

Материалы вступительных экзаменов 2007 года

Институт криптографии, связи и информатики Академии ФСБ РФ

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультеты прикладной математики и информационной безопасности)

1. Трактор выехал со станции к деревне на 30 минут раньше грузовика. Когда грузовик, обогнав трактор, приехал в деревню, трактору осталось ехать до деревни 3 км. Найдите скорости трактора и грузовика, если известно, что скорость грузовика на 20 км/ч больше скорости трактора, а расстояние от станции до деревни равно 12 км.

2. Решите неравенство

$$2 \log_{\sqrt{19}-2} \left(\frac{1}{3x-2} \right) + \log_{\frac{\sqrt{19}-2}{2}} (5-2x) \geq 0.$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{1 - \sin x \sin 3x}{2}} = \sin \frac{\pi - 4x}{2}.$$

4. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{-x^2 + 7x - 6}}{|x^2 - 6x + 5| - |x^2 - 2x - 3|} \leq 0.$$

5. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AD перпендикулярна основаниям и равна 9, $CD = 12$, а отрезок AO , где O – точка пересечения диагоналей трапеции, равен 6. Найдите угол AOB .

6. Считая x, y целыми числами, решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_4 (\sqrt{y} + 1) \cdot \log_{(y-2)^2} (x+1) + \log_{\frac{1}{(y-2)^2}} 3 = 0, \\ 4^{x+y} - 256 \cdot 2^{x+y} + 16384 = 0. \end{cases}$$

Вариант 2

(факультеты специальной техники и информационной безопасности)

1. Вычислите $\sin(\arctg(-3))$.

2. Решите неравенство

$$\log_x 3 \cdot \log_9 \left(\frac{5-12x}{12x-8} \right) \leq \frac{1}{2}.$$

3. Решите уравнение

$$3 \cos^4 x + 6 \sin^4 x - 5 \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

4. Имеются три бутылки раствора спирта различной концентрации. При смешивании 3 литров из первой бутылки, 5 литров из второй и 7 литров из третьей бутылки получается 6%-й раствор. При смешивании 1 литра из первой бутылки, 3 литров из второй и 4 литров из третьей получается 5%-й раствор спирта. Какова концентрация раствора, полученного при смешивании 3 литров из первой бутылки, 1 литра из второй и 2 литров из третьей бутылки?

5. На катете AC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая гипотенузу AB в точке K . Найдите площадь треугольника CKB , если радиус окружности, описанной около треугольника ABC , равен R и угол ABC равен β .

6. При каких значениях параметра a уравнение

$$(a-1)x^2 - (a+1)x + a = 0$$

имеет единственное решение x_0 , которое удовлетворяет условиям $0 < x_0 < 3$?

Вариант 3

(олимпиада-2007, все факультеты)

1. Упростите выражение

$$\sqrt{14 + 6\sqrt{5}} + \sqrt[3]{38 - 17\sqrt{5}}.$$

(2 балла)

2. В судне возникла течь, и один из отсеков судна был затоплен. Команда из 10 матросов откачивает воду из отсека за 6 часов, команда из 14 матросов – за 4 часа. За сколько часов откачают воду 18 матросов? (3 балла)

3. Докажите, что при пересечении выпуклого четырехугольника и выпуклого пятиугольника не может получиться десятиугольник. (3 балла)

4. Найдите все корни уравнения $|\sin(2x-1)| = \cos x$, удовлетворяющие условию $-\pi \leq x \leq \pi$. (4 балла)

5. Хорда DB длины a окружности радиуса R продолжена за точку B до точки E так, что $BE = 2a$. Диаметр AB продолжен за точку B до точки C так, что $BC = R$. Найдите периметр четырехугольника $ADCE$. (4 балла)

6. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 4^{x+y-1} + 3 \cdot 4^{2y-1} \leq 2, \\ x + 3y \geq 2 - \log_4 3. \end{cases}$$

(5 баллов)

7. Докажите, что для любого натурального числа n число $n^2 + 5n + 53$ не может делиться на 121. (5 баллов)

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультеты специальной техники и информационной безопасности)

1. Какую скорость v должен иметь вагон поезда, равномерно движущегося по закруглению горизонтальной дороги, чтобы шар, подвешенный на нити к потолку вагона, отклонился от вертикали на угол $\alpha = 45^\circ$ (рис. 1)? Шар вместе с вагоном движется по дуге окружности радиусом $R = 100$ м. При расчетах принять ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

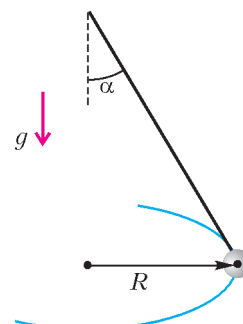


Рис. 1

2. Вагон массой $m_1 = 30$ т движется по гладким рельсам со скоростью $v_1 = 0,8$ м/с и сталкивается с вагоном массой $m_2 = 10$ т, движущимся ему навстречу с такой же скоростью. В результате столкновения произошла сцепка, и вагоны стали двигаться как единое целое. Найдите величину скорости вагонов v после столкновения.

