Теоремы существования и основная теорема алгебры

В.ТИХОМИРОВ

Математики стали доказывать теоремы существования сравнительно недавно. Быть может, историки математики назовут что-то иное, но мне кажется, что первой «настоящей» теоремой существования была так называемая основная теорема алгебры – теорема Даламбера – Гаусса (во Франции – Даламбера, в Германии и у нас – Гаусса). Согласно этой теореме, каждый многочлен (степени большей или равной единице) с комплексными коэффициентами имеет комплексный корень. Поясним, что это значит.

Уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет два корня, и их можно найти по формуле

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\ .$$

Если дискриминант $D = \frac{p^2}{4} - q$ неотрицателен, то корни вещественные, в остальных случаях они комплексные. Можно написать сходные формулы для полиномов третьей и четвертой степени, а для полиномов степени выше четвертой таких формул нет – в этом состоит знаменитая теорема Абеля. В «Кванте» №1 за 2003 год помещена моя статья «Абель и его великая теорема», где доказано, например, что уравнение $x^2 - 4x - 2 = 0$ не разрешимо в радикалах (т.е. формулы, подобной приведенной, для корней этого уравнения не существует). И вместе с тем, мы докажем здесь, что это уравнение имеет по меньшей мере один вещественный корень (это и есть теорема существования корня без конкретной формулы для его вычисления). А потом будет доказана и теорема Даламбера – Гаусса.

Начнем же мы с доказательства теоремы Георга Кантора – замечательного математика XIX столетия, основателя теории множеств. Для этого нам понадобятся некоторые сведения о множествах рациональных и вещественных чисел.

Счетность множества рациональных чисел

Счетное множество – это множество, элементы которого можно занумеровать с помощью натуральных чисел, т.е. установить взаимно однозначное соответствие между элементами этого множества и элементами множества натуральных чисел.

Например, счетно множество всех четных чисел:

$$\begin{array}{cccccccc} 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16\ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\ldots \end{array}$$

Рис. 1

Ясно, что счетно и множество всех целых чисел:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & 4 & -4\ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9\ldots \end{array}$$

Рис. 2

Покажем, как «пересчитать» все (положительные) рациональные числа. Каждое рациональное число представляется в виде обыкновенной дроби с целым числителем и натуральным знаменателем. Составим таблицу, в которую попадут все рациональные числа:

Числитель / Знаменатель	1	−1	2	−2	3	−3	
1	$\frac{1}{1}$	$-\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$-\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$-\frac{3}{1}$	…
2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$-\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	…
3	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$-\frac{3}{3}$	…
4	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$-\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$	…
5	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{5}$	…
…	…	…	…	…	…	…	…

Некоторые числа в этой таблице совпадают, но это не страшно.

А теперь будем нумеровать числа в таблице, двигаясь по красным стрелкам (см. следующую страницу). Если на нашем пути встретится число, которое уже занумеровано (например, $\frac{2}{2} = \frac{1}{1} = 1$), мы его просто пропустим. Тем самым, мы получим взаимно однозначное соответствие между множествами всех рациональных и всех натуральных чисел. А это и означает, что множество рациональных чисел счетно:

Знаменатель \ Числитель	1	−1	2	−2	3	−3	
1	$\frac{1}{1}$	$-\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$-\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$-\frac{3}{1}$	...
2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$-\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	...
3	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$-\frac{3}{3}$	...
4	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$-\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$	...
5	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{5}$	...
...	...	...	...	...	...	...	...

Несчетность отрезка

Докажем знаменитую **теорему Кантора**: *числа отрезка нельзя пересчитать*.

Будем доказывать эту теорему для отрезка $I = [0;\ 1]$. Мы сделаем это двумя способами. Но сначала нам надо уяснить, а что же такое *вещественное число* (хотя мы уже пользовались этим термином).

