

Рис. 12

### Вневписанные окружности

Кроме вписанных и описанных окружностей бывают так называемые вневписанные окружности. У треугольника имеются три вневписанные окружности (рис.12). Каждая из них касается одной стороны треугольника и продолжений двух других его сторон.

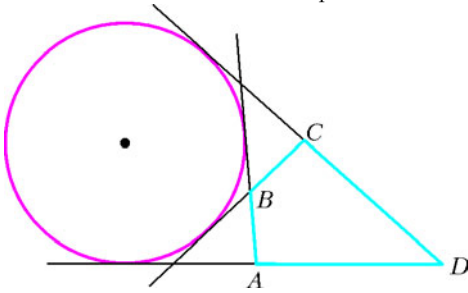


Рис. 13

На рисунке 13 изображен четырехугольник  $ABCD$  и вневписанная в него окружность, касающаяся продолжений всех его сторон.

### Упражнения

11. Установите взаимосвязь между сторонами четырехугольника, для которого имеется вневписанная окружность.

12. Приведите примеры пятиугольников, шестиугольников и так далее многоугольников, для которых имеются вневписанные окружности. Установите соотношения между их сторонами.

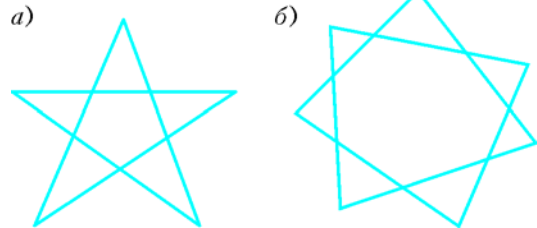


Рис. 14

13. Сформулируйте и докажите теоремы, аналогичные теоремам, рассмотренным выше, о вписанных и описанных звездчатых многоугольниках (рис.14).

## ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

# Листья улыбаются

**А.МИНЕЕВ**

У КАЖДОГО ДЕРЕВА ЕСТЬ НЕСКОЛЬКО ОСОБЫХ ТИПОВ клеток, которые во многом определяют его строение и свойства. Среди клеток листьев это устьица, на корнях растений – корневые волоски, а в стволе дерева – ближайшие к коре дерева клетки камбия. Именно по этим клеткам движется вода в растениях: через корневые волоски вода всасывается из почвы, по сосудам ксилемы (часть камбия) вода поднимается вверх по стволу к листьям и через открытые устьица испаряется в воздух.

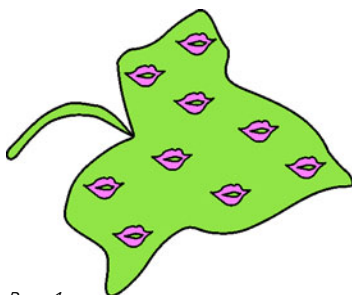


Рис. 1

Название и основное содержание предлагаемой вниманию читателя статьи относится к устьицам. Если представить себе, несколько приукрасив, открытые устьица на листе, то их можно уподобить множеству маленьких улыбок (рис.1).

Сколько места занимают устьица на листе? Возьмем типичный пример – лист кукурузы. На одном квадратном сантиметре его поверхности расположено около 10000 устьиц, площадь одного устьичного отверстия порядка 100 мкм<sup>2</sup>. Первая из этих цифр позволяет определить характерное расстояние от одного устьица до другого: оно составляет примерно 100 микрон, а вторая дает типичный геометрический размер устьица: приблизительно 10 микрон. В результате получается, что доля поверхности листа, занятая открытыми устьицами, составляет около 1%.

По плотности расположения устьиц на листе есть, естественно, свои лидеры и аутсайдеры. Среди лидеров – огурец с 60000 устьиц на квадратный сантиметр, у травянистых растений плотность равна 10000–30000 уст./см<sup>2</sup>, у древесных это 15000–30000 уст./см<sup>2</sup>, а у некоторых злаков – только 8000 уст./см<sup>2</sup>. Однако при таком большом разбросе абсолютных величин плотности устьиц доля занимаемой ими площади на листе меняется очень слабо – в пределах все тех же 1–2%.

### Устьичные парадоксы

Сформулируем два парадоксальных, на первый взгляд, утверждения, относящихся к устьицам.

1) Несмотря на малую долю (~ 1%) площади листа, занимаемой устьицами, испарение через устьица происходит практически так же, как и со свободной поверхности.

2) Как утверждает в учебниках по ботанике и физиологии растений, скорость испарения с небольших поверхностей (типа устьиц) пропорциональна их линейному размеру (диаметру), в то время как при испарении с больших поверхностей скорость испарения пропорциональна площади этой поверхности, т.е. квадрату линейного размера.