3. Плоский воздушный конденсатор зарядили от источника тока и отключили от него. Как и во сколько раз изменится разность потенциалов на обкладках конденсатора, если увеличить расстояние между обкладками вдвое и заполнить конденсатор диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 3$?

4. Одноатомный идеальный газ, изобарически расширяясь, совершил работу $A = 4620$ Дж. Найдите приращение его внутренней энергии ΔU .

5. В однородном магнитном поле находится плоская рамка площадью $S = 0,001$ м², состоящая из $N = 5$ витков тонкой проволоки общим сопротивлением $R = 10$ Ом, концы которой замкнуты накоротко. Плоскость рамки перпендикулярна линиям поля. Магнитная индукция убывает с постоянной скоростью $\Delta B/\Delta t = 0,01$ Тл/с. Найдите силу тока I в рамке.

Вариант 2

(факультеты прикладной математики и информационной безопасности)

1. Два спутника движутся вокруг Земли по круговым орбитам, лежащим в одной плоскости, со скоростями $v_1 = 7,8$ км/с и $v_2 = 7,6$ км/с. Пользуясь только данными, приведенными в условии задачи, определите минимальное возможное расстояние l между спутниками во время их движения. Радиус Земли принять равным $R_3 = 6400$ км. Ускорение свободного падения на поверхности Земли $g = 9,8$ м/с².

2. При выстреле из пушки, находящейся на гладкой горизонтальной поверхности, вылетает снаряд под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту. За счет отдачи пушка откатывается назад со скоростью $v = 2$ м/с. Масса пушки без снаряда $M = 500$ кг. Найдите величину импульса p системы, состоящей из пушки и снаряда, сразу после выстрела.

3. Электрон через отверстие в обкладке влетает внутрь плоского конденсатора и, двигаясь вдоль линии напряженности электрического поля, полностью теряет свою скорость, пройдя путь $l = 0,016$ м. На каком расстоянии x от обкладки электрон потеряет скорость, если его начальную скорость уменьшить в $n = 2$ раза, а разность потенциалов обкладок конденсатора увеличить в такое же число раз? Действием силы тяжести пренебречь.

4. В калориметре смешивают жидкость при температуре $t_1 = 20$ °С с жидкостью при температуре $t_2 = 80$ °С с вдвое большей массой. Удельные теплоемкости жидкостей одинаковы. Найдите температуру смеси t .

5. Тонкий стержень длиной $L = 70$ см согнули под прямым углом и положили на горизонтальную поверхность. Длина одной из частей стержня, образующих прямой угол, $L_1 = 30$ см. В пространстве имеется однородное вертикальное магнитное поле с индукцией $B = 4$ мТл. Найдите величину результирующей силы Ампера F , которая действует на стержень, если по нему пропустить ток $I = 10$ А.

Вариант 3

(олимпиада-2007, все факультеты)

1. По направлению к бегущей прямолинейно с постоянной скоростью $v_{л} = 45$ км/ч лисе бежит собака. Скорость собаки все время направлена на лису и равна $v_{с} = 55$ км/ч. В некоторый момент времени оказалось, что вектор скорости

собаки образует угол $\alpha = 45^\circ$ с прямой, вдоль которой движется лиса, а расстояние между собакой и лисой равно $L = 150$ м. Найдите ускорение собаки в этот момент времени. (5 баллов)

2. Через невесомый блок с неподвижной горизонтальной осью перекинута легкая нерастяжимая нить, к концам которой прикреплены грузы массами $m_1 = 300$ г и $m_2 = 200$ г. С каким ускорением движутся грузы? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с². Трением в оси блока пренебречь. (3 балла)

3. В цилиндрическом сосуде с водой, стенки которого вертикальны, плавает деревянная дощечка. Если на нее сверху положить стеклянную пластинку, то дощечка с пластинкой останутся на плаву, но уровень воды в сосуде поднимется на $\Delta h = 20$ мм. На какую величину Δh_1 изменится уровень воды в сосуде с плавающей дощечкой, если ту же стеклянную пластинку не класть на дощечку, а бросить на дно сосуда? Плотность стекла $\rho_{с} = 2$ г/см³, плотность воды $\rho_{в} = 1$ г/см³. (4 балла)