Определим это понятие не совсем строго: вещественное число – это *бесконечная десятичная дробь*. Чтобы определение было совсем строгим, нужны некоторые уточнения. Мы не будем здесь излагать теорию вещественных чисел со всей подробностью, ограничившись лишь одним свойством этих чисел.[1] Совокупность вещественных чисел x таких, что $a \le x \le b$, где $a < b$, называется отрезком, обозначаемым $[a;\ b]$. Имеет место следующее утверждение. Рассмотрим последовательность вложенных друг в друга числовых отрезков, длины которых стремятся к нулю. Тогда существует и единственно число, содержащееся во всех этих отрезках. Это утверждение называют либо аксиомой полноты, либо аксиомой Кантора, либо леммой о вложенных отрезках.

Перейдем к доказательству теоремы Кантора.

Первое доказательство. Что значит: нельзя пересчитать числа отрезка I? Это значит, что если мы выберем любую последовательность чисел $x_1, x_2, \ldots$ из I, то всегда найдется число из этого отрезка, которое не совпадает ни с одним из этих чисел. Построим такое число. Для этого разделим I на три (для определенности равные) части (рис.1). Точка x_1 не может принадлежать всем трем. Пусть I_1 – тот отрезок, которому x_1 не принадлежит. Разделим его опять на три равные части. Точка x_2 не может принадлежать всем этим трем. Пусть I_2 – отрезок, вложенный в I_1, не содержащий x_2. Далее будем поступать совершенно аналогично и построим для любого натурального n отрезок I_n, которому не принадлежит число x_n. Получим последовательность отрезков, вложенных друг в друга, длины которых стремятся к нулю. По лемме о вложенных отрезках им всем принадлежит число ξ, которое по построению не совпадает ни с одним из чисел x_n. Теорема доказана.

Рис. 1

Второе доказательство. Предположим, что нам удалось занумеровать все числа отрезка – бесконечные десятичные дроби. Запишем их в столбик одно под другим:

$$a_1 = 0,\alpha_{11}\,\alpha_{12}\,\alpha_{13}\,\alpha_{14}\,\alpha_{15}\ldots,$$
$$a_2 = 0,\alpha_{21}\,\alpha_{22}\,\alpha_{23}\,\alpha_{24}\,\alpha_{25}\ldots,$$
$$a_3 = 0,\alpha_{31}\,\alpha_{32}\,\alpha_{33}\,\alpha_{34}\,\alpha_{35}\ldots,$$
$$a_4 = 0,\alpha_{41}\,\alpha_{42}\,\alpha_{43}\,\alpha_{44}\,\alpha_{45}\ldots,$$
$$a_5 = 0,\alpha_{51}\,\alpha_{52}\,\alpha_{53}\,\alpha_{54}\,\alpha_{55}\ldots,$$
$$\ldots$$

Здесь α_{ij} – j-я цифра числа a_i. А теперь рассмотрим число $b = 0,\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4\ldots$, у которого $\beta_1 \ne \alpha_{11}$, $\beta_2 \ne \alpha_{22}$, $\beta_3 \ne \alpha_{33}$, $\beta_4 \ne \alpha_{44}$ и т.д. Это – вещественное число. Но это не a_1, потому что его первая цифра не совпадает с первой цифрой a_1; это не a_2, потому что его вторая цифра не совпадает со второй цифрой a_2; это не a_n, так как его n-я цифра не совпадает с n-й цифрой числа a_n. Значит, это число мы не занумеровали. Противоречие.

Сделаем короткое отступление. В качестве следствия из доказанной теоремы обнаружилось существование *иррациональных чисел*. Действительно, рациональные дроби можно пересчитать, и, значит, по доказанной теореме существует число, не являющееся рациональным, т.е. иррациональное число существует!

Вспомним, что впервые факт существования иррациональных чисел был осознан в Древней Греции (это приписывают Пифагору). А именно, тогда было доказано, что $\sqrt{2}$ – иррациональное число, что нет никакой дроби, квадрат которой равен двум. А мы доказали существование иррационального числа без явного его указания.

