Примеры и комментарии

Алгоритмы

А-01 Запись многочлена в стандартном виде

Стандартный вид многочлена — понятие условное. Многочлены с одной буквой обычно записывают по убывающим степеням этой буквы. Например, $-3x^2+2x-1$ — стандартный вид, $2x-1-3x^2$ — этот вид уже не считается стандартным.

В некоторых задачах многочлен удобно записывать по возрастающим степеням буквы: $-1+2x-3x^2$.

В многочленах с несколькими буквами прежде всего выделяют однородные составляющие — т. е. объединяют одночлены одной и той же степени. Однородные составляющие располагают по порядку их степеней. Запись одночленов внутри однородной составляющей может быть произвольной. Традиционно учитывают алфавитный порядок букв, учитывают симметрию входящих членов. Например, слагаемые многочлена $xy+y^2+yz+z^2+xz+x^2$ можно расположить так, как располагаются слова в словаре: $x^2+xy+xz+y^2+yz+z^2$, но можно записать более симметрично: $x^2+y^2+z^2+xy+yz+xz$ или $x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz$.

А-02 Действия под многочленами

При сложении многочленов главное — не пропустить подобные слагаемые. При этом можно их подчеркивать или помечать каким-нибудь образом:

$$(3x^2y-xy^2+2x^2z-3xz^2)-(x^2z+4x^2y+3xy^2)=-x^2y-4xy^2+x^2z-3xz^2.$$

При перемножении двух многочленов в скобках нужно придерживаться какого-либо выбранного для себя правила. Например, брать одно слагаемое в первой скобке и умножать его на каждое слагаемое во второй:

$$\begin{aligned}(a+b+c)(ab+bc+ac)&=a(ab+bc+ac)+b(ab+bc+ac)+c(ab+bc+ac)=\\&=a^2b+abc+a^2c+ab^2+b^2c+abc+abc+bc^2+ac^2=\\&=a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2+3abc.\end{aligned}$$

Полезно запомнить правила перемножения двучленов.

1. $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$.

Коэффициент при x — сумма свободных членов; свободный член — произведение.

2. $(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x + abc$.

Коэффициент при x^2 — сумма свободных членов; при x — сумма их попарных членов; свободный член — произведение свободных членов.

А-03 Устные преобразования

Полезно запомнить следующее: при перемножении двух многочленов с одной буквой x коэффициент при x^k можно найти так: представить себе, как получается число k: $0+k$, $1+k-1$, $2+k-2$, $\ldots$, $k-1+1$, $k+0$, перемножить коэффициенты многочленов при таких степенях и сложить их. Например, при умножении коэффициент произведения при x^2 найдется так: $(-3)\cdot 1 + 2\cdot 5 + (-2)\cdot 2 = 3$.

А-04, А-05 Формулы сокращенного умножения и бином Ньютона

Чем больше симметричных тождеств вы запомните, тем легче вам будет делать преобразования в дальнейшем. Например, запомнив длинное тождество с суммой трех кубов —

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc),$$

вы уже без труда докажете, что:

1) если сумма трех чисел равна нулю, то сумма их кубов равна их утроенному произведению;

2) справедливо тождество $(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3 = 3(x-y)(y-z)(z-x)$.

А-06 Разложение на множители

Разложение на множители интересно тем, что при этом могут применяться самые различные способы, и главное — выбрать тот, который приведет к цели. Дадим несколько советов.

1) Если значение многочлена с буквой x при $x = a$ равно нулю, то у многочлена есть множитель $x - a$. Это позволяет угадать множитель. Например, сразу видно, что значение многочлена $2x^2 + 13x - 15$ при $x = 1$ равно нулю. Значит, можно «заставить» выделиться множитель $x - 1$:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 13x - 15 &= 2x^2 - 2x + 2x + 13x - 15 = \\ &= 2x(x-1) + 15(x-1) = \\ &= (x-1)(2x+15). \end{aligned}$$

2) При выделении полного квадрата у квадратного трехчлена с нечетным коэффициентом при x надо не забывать про коэффициент 2:

$$x^2 + 5x + 4 = x^2 + 2\cdot\frac{5}{2}\cdot x + 4 = x^2 + 2\cdot\frac{5}{2}\cdot x + \frac{25}{4} - \frac{25}{4} + 4 = \left(x+\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}.$$

Соответствия

Возможность с помощью координат установить соответствие между алгебраическими объектами — числами, уравнениями, неравенствами, — и геометрическими — точками, прямыми, кривыми линиями, многоугольниками и т. п. — важнейшая идея математики. Полезно запомнить следующие простые правила.

