = \frac{4}{15}mg.$$

Значение T полезно посчитать – чтобы убедиться, что $T > 0$. В противном случае наше решение окажется неверным – оно основано на том, что нити в процессе движения натянуты.

А.Блоков

Ф2059. *Новые настенные часы с маятником идут очень точно. Маятник представляет собой очень легкий длинный стержень, подвешенный за один из концов, к другому концу стержня прикреплен массивный диск, радиус которого в 10 раз меньше длины стержня (см. рисунок). Диск может свободно вращаться вокруг своей оси. Со временем, из-за трения в оси диска, он перестал поворачиваться вокруг этой оси. Будут ли часы спешить или они теперь начнут отставать? Оцените неточность хода часов за сутки.*



Если диск может свободно вращаться вокруг своей оси, то он вращаться и не будет – его движение поступательное. Тогда он ведет себя как материальная точка массой M на расстоянии l (длина стержня) от точки подвеса. Обозначив начальную высоту подъема этой точки при запуске маятника h, а угловую скорость в нижней точке ω_1, запишем

$$Mgh = \frac{1}{2}Ml^2\omega_1^2.$$

Если диск закреплен, его угловая скорость ω_2 равна угловой скорости стержня, уравнение для энергии будет теперь таким:

$$Mgh = \frac{1}{2}Ml^2\omega_2^2 + \frac{1}{2}\frac{MR^2}{2}\omega_2^2$$

(мы использовали выражение для полной энергии диска радиусом R – кинетическая энергия центра масс плюс энергия вращения).

Отсюда получим

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \sqrt{1 + \frac{R^2}{2l^2}} = \sqrt{1 + \frac{1}{200}} \approx 1 + \frac{1}{400}.$$

За $24 \cdot 60$ мин $= 1440$ мин маятниковые часы отстанут на $\frac{1440\text{ мин}}{400} = 3{,}6$ мин.

З.Рафаилов

Ф2060. *Моль гелия медленно расширяется от объема 10 л до объема 10,1 л, при этом давление газа плавно уменьшается от 1 атм до 0,985 атм. Найдите теплоемкость гелия в этом процессе.*

На малом участке кривой зависимости давления от объема (а в условии задачи участок совсем мал) можно считать среднее давление равным

$$p_{\text{ср}} = \frac{1}{2}\left(p_{\text{нач}} + p_{\text{кон}}\right) = \frac{1}{2}(1 + 0{,}985)\cdot 10^5\ \text{Па} = 99250\ \text{Па}.$$

Тогда работа газа на этом участке равна

$$A = p_{\text{ср}}\Delta V = 9{,}925\ \text{Дж}$$

(конечно же, точность нашей оценки не соответствует числу выписанных цифр, но мы не забудем округлить в конце решения...).

Посчитаем приращение внутренней энергии на данном участке:

$$\Delta U = U_{\text{кон}} - U_{\text{нач}} = \frac{3}{2}RT_{\text{кон}} - \frac{3}{2}RT_{\text{нач}} =$$

$$= \frac{3}{2}\left(p_{\text{кон}}V_{\text{кон}} - p_{\text{нач}}V_{\text{нач}}\right) =$$

$$= \frac{3}{2}\left(0{,}985\cdot 10^5\cdot 10{,}1\cdot 10^{-3} - 1\cdot 10^5\cdot 10\cdot 10^{-3}\right)\ \text{Дж} =$$

$$= -7{,}725\ \text{Дж}.$$

Итак, энергия нашего газа *уменьшилась* на 7,725 Дж. Полученное газом количество теплоты равно

$$Q = A + \Delta U = 9{,}925\ \text{Дж} - 7{,}725\ \text{Дж} = 2{,}2\ \text{Дж}.$$

Теплоемкость моля гелия при этом равна

$$C = \frac{Q}{\Delta T} = \frac{Q}{\Delta U/(1{,}5R)} = -3{,}55\ \text{Дж/(моль}\cdot\text{К)}.$$

Теплоемкость получилась отрицательной – бывает...

А.Простов

Ф2061. *Тонкостенную непроводящую сферу радиусом R зарядили равномерно по поверхности полным зарядом Q, а затем разрезали пополам – по «экватору». Одну половину сферы убрали, а вторую оставили – для изучения. Найдите потенциал электрического поля, создаваемого зарядами полусферы в точке «экваториальной» плоскости, находящейся на расстоянии $R/2$ от центра сферы.*

Дополним нашу полусферу другой такой же – до полной сферы, равномерно заряженной по поверхности. Теперь поле в любой точке внутри получается нулевым. Рассмотрим произвольную точку «экваториальной» плоскости – поле в ней нулевое из-за компенсации полей полусфер.