Разбору этих парадоксов и посвящено основное содержание статьи. А анализ начнем с простейшего случая – испарения воды со свободной поверхности, скажем, блюдца или стакана. Оказывается, что даже в этом случае, казалось бы изученном вдоль и поперек, нас поджидают сюрпризы.

### К теории испарения воды из стакана

Под таким высоконаучным заголовком скрывается разбор решения задачи, в которой требуется оценить время испарения воды из стакана. Это типичный пример испарения со свободной поверхности. Примем, для определенности, начальное значение высоты воды в стакане равным  $h = 10$  см.

Такая задача была решена, например, в курсе «Фейнмановских лекций по физике» (см. том «Задачи и упражнения с ответами и решениями», задача 1.3). Однако первая странность ответа задачи такова: в издании 1969 года вычисленное время испарения составляет приблизительно 7 дней, а в исправленном издании 2004 года – уже 14 дней. Допустим, что кто-то проверил приведенные там выкладки и в новом издании исправил их. Запомним это и пойдем чуть дальше – поставим стакан с водой и подождем, когда вода испарится. У автора статьи, оставившего стакан в рабочем помещении, вода испарилась за ... месяц! Правда, в проведенном эксперименте условия несколько отличались от принятых у Фейнмана, а именно:

- температура воздуха в комнате была  $18-20$  °С, у Фейнмана она составляла  $25$  °С;
- относительная влажность воздуха в комнате была 70%, у Фейнмана она принималась за 50%;
- стакан у Фейнмана располагался у открытого окна, а условиям проведенного нами эксперимента соответствовала комната с закрытой форточкой.

Как сопоставить теоретическое значение 7–14 дней с экспериментальным значением 30 дней? Понятно, что в издании 2004 года была исправлена ошибка предыдущего издания, где была утеряна двойка, но отличие между 14 и 30 днями все еще слишком велико. Проверим влияние различий в исходных данных – температуры, влажности и характера испарения (открытое окно – замкнутое пространство). Мы сознательно не будем полностью воспроизводить выкладки, приведенные в курсе «Фейнмановских лекций», поскольку интересующиеся могут ознакомиться по оригиналу, а сосредоточимся лишь на важных для нас особенностях.

**Влияние температуры.** Концентрация насыщенного водяного пара довольно сильно растет с ростом температуры окружающего воздуха. Воспользуемся справочными данными

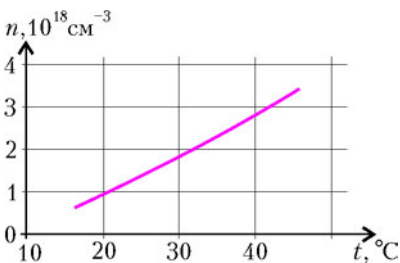


Рис. 2

для плотности  $n$  насыщенного водяного пара в зависимости от температуры  $t$ , которые приведены на рисунке 2. Из этой зависимости следует, что разница температур в эксперименте ( $18$  °С) и в теории ( $25$  °С) могла бы объяснить около 40% отличия во времени испарения (так как скорость испарения пропорциональна концентрации  $n$  водяного пара, то время испарения пропорционально  $n^{-1}$ , значит, меньшей температуре должно соответствовать большее значение времени испарения).

Однако указанный «резерв» остался фактически неиспользованным, поскольку Фейнман оценил концентрацию насыщенного водяного пара значением  $1 \cdot 10^{18}$  см $^{-3}$  при  $t =$

$= 25$  °С, а не более точной величиной  $1,4 \cdot 10^{18}$  см $^{-3}$  при той же температуре (см. рис. 2). Взятое же Фейнманом значение  $n$  фактически соответствует температуре нашего эксперимента.

**Влияние влажности.** При 100-процентной относительной влажности воздуха все испарившиеся молекулы возвращаются обратно. Стакан в этом случае как будто закрыт крышкой, и вода из него вообще не испаряется.

Зависимость времени испарения от относительной влажности  $\varphi$  очень проста:  $t_{\text{исп}} \sim \frac{1}{1-\varphi}$ . Таким образом, если влажность воздуха в помещении составляет 70–80% ( $\varphi = 0,7 - 0,8$ ) вместо 50% ( $\varphi = 0,5$ ) у Фейнмана, то время испарения вырастает в 1,67–2,5 раза.

