По порядку становись!

Множество M называют счетным, если его элементы можно пронумеровать натуральными числами – выписать в виде последовательности: $M = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$. Например, счетны множества целых чисел, простых чисел, квадратов:

0, 1, −1, 2, −2, 3, −3, 4, …;
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, …;
0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, …

Рисунок 1 показывает, что счетно множество $\mathbb{Z}^2$ точек плоскости с целыми координатами. На рисунке 2 показан другой способ нумерации: начинаем с точки (0; 0), нумеруем точки, сумма модулей координат которых равна 1, затем те, для которых эта сумма равна 2, и так далее – по возрастанию суммы модулей абсциссы и ординаты. Способов бесконечно много; вряд ли можно выбрать из них «самый красивый», «самый правильный».

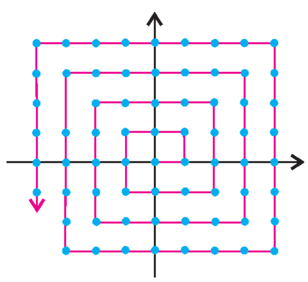

Рис. 1

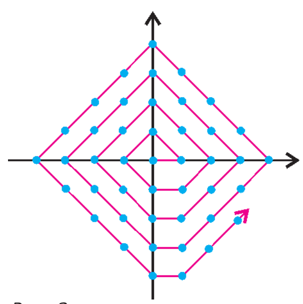

Рис. 2

Рисунок 3 доказывает счетность множества $\mathbb{N}^2$ точек плоскости с натуральными координатами. Выведем формулу для номера, которым эта нумерация снабжает точку $(x;\ y)$. Для этого заметим, что длины катетов закрашенного на рисунке 4 треугольника равны $x + y$; поэтому количество точек с натуральными координатами, расположенных внутри него, равно

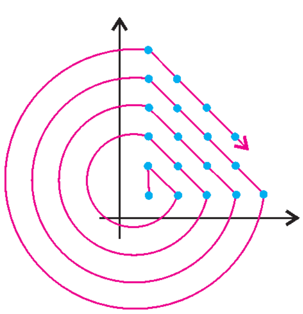

Рис. 3

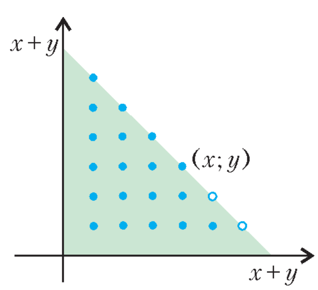

Рис. 4

$$1 + 2 + \ldots + (x + y - 2) = \frac{(x + y - 2)(x + y - 1)}{2},$$

а номер точки $(x;\ y)$ равен $\dfrac{(x + y - 2)(x + y - 1)}{2} + x$.

Множество $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ точек $(x;\ y)$, где x – натуральное число, а y – целое, тоже счетно (рис.5). Поскольку каждое рациональное число единственным образом представимо в виде дроби y/x, где $x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{Z}$, $\text{НОД}(x; y) = 1$, то рисунок 6, отличающийся от рисунка 5 только тем, что

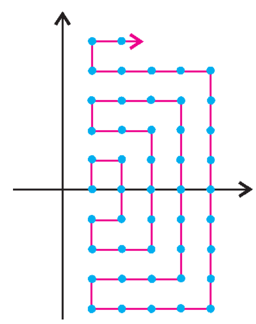

Рис. 5

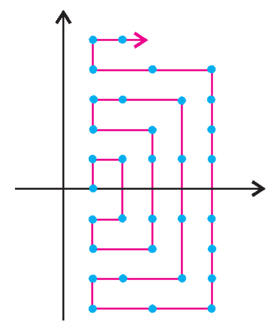

Рис. 6

пропущены точки $(x;\ y)$, у которых наибольший общий делитель чисел x и y больше 1, задает следующий способ нумерации рациональных чисел: 0, 1, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, −1, −2, $-\frac{2}{3}$, $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, 2, 3, $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{4}$, $-\frac{3}{2}$, −3, −4, $-\frac{4}{3}$, $-\frac{4}{5}$, $-\frac{3}{5}$, $-\frac{2}{5}$, $-\frac{1}{5}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{4}{3}$, 4, 5, $\frac{5}{2}$, … Разумеется, этот способ не единственный, можно придумать много других, не менее естественных нумераций множества $\mathbb{Q}$ рациональных чисел.