Существование трансцендентных чисел

Трансцендентное число – это число, не являющееся алгебраическим. А что такое алгебраическое число? *Алгебраическим* называется число, являющееся корнем многочлена с целыми коэффициентами. Например, $\sqrt{2}$ – корень многочлена $x^2 - 2$ – алгебраическое число; алгебраическим числом является и вещественный корень уравнения $x^5 - 4x - 2 = 0$, о котором речь шла выше. Встает вопрос: а не все ли числа вообще являются алгебраическими?

Впервые явно построил неалгебраическое число Лиувилль в 1844 году. Он доказал, что число $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}$ не является алгебраическим. Доказательство этого базируется на теории приближений чисел рациональными числами, и оно весьма непросто. А мы докажем, что трансцендентные числа существуют (и ряд сопутствующих результатов) по-другому, совсем несложно.

Существование трансцендентных чисел (так же, как и существование иррациональных чисел) следует из

---

[1] *Вещественные числа имеют геометрическую модель – прямую, и потому мы зачастую числа будем называть точками.*

доказанной выше теоремы Кантора. Для этого пересчитаем, т.е. выпишем в строчку $a_1, a_2, \ldots$ все алгебраические числа. Сделать это можно так же, как мы пересчитывали рациональные числа, только в несколько «ходов».

Занумеруем сначала все многочлены первой степени, они представляются в виде $a_1x + a_0$. Для этого составим такую таблицу:

$a_1 \backslash a_0$	0	1	−1	2	−2	3	−3	…
1	x	$x+1$	$x-1$	$x+2$	$x-2$	$x+3$	$x-3$	…
2	$2x$	$2x+1$	$2x-1$	$2x+2$	$2x-2$	$2x+3$	$2x-3$	…
3	$3x$	$3x+1$	$3x-1$	$3x+2$	$3x-2$	$3x+3$	$3x-3$	…
4	$4x$	$4x+1$	$4x-1$	$4x+2$	$4x-2$	$4x+3$	$4x-3$	…
5	$5x$	$5x+1$	$5x-1$	$5x+2$	$5x-2$	$5x+3$	$5x-3$	…
…	…	…	…	…	…	…	…	…

Будем нумеровать наши многочлены, двигаясь по стрелкам:

$a_1 \backslash a_0$	0	1	−1	2	−2	3	−3	…
1	x	$x+1$	$x-1$	$x+2$	$x-2$	$x+3$	$x-3$	…
2	$2x$	$2x+1$	$2x-1$	$2x+2$	$2x-2$	$2x+3$	$2x-3$	…
3	$3x$	$3x+1$	$3x-1$	$3x+2$	$3x-2$	$3x+3$	$3x-3$	…
4	$4x$	$4x+1$	$4x-1$	$4x+2$	$4x-2$	$4x+3$	$4x-3$	…
5	$5x$	$5x+1$	$5x-1$	$5x+2$	$5x-2$	$5x+3$	$5x-3$	…
…	…	…	…	…	…	…	…	…

У каждого из этих многочленов есть один корень; все эти корни, тем самым, получили свои номера.

Многочлены второй степени представляются в виде

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_2x^2 + P(x),$$

где $P(x) = a_1x + a_0$ − многочлен первой степени, уже получивший какой-то номер. Поступим с многочленами второй степени так же, как с многочленами первой степени:

$a_2 \backslash P(x)$	0	$P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$	$P_4(x)$	…
0	0	$P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$	$P_4(x)$	…
1	x^2	$x^2+P_1(x)$	$x^2+P_2(x)$	$x^2+P_3(x)$	$x^2+P_4(x)$	…
2	$2x^2$	$2x^2+P_1(x)$	$2x^2+P_2(x)$	$2x^2+P_3(x)$	$2x^2+P_4(x)$	…
3	$3x^2$	$3x^2+P_1(x)$	$3x^2+P_2(x)$	$3x^2+P_3(x)$	$3x^2+P_4(x)$	…
4	$4x^2$	$4x^2+P_1(x)$	$4x^2+P_2(x)$	$4x^2+P_3(x)$	$4x^2+P_4(x)$	…
…	…	…	…	…	…	…

Тем самым, все многочлены второй степени занумерованы, а значит, занумерованы и их корни.