**Влияние замкнутого помещения.** В замкнутом помещении по мере испарения воды из стакана влажность воздуха должна увеличиваться. Для оценки эффекта примем (по максимуму), что из стакана испарились все 200 мл воды, а объем помещения равен  $50$  м $^3$ . Тогда внесенная испарением плотность водяного пара составит  $200$  г/50 м $^3 = 4$  г/м $^3$ . Поскольку при температуре  $t = 18$  °С плотность водяного пара равна  $16$  г/м $^3$ , то учет этого эффекта может дать до 25% увеличения времени испарения. Однако периодическое открывание и закрывание дверей в помещении во время работы существенно ослабляет эффект.

В итоге мы получили, что различие в относительной влажности воздуха и эффект замкнутого помещения могут объяснить разницу во времени испарения: Фейнман – 2 недели, наш эксперимент – 1 месяц.

### Зависимость времени испарения от основных параметров задачи

Приведенная в задаче 1.3 из курса «Фейнмановских лекций» (издание 2004 г.) зависимость для времени испарения имеет следующий вид:

$$t_{\text{исп}} = \frac{2n_b h}{n \lambda v}. \quad (1)$$

Здесь  $h = 10$  см – начальное значение высоты воды в стакане,  $\lambda \approx 3 \cdot 10^{-5}$  см – длина свободного пробега молекул воды в воздухе,  $v \approx 600$  м/с (при  $25$  °С) – скорость испарившихся молекул воды,  $n_b \approx 3 \cdot 10^{22}$  см $^{-3}$  и  $n \approx 1 \cdot 10^{18}$  см $^{-3}$  – концентрации молекул воды и пара соответственно. Кроме того, в формуле учтено, что относительная влажность воздуха составляет 50%.

Однако прямое использование формулы (1) не для конкретного примера стакана воды, а для случая испарения с больших или меньших поверхностей оказывается невозможным и нуждается в корректировке. Дело в том, что *формально* размерности правой и левой частей соотношения (1) различны: слева – размерность времени (с), справа – размерность обратной скорости (с/м). Действительно, проследив за выкладками Фейнмана можно заметить, что размерность длины в ходе вывода была утрачена. Фейнманом принято, что на расстоянии 1 см от поверхности воды в стакане плотность пара снижается вдвое, а затем этот сантиметр был «замылен» и выпал из окончательного результата.

Введем в формулу (1) несколько изменений:

- вместо произведения  $\lambda v$  будем использовать коэффициент диффузии водяного пара  $D = \lambda v/3$ ;
- восстановим зависимость от относительной влажности воздуха  $\varphi$ ;
- учтем явно толщину  $l$  слоя половинного ослабления концентрации водяного пара.

Тогда более корректное выражение для времени испарения с точностью до множителя порядка единицы примет вид

$$t_{\text{исп}} = \frac{hl}{2D} \frac{n_{\text{в}}}{n(1-\varphi)}. \quad (2)$$

При значении параметров, принятых в задаче Фейнмана:  $h = 10$  см,  $l = 1$  см,  $n_{\text{в}} = 3 \cdot 10^{22}$  см<sup>-3</sup>,  $n = 1 \cdot 10^{18}$  см<sup>-3</sup>,  $\varphi = 0,5$ , и табличной величине коэффициента диффузии водяного пара  $D = 0,22$  см<sup>2</sup>/с формула (2) дает ответ, совпадающий с результатом Фейнмана:  $t_{\text{исп}} \approx 1,36 \cdot 10^6$  с  $\approx 15$  суток.

Восстановленная таким образом явная зависимость решения от толщины слоя половинного ослабления  $l$  оказывается очень важной для дальнейшего использования формулы (2). Так, в случае озера километрового размера величина  $l$  в безветренную погоду может составить уже метры, а при испарении через маленькое устье на листе  $l$  должно быть существенно меньше сантиметра. Получается, из общих соображений, что величина  $l$  должна снижаться по мере уменьшения размеров области испарения. Ответ становится зависящим от поперечных размеров испаряемой области («зеркала» испарения), а не только от продольного размера (глубины испаряемой области, как в формуле (1)).

Эти качественные рассуждения подтверждаются *точным* решением известной задачи об испарении капли воды начального радиуса  $a$  (которое приведено, например, в одном из лучших вузовских учебников по физике – книге Д.В. Сивухина «Общий курс физики», т.2, задача 3 к параграфу 118). Ответ к задаче имеет вид

$$t_{\text{исп}} = \frac{a^2}{2D} \frac{n_{\text{в}}}{n(1-\varphi)}$$

и переходит в решение (2) при замене  $h$  и  $l$  на единственный геометрический параметр капли – ее радиус  $a$ . Таким образом, для сферической капли как ее «глубина»  $h$ , так и толщина слоя половинного ослабления концентрации водяного пара  $l$  оказываются масштаба размера капли, т.е.  $h \approx l \approx a$ . Такая капля с начальным радиусом 1 мм в воздухе с относительной влажностью  $\varphi = 40\%$  при температуре  $t = 20$  °С испаряется примерно за 40 минут.