4. Массивное тело, двигаясь со скоростью $3v$ по горизонтальной поверхности, абсолютно упруго сталкивается с шаром, движущимся со скоростью v в ту же сторону (рис.2). Масса шара m много меньше массы тела. На какую величину ΔE изменится кинетическая энергия шара в результате удара? Трением пренебречь. (3 балла)

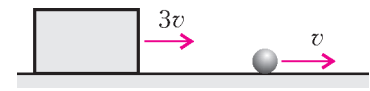


Рис. 2

5. Небольшой сосуд, стенки которого не проводят тепло, откачан до глубокого вакуума и находится в атмосфере идеального одноатомного газа, имеющего температуру T_0 . В некоторый момент времени в сосуде открывают кран и происходит заполнение сосуда газом. Какую температуру T будет иметь газ в сосуде сразу после его заполнения? (4 балла)

6. На рисунке 3 изображена электрическая цепь, состоящая из шести одинаковых звеньев. Все сопротивления одинаковые.

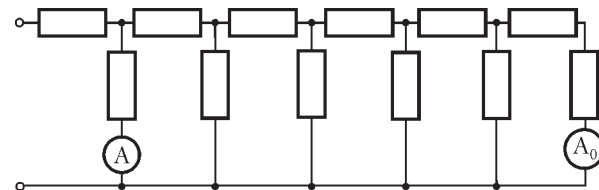


Рис. 3

наковые. На входные клеммы подано постоянное напряжение. В первое и последнее звенья цепи включены идеальные амперметры A и A_0 , при этом амперметр A показывает ток $I = 8,9$ А. Какой ток I_0 показывает амперметр A_0 ? (5 баллов)

7. Горизонтальные рельсы находятся на расстоянии $l = 0,3$ м друг от друга. На них лежит стержень, перпендикулярный рельсам. Какой должна быть индукция B однородного вертикального магнитного поля, чтобы стержень начал двигаться при пропускании по нему тока силой $I = 50$ А? Коэффициент трения стержня о рельсы $\mu = 0,2$. Масса стержня $m = 0,5$ кг. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с². (3 балла)

8. В отверстие радиусом $R = 1,5$ см в тонкой непрозрачной перегородке вставлена тонкая собирающая линза. Точечный источник света расположен на главной оптической оси линзы по одну сторону перегородки. По другую сторону перегородки находится экран. Экран, вначале соприкасающийся с линзой, отодвигают от линзы. При этом радиус

светлого пятна на экране плавно (монотонно) увеличивается и на расстоянии $L = 18$ см от перегородки достигает значения $r_1 = 3$ см. Если линзу убрать, оставив экран на месте, то радиус пятна на экране станет $r_2 = 4,5$ см. Определите фокусное расстояние F линзы. (4 балла)

Публикацию подготовили А.Леднев, А.Пичкур

Московский государственный институт
электронной техники
(технический университет)

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Тело, двигаясь прямолинейно и равнозамедленно, прошло за два одинаковых последовательных промежутка времени $\tau = 2$ с пути $s_1 = 26$ м и $s_2 = 10$ м. Определите величину a ускорения тела.

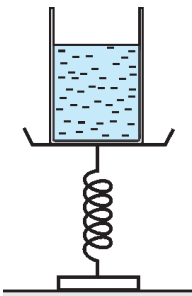


Рис. 1

2. На столе стоят пружинные весы, на весах – цилиндрический сосуд с водой (рис.1). Когда в сосуд долили некоторое количество воды, свободная поверхность воды в сосуде осталась относительно стола на прежнем уровне. Определите жесткость k пружинных весов. Внутренний радиус сосуда $r = 8$ см.

3. Вокруг горизонтальной оси O может вращаться легкий жесткий стержень, на котором на одинаковых расстояниях $l = 40$ см от оси закреплены небольшие грузы с массами m и M (рис.2; ось O перпендикулярна плоскости рисунка). Первоначально стержень удерживали в горизонтальном положении, а затем без толчка отпустили. Найдите максимальную скорость v грузов, если отношение их масс $M/m = 3$. Трением и сопротивлением воздуха пренебречь.

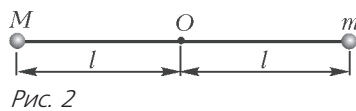


Рис. 2

4. Во сколько раз отличаются средние квадратичные скорости молекул водорода и кислорода в воздухе нашей аудитории?