Продолжая этот процесс, мы занумеруем все многочлены третьей степени, четвертой, …, n-й − и в конце концов придем к нумерации всех вообще многочленов и, следовательно, всех алгебраических чисел.

Итак, алгебраические числа пересчитаны, и из доказательства теоремы Кантора о несчетности отрезка следует доказательство существования трансцендентных чисел.

На протяжении десятилетий (да и поныне это случается) во многих статьях и книгах противопоставляют конструктивное предъявление Лиувиллем трансцендентного числа «неконструктивному» доказательству Кантора. Но это − заблуждение. Наше доказательство может быть сделано совершенно конструктивным. Нетрудно составить компьютерную программу, которая реализует канторовскую процедуру и которая шаг за шагом выписывает десятичные знаки неалгебраического числа.

Теперь от чисел перейдем к математическому анализу.

Теорема Коши о промежуточном значении и существование вещественного корня у вещественного многочлена нечетной степени

Теорема Коши о промежуточном значении гласит: *непрерывная на отрезке функция принимает все промежуточные значения*. Это означает, что если непрерывная функция принимает два разных значения, то она принимает и любое промежуточное значение.

График непрерывной функции (говоря снова не очень строго) обладает тем свойством, что он может быть нарисован, не отрывая карандаша от бумаги. А точное определение таково. Говорят, что функция f непрерывна в точке $\bar{x}$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно найти число $\delta > 0$ такое, что если $|x - \bar{x}| < \delta$, то $|f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon$. Функция называется непрерывной на отрезке, если она непрерывна в каждой точке отрезка. Из этого определения сразу следует, что если непрерывная функция в какой-то точке не равна нулю, то она сохраняет знак на некотором интервале (или полуинтервале, если точка концевая), содержащем эту точку. Нам понадобится только это свойство.

Теорема Коши тривиально сводится к следующему утверждению: непрерывная на отрезке функция, принимающая на концах значения разных знаков, принимает на этом отрезке нулевое значение (рис.2).

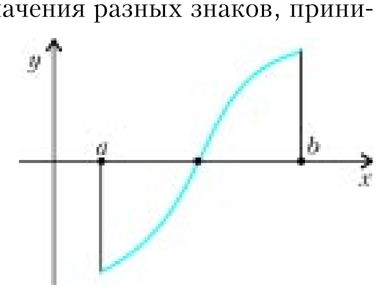

Рис. 2

Докажем теорему Коши в этой форме, «ловя» корень функции методом «деления пополам». Поделим отрезок пополам. Если ноль в середине отрезка, все доказано. Если же в середине не ноль, то на концах одного из отрезков функция принимает значения разных знаков. Делим его пополам и так далее. В точке ξ, принадлежащей по лемме о вложенных отрезках всем отрезкам (если мы не наткнемся по ходу дела на ноль), функция (из-за свойства сохранения знака) принимает нулевое значение. Теорема Коши, тем самым, доказана.

Из теоремы Коши почти сразу следует результат о многочленах нечетной степени. Действительно, любые многочлены – непрерывные функции на всей вещественной прямой. Пусть $f(x) = x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + \ldots + a_{2n}x + a_{2n+1}$ – многочлен нечетной степени. Тогда при положительных x получаем

$$\left|f(x)\right| = x^{2n+1}\left|1 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_{2n+1}}{x^{2n+1}}\right|,$$

что при достаточно больших x больше $\frac{x^{2n+1}}{2}$, т.е. $f(x)$ – положительное число. Аналогично доказывается, что при достаточно малых x $f(x)$ – отрицательное число. Значит, по теореме Коши о промежуточном значении f имеет ноль. Вот и все.

Отметим еще одно следствие из теоремы Коши: *непрерывное отображение отрезка в себя имеет неподвижную точку* (или: если f – вещественная функция, заданная на $[a;\, b]$, $a < b$, и при этом $a \le f(x) \le b$ для всех x, то существует точка $\hat{x}$ из этого отрезка такая, что $f(\hat{x}) = \hat{x}$). Докажите это самостоятельно.