### Скорость испарения и задача Стефана

Скорость испарения  $\Gamma$  можно выразить через испаряемой объем  $V$  и время испарения  $t_{\text{исп}}$ :

$$\Gamma = \frac{V}{t_{\text{исп}}}.$$

Для геометрии стакана воды высотой  $h$  и площадью открытой поверхности испарения  $S$  (тогда  $V = Sh$ ) получим

$$\Gamma \approx \frac{2SD}{l} \frac{n(1-\varphi)}{n_{\text{в}}}.$$

Отсюда следует, что если толщина слоя половинного ослабления пропорциональна размерам области испарения (т.е.  $l \sim a$  и  $S \sim a^2$ ), то скорость испарения будет расти с размерами не квадратично ( $\sim S$ ), а только линейно.

Задача об испарении воды с *небольшой* поверхности круглой площади в спокойную атмосферу была решена Стефаном в 1881 году. Полученное им выражение, называемое законом Стефана, имеет вид

$$\Gamma \approx 4aD \frac{n(1-\varphi)}{n_{\text{в}}},$$

где  $a$  – радиус поверхности.

Сопоставление двух последних выражений показывает, что при  $l \sim a$  и  $S = \pi a^2$  они практически совпадают и отличаются лишь множителем, близким к единице.

В учебниках по ботанике и физиологии растений закон Стефана (испарение с небольших поверхностей) с его *линейной* зависимостью от размеров испаряемой области ( $\Gamma \sim a$ ) неявно противопоставляется случаю испарения с относительно больших поверхностей с якобы квадратичной ( $\Gamma \sim S$ ) зависимостью от поперечных размеров области испарения. Однако явный учет величины  $l$  и ее зависимости от размеров зоны испарения ставит все на свои места: и в случае закона Стефана, и при испарении капли и при испарении воды из стакана в подходе Фейнмана речь идет просто об использовании общего выражения (2) для разных частных случаев.

### А что же с устьицами?

Для случая открытых устьиц глубина испаряемой области и поперечный размер зоны испарения одного масштаба, поэтому скорость испарения пропорциональна линейному размеру устьиц  $a$ . Сравним скорость испарения  $\Gamma_{\text{л}}$  водяного пара со свободной поверхности листа площадью  $S_{\text{л}}$  и скорость испарения от  $N$  устьиц с площадью каждого  $S_{\text{у}}$ . Для первого случая имеем

$$\Gamma_{\text{л}} \approx \frac{2S_{\text{л}}D}{l_{\text{л}}} \frac{n(1-\varphi)}{n_{\text{в}}},$$

для второго –

$$\Sigma \Gamma_{\text{у}} \approx \frac{2NS_{\text{у}}D}{l_{\text{у}}} \frac{n(1-\varphi)}{n_{\text{в}}},$$

где  $l_{\text{л}}$  и  $l_{\text{у}}$  – значения толщины слоя половинного ослабления для листа как целого и для устьиц.

Отношение скоростей испарения через устьица и с открытой поверхности листа можно привести к виду

$$\frac{\Sigma \Gamma_{\text{у}}}{\Gamma_{\text{л}}} = \frac{NS_{\text{у}}}{S_{\text{л}}} \frac{l_{\text{л}}}{l_{\text{у}}}.$$

Как уже говорилось в начале статьи, относительная суммарная площадь устьиц на листе составляет  $NS_{\text{у}}/S_{\text{л}} \sim 1\%$ . Площадь листа (типичная) масштаба площади водной поверхности обычного стакана, поэтому для листа можно положить, как это сделал Фейнман для стакана воды,  $l_{\text{л}} \approx 1$  см. А для устьиц на листе в качестве характерного значения толщины слоя половинного ослабления следует брать характерное расстояние между устьицами, т.е.  $l_{\text{у}} \sim 100$  мкм =  $10^{-2}$  см. В результате получим

$$\frac{\Sigma \Gamma_{\text{у}}}{\Gamma_{\text{л}}} \approx 0,01 \frac{1}{0,01} \approx 1,$$

т.е. действительно, несмотря на то что суммарная площадь устьиц составляет всего 1%, их испаряющая способность оказывается близкой к случаю испарения с открытой поверхности (а больше она и быть не может!).

Устьица изобразили улыбку (см. рис.1), приоткрыв свою тайну огромной испаряющей способности. Этой улыбкой мы и закончим статью.