1) Уравнение $x = a$ на координатной плоскости изображается точками, у которых абсцисса постоянна и равна a, т. е. прямой, параллельной оси y.

2) Уравнение $y = b$ на координатной плоскости изображается точками, у которых ордината постоянна и равна b, т. е. прямой, параллельной оси x.

3) Уравнение $x = y$ на координатной плоскости изображается точками, у которых абсцисса равна ординате, т. е. прямой, являющейся биссектрисой первого и третьего координатных углов.

4) Уравнение $x = -y$ на координатной плоскости изображается точками, у которых абсцисса равна ординате с противоположным знаком, т. е. прямой, являющейся биссектрисой второго и четвертого координатных углов.

5) Если в левой части уравнения стоит произведение, надо приравнять нулю отдельный множитель, изобразить его на плоскости, а затем взять вместе, объединить полученные множества точек. Например, изображение многочлена $x(x + y)$ состоит из точек, координаты которых удовлетворяют одному из уравнений: $x = 0$ или $x + y = 0$. Получается фигура, состоящая из двух пересекающихся прямых.

Приложения

Степени маленьких чисел убывают очень быстро. Так, $(0{,}5)^{10} < 0{,}001$, а $(0{,}5)^{20} < < 0{,}000001$. Если число h достаточно мало, то уже его квадрат h^2, а тем более последующие члены, выходит за пределы точности вычислений. На этом основаны многие приближенные формулы — если в нее входят члены, степени выше первой, то отбрасывая их, мы получим приближенное значение выражения:

$$\begin{aligned} 1 + 3h + h^2 &\approx 1 + 3h, \\ (1 + h)(1 + 3h) &\approx 1 + 4h, \\ (1 + h)^5 &\approx 1 + 5h \text{ и т. п.} \end{aligned}$$

Исследования и доказательства

И-01 Сумма коэффициентов многочлена
И-02 Алгебраическое и тождественное равенства
И-03 Квадраты по модулю

Полезно запомнить простое правило: сумма коэффициентов любого многочлена получится, если вместо всех букв взять единицу.

Примеры

1) $(x^2+2xy-5y^2)(3x^2-6xy+7y^2)$.
Сумма коэффициентов равна $(1+2-5)(3-6+7)=(-2)-4=-8$.

2) $(2x-3)^{10}$.
Сумма коэффициентов равна $(2-1-3)^{10}=(-1)^{10}=1$.

Очень полезно при доказательстве тождеств правило: два многочлена с одной буквой степени n равны, если равны их значения при $n+1$ значении этой буквы. Это правило часто позволяет доказать тождество, не делая преобразований.
Например, применим это правило для проверки тождества

$$x(x+1)(x+2)(x+3)+1=(x^2+3x+1)^2.$$

Подставим четыре различных значения x:

$$\begin{array}{ll} x=0 & 0+1=1^2 \\ x=-1 & 0+1=(1-3+1)^2=1 \\ x=-2 & 0+1=(4-3-2+1)^2=1 \\ x=-3 & 0+1=(9-3-3+1)^2=1 \end{array}$$

Чтобы быть уверенным в справедливости тождества, нужно проверить его при еще одном значении x. Вместо этого можно заметить, что старшие коэффициенты левой и правой частей равны, поэтому их разность — многочлен степени три или меньше, и из того, что он имеет четыре корня, уже следует, что он тождественно равен нулю.

В задачах по теории чисел, особенно в таких, где нужно доказать невозможность какого-либо равенства, часто применяют такой прием: выбирают «модуль», натуральное число m, и рассматривают задачу «по модулю m», т. е. заменяют во всех соотношениях числа их остатками при делении на m. Часто удается провести доказательство, подобрав соответствующий модуль.
Рассмотрим, например, известную задачу. Числа p, $p+10$ и $p+14$ — простые. Найти их. Проведем вычисления по модулю 3. 10 имеют остаток 1, а 14 — остатки 2 при делении на 3. Если бы p было отлично от 3, то оно имело бы остаток 1 или 2 от деления на 3. Но тогда его сумма или с 14 или с 10 делилась бы на 3: $1+2=2+1=3$. Простые по условию числа $p+10$ и $p+14$ не могут делиться на 3. Следовательно, p может быть только 3, тогда $p+10=13$, $p+14=17$ — тоже простые числа.