Теорема Вейерштрасса о достижении экстремума функции, непрерывной на отрезке

Очень широкие приложения в математике имеют разнообразные обобщения теоремы Вейерштрасса о том, что *непрерывная на отрезке функция достигает на нем своего минимального и максимального значения.*

Докажем эту теорему. Пусть f непрерывна на некотором отрезке, для определенности на том же отрезке $I = [0;\, 1]$. Прежде всего докажем, что f ограничена на I. Допустим, что это не так и f принимает на I сколь угодно большие положительные значения. Тогда для любого натурального n найдется на I точка x_n такая, что $f(x_n) > n$. На I мы построили бесконечное множество точек. Разделим отрезок пополам. На одном из двух отрезков останется бесконечное множество точек. Его разделим пополам и так далее. И снова по лемме о вложенных отрезках существует точка, принадлежащая всем отрезкам. Из определения непрерывности следует, что на малом интервале, содержащем эту точку, функция f ограничена, что противоречит построению этой точки.

Мы доказали, что f ограничена сверху. Пусть f не достигает своего максимума. Это означает, что существует число M такое, что $f(x) > M$ для всех x из I, и вместе с тем она принимает значения как угодно близкие к M. Найдем теперь по натуральному m точку y_m такую, что $f(y_m) > M - \frac{1}{m}$. Снова построено бесконечное множество точек. И снова делим отрезок пополам и поступаем как только что, когда доказывали ограниченность. Найдем, как и там, точку η, принадлежащую всем отрезкам. По построению и из определения непрерывности следует, что $f(\eta)$ не может быть ничем иным как M. Аналогично доказывается результат и о достижении минимума. Теорема Вейерштрасса доказана.

Обобщения этой теоремы на случай функций двух переменных окажется достаточным для доказательства основной теоремы алгебры.

Обобщение теоремы Вейерштрасса

Рассмотрим функцию двух переменных $f = f(x_1, x_2)$, где x_1 и x_2 – вещественные числа. Примером функции двух переменных является функция $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ – расстояние от точки плоскости с координатами (x_1, x_2) до начала координат. Расстояние $d\left((x_1, x_2), (x_1', x_2')\right)$ между двумя точками (x_1, x_2) и (x_1', x_2') на плоскости задается формулой $\sqrt{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2}$. Функция f двух переменных называется непрерывной в точке $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно найти число $\delta > 0$ такое, что если $d\left((x_1, x_2), (\bar{x}_1, \bar{x}_2)\right) < \delta$, то $\left|f(x_1, x_2) - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\right| < \varepsilon$. Функция называется непрерывной на квадрате $\max\left(|x_1|, |x_2|\right) \le a$, если она непрерывна в каждой точке этого квадрата.

Нужное нам обобщение теоремы Вейерштрасса гласит: *непрерывная на квадрате функция достигает на нем своего минимального и максимального значения.* Доказательство этой теоремы фактически не меняется, только квадрат придется делить на четыре части.

И теперь доказательство основной теоремы алгебры сложится из двух частей, как и доказательство теоремы о многочленах нечетной степени. В первой части мы фактически повторим проведенное там рассуждение, доказав, что модуль многочлена достигает своего минимума. А далее вместо теоремы Коши о промежуточном значении воспользуемся леммой Даламбера. Но мы несколько забежали вперед.

Основная теорема алгебры

Прежде всего надо построить комплексную плоскость. Формально введем «число» i, квадрат которого равен -1. Этому числу нет места на вещественной прямой, его располагают на плоскости. Проведем на плоскости две прямые: одну – горизонтальную (ее объявляют вещественной), другую – перпендикулярную ей, проходящую через начало координат вертикальную прямую (ее объявляют мнимой прямой). Число i, находящееся на мнимой прямой в верхней полуплоскости на расстоянии 1, называют мнимой единицей.

Таким образом, числу 1 сопоставляется вектор $(1, 0)$, а числу i – вектор $(0, 1)$. Точке (