В общем случае поле заряженной полусферы в упомянутой точке может состоять из двух составляющих – одна из них перпендикулярна экваториальной плоскости, другая лежит в этой плоскости и направлена радиально. Но если для перпендикулярной составляющей компенсация очевидна, то для радиальной она невозможна – в силу очевидной симметрии, поля полусфер должны «складываться». Отсюда вывод – в любой точке «экваториальной» плоскости получается один и тот же потенциал, так как вектор напряженности электрического поля во всех этих точках перпендикулярен «экваториальной» плоскости. Значит, можно посчитать потенциал *в любой* точке этой плоскости. Разумеется, мы выберем центр сферы:

$$\varphi = k\frac{Q/2}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{2R}.$$

Б.Сложнов

Ф2062. *На тороидальный ферромагнитный сердечник, сделанный из материала с большой магнитной проницаемостью, намотана катушка, содержащая большое число витков. Катушку подключили к сети 220 В, ток через катушку при этом составил 10 мА (действующее значение). Вольтметр, имеющий сопротивление 10 кОм, подключают между одним из концов катушки и отводом, сделанным от середины катушки (половина витков). Какое напряжение покажет вольтметр? Какой ток теперь течет через источник?*

До подключения вольтметра по катушке протекал ток $I_1 = 10$ мА, создававший соответствующий магнитный поток, при этом действующее значение ЭДС индукции составляло $U_1 = 220$ В. Этот ток был сдвинут по фазе на 90° относительно напряжения сети (катушка!). После подключения вольтметра (резистор сопротивлением $R = 10$ кОм) полный магнитный поток через катушку измениться не должен. ЭДС индукции «половинок» катушки совершенно одинаковы и в сумме дают $U = 220$ В, следовательно, напряжение, приложенное к вольтметру, равно

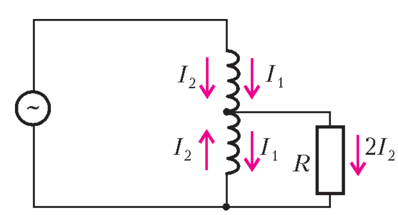
$$U_R = \frac{U}{2} = 110 \text{ В},$$

и через него течет ток

$$I_R = \frac{U_R}{R} = \frac{110 \text{ В}}{10 \text{ кОм}} = 11 \text{ мА}.$$

Этот ток совпадает по фазе с напряжением сети (резистор!). Строго говоря, вольтметр это не резистор, но когда он перестает «размахивать стрелкой» после подключения к цепи и прекращает работать электрогенератором (стрелка прибора связана с катушкой, которая движется в магнитном поле), его можно считать резистором.

Если магнитный поток через катушку не изменился, то к токам I_1 добавились одинаковые по величине и противоположно направленные токи I_2 (см. рисунок). Но при этом ток через резистор равен $I_R = 2I_2$, откуда $I_2 = 5{,}5$ мА. Этот ток совпадает по фазе с напряжением U, поэтому через источник теперь течет ток



$$I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2} \approx 11{,}4 \text{ мА}.$$

А.Зильберман

ИЗ ИСТОРИИ НАУКИ

Не деньги

(Начало см. на с. 16)

нем назван эффект несоответствия между наблюдаемой и предсказанной фазами Венеры.

Профессор математики в прусской провинции *Адольф Андерсен* (1818–1879) прославился не своими научными достижениями, а игрой в шахматы. Во второй половине XIX века многие считали его неофициальным чемпионом мира. Хотя он проиграл исторические матчи Морфи (1858 г.) и Стейницу (1866 г.), Андерсен выиграл три крупнейших международных турнира своего времени в Лондоне (1851, 1862 г.) и Баден-Бадене (1870 г.). Арпад Эло, создатель современной системы рейтинга шахматистов, рассчитал показатели ведущих игроков в шахматы прошлого и показал, что Андерсен был первым шахматистом в мире с рейтингом более 2600. Математический подход Андерсена к игре в шахматы заключался в том, что он систематически и последовательно усиливал свои позиции в нападении, не забывая о защите. Интересно отметить, что на одном из нотгельдов, посвященных Андерсену, изображен Омар Хайям, по-видимому, также ценивший шахматы.

Для меня, как для автора многих статей о физиках и математиках на монетах и банкнотах мира, нотгельды стали в какой-то мере непознанным континентом. Мой интерес к этим денежным знакам привлек Томас Яре, учитель математики из немецкого города Кемниц, на интернет-сайте которого (www.schulmodell.de) я впервые увидел некоторые из упомянутых здесь нотгельдов.