5. Какое количество теплоты Q нужно сообщить в изобарном процессе одноатомному идеальному газу, чтобы увеличить его объем в $n = 2$ раза? В исходном состоянии объем и давление газа равны $V = 0,1$ м³ и $p = 100$ кПа.

6. Конденсатор, заряд которого $q = 50$ нКл, подключили к источнику напряжением $U = 100$ В. В результате энергия конденсатора увеличилась в $n = 4$ раза. Определите емкость C конденсатора.

7. При работе утюга вилка электрического шнура из-за плохого контакта с розеткой немного нагревается. Определите сопротивление r контакта «вилка-розетка», считая, что мощность выделения тепла в контакте $P_k = 2$ Вт, напряжение на спирали утюга $U = 220$ В, мощность спирали $P = 660$ Вт.

8. Тонкий металлический стержень подвешен в однородном магнитном поле на двух гибких проводниках, подключенных к источнику постоянного напряжения. Сначала стержень удерживали так, что вектор индукции магнитного поля составлял угол $\alpha = 60^\circ$ со стержнем, а затем стержень установили перпендикулярно вектору индукции. Во сколько раз изменилась при этом сила Ампера, действующая на стержень со стороны магнитного поля?

9. Наблюдатель ростом $h = 170$ см, находясь на рассто-

янии $L = 20$ м от дерева, видит его верхушку в маленьком зеркале, расположенном горизонтально на земле на расстоянии $l = 2$ м от его ног. Определите высоту H дерева.

10. Работа выхода электронов из алюминия равна $A_1 = 3,74$ эВ, а из цезия – $A_2 = 1,89$ эВ. Во сколько раз отличаются длины волн, соответствующие красным границам фотоэффекта для этих металлов?

Физические постоянные

Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с²

Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м³

Молярная масса водорода $M_v = 2$ г/моль

Молярная масса кислорода $M_k = 32$ г/моль

Вариант 2

(олимпиада-2007)

1. С какой горизонтальной скоростью v_0 нужно бросить камень с вершины горы, склон которой образует угол α с горизонтом, чтобы он упал на склон горы на расстоянии L от вершины? Ускорение свободного падения g . Сопротивлением воздуха пренебречь.

2. На гладкой горизонтальной поверхности лежит доска (рис.3). На доску опирается свободный конец тонкой однородной балки, шарнирно закрепленной под углом α к вертикали. Какую горизонтальную силу F нужно приложить к доске, чтобы медленно затягивать ее под балку с постоянной скоростью? Масса балки m , коэффициент трения между балкой и доской μ , ускорение свободного падения g .

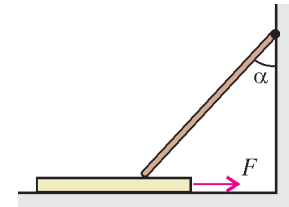


Рис. 3

3. Тело массой $m = 1$ кг бросили под углом к горизонту. На высоте $h = 10$ м его кинетическая энергия оказалась равной $E_k = 100$ Дж. Какой была величина v_0 начальной скорости тела? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с². Сопротивлением воздуха пренебречь.

4. Найдите плотность ρ водорода в сосуде объемом $V = 40$ л, если число его молекул в сосуде вдвое больше числа Авогадро N_A . Молярная масса водорода $M = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

5. Идеальный газ переводят из состояния 1 в состояние 2 в процессе, график которого изображен на рисунке 4. Считая известными давление p_1 и объемы V_1, V_2, V_3 , определите давление p_2 , при котором работа, совершенная газом в данном процессе, равна нулю.

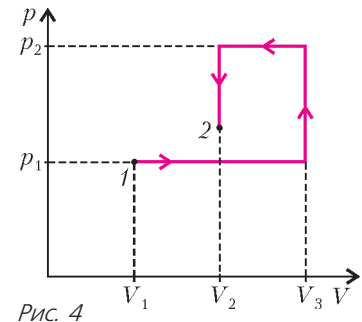


Рис. 4

6. Три одинаковых незаряженных металлических шарика 1, 2 и 3 расположены вдоль одной прямой и связаны двумя одинаковыми длинными изолирующими нитями (рис.5). Четвертый такой же шарик зарядили и по очереди прикоснулись им к первым трем в порядке возрастания их номеров. Во сколько раз после этого отличаются силы натяжения нитей?

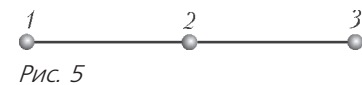


Рис. 5

7. Резистор сопротивлением $R = 18$ кОм и вольтметр соединены последовательно и подключены к источнику постоянного напряжения $U = 24$ В. Вольтметр при этом показывает напряжение $U_1 = 20$ В. Определите сопротивление r вольтметра.