В 2000 году Нейл Калкин и Герберт Вилф придумали изящную нумерацию множества положительных рациональных чисел. Построение начинаем с несократимой дроби 1/1 (рис.7). Из каждого числа $x = a/b$ строим – тоже несократимые! – дроби $a/(a + b) = x/(1 + x)$ («налево-вниз») и $(a + b)/b = x + 1$ («направо-вниз»). Поскольку дробь 1/1 несократима и поскольку из всякой несократимой дроби мы строим несократимые дроби, то все дроби дерева Калкина–Вилфа несократимы.

Узнать, где в дереве расположена та или иная дробь, нетрудно. Например, дробь 19/66 меньше 1 и поэтому получена из дроби 19/47, которая получена из 19/28, которая, в свою очередь, получена из 19/9. Поскольку 19 > 9, то дробь 19/9 получена из 10/9 и так далее:

$$\frac{19}{66} \leftarrow \frac{19}{47} \leftarrow \frac{19}{28} \leftarrow \frac{19}{9} \leftarrow \frac{10}{9} \leftarrow \frac{1}{9} \leftarrow \frac{1}{8} \leftarrow \frac{1}{7} \leftarrow \frac{1}{6} \leftarrow$$

$$\leftarrow \frac{1}{5} \leftarrow \frac{1}{4} \leftarrow \frac{1}{3} \leftarrow \frac{1}{2} \leftarrow \frac{1}{1}.$$

Таким образом, индукцией по величине $m + n$ легко доказать, что каждая положительная несократимая дробь m/n встречается в дереве Калкина–Вилфа ровно один раз.

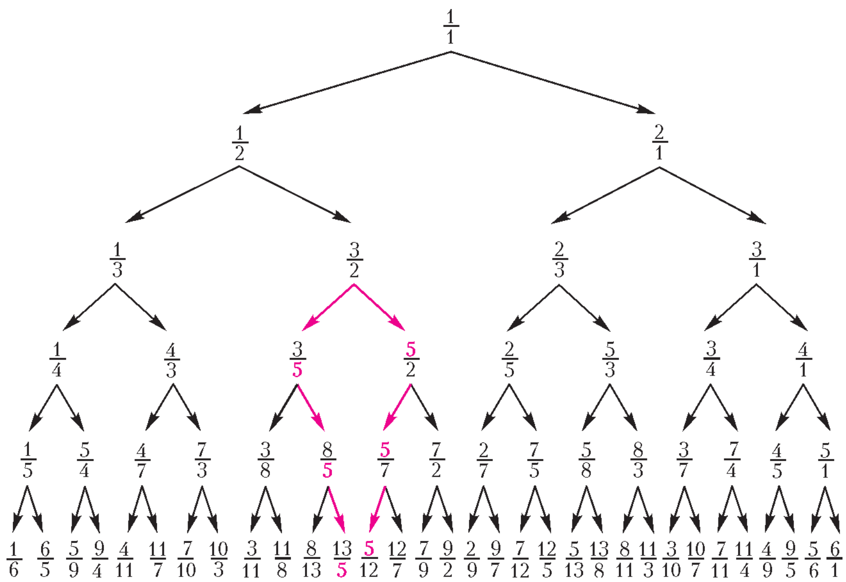

Рис. 7

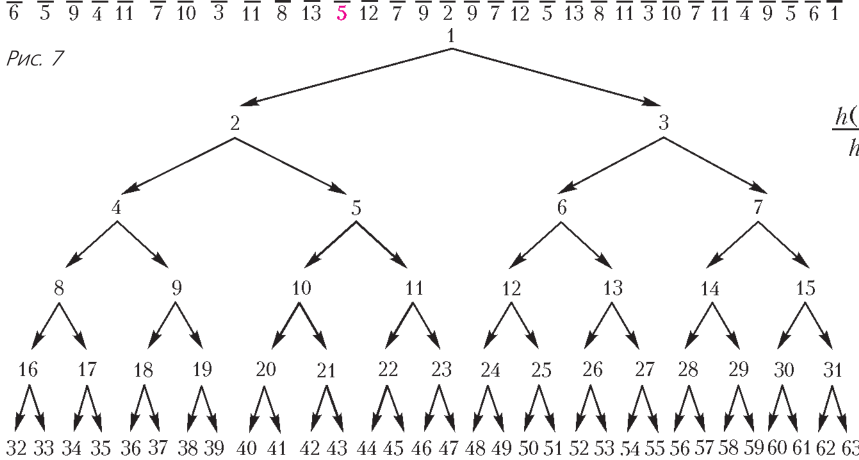

Рис. 8

Начиная с самого верха, спускаясь с этажа на этаж и двигаясь по каждому этажу слева направо, получаем нумерацию Калкина–Вилфа:

$$\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{2}{1},\frac{1}{3},\frac{3}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{1},\frac{1}{4},\frac{4}{3},\frac{3}{5},\frac{5}{2},\frac{2}{5},\frac{5}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{1},\frac{1}{5},\frac{5}{4},\frac{4}{7},\frac{7}{3},\ldots$$

Знаменатель каждой дроби является числителем следующей за ней дроби. (При переходе с этажа на следующий это очевидно верно: 1 = 1. При движении по горизонтали доказательство чуть сложнее. Идея в том, что красный на рисунке 7 знаменатель дроби 13/5 совпадает со знаменателями дробей 8/5 и 3/5. Число 5 равно сумме числителя и знаменателя дроби 3/2. Эта же сумма равна числителям дробей 5/2, 5/7 и 5/12.) Поэтому существует последовательность h такая, что n-я дробь нумерации Калкина–Вилфа равна $\dfrac{h(n-1)}{h(n)}$. Вот первые 20 членов:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$h(n)$	1	1	2	1	3	2	3	1	4	3	5

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$h(n)$	2	5	3	4	1	5	4	7	3

Рисунок 8 отличается от рисунка 7 тем, что вместо дробей указаны их номера. Как видите, каждое натуральное число n «раздваивается» в числа $2n$ и $2n + 1$. При этом дробь $\dfrac{h(n-1)}{h(n)}$ «раздваивается» в дроби $\dfrac{h(n-1)}{h(n-1)+h(n)}$ и $\dfrac{h(n-1)+h(n)}{h(n)}$ (рис.9). Значит, выполнены следующие рекуррентные соотношения:

$$h(2n-1) = h(n-1),$$
$$h(2n) = h(n-1) + h(n),$$
$$h(2n+1) = h(n).$$

(Третье соотношение получается из пер-

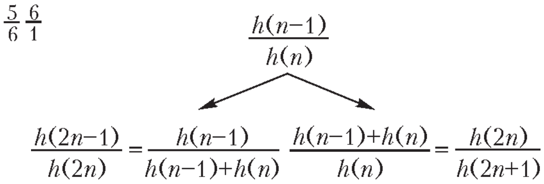

Рис. 9

вого увеличением n на единицу, так что по сути соотношений два, а не три.) Последовательность h изучил Морис Абрахам Штерн в 1858 году. Оказывается, $h(n)$ – количество способов разложить число n в сумму (быть может, состоящую из одного слагаемого или даже – в случае $n = 0$ – состоящую из нуля слагаемых) степеней двойки, где ни одно слагаемое не присутствует более чем дважды. Например,

$$18 = 2 + 16 = 2 + 8 + 8 = 2 + 4 + 4 + 8 =$$
$$= 1 + 1 + 16 = 1 + 1 + 8 + 8 = 1 + 1 + 4 + 4 + 8 =$$
$$= 1 + 1 + 2 + 2 + 4 + 8,$$

так что $h(18) = 7$. А вот объяснение равенства $h(19) = 3$:

$$19 = 1 + 2 + 16 = 1 + 2 + 8 + 8 = 1 + 2 + 4 + 4 + 8.$$

Моше Ньюман изучил функцию

$$f(x) = \frac{1}{x + 1 - 2\{x\}}$$

и последовательность 1, $f(1) = \dfrac{1}{2}$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2$, $f(2) = \dfrac{1}{3}$, $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{3}{2}$, …, каждый очередной член которой получается из предыдущего применением функции f. А это и есть уже рассмотренная выше последовательность Калкина–Вилфа. Попробуйте обосновать это самостоятельно.

При подготовке «Калейдоскопа» использованы материалы главы XVII книги М.Айгнера и Г.Циглера «Доказательства из Книги. Лучшие доказательства со времен Евклида до наших дней» (М.: Мир, 2006).

Е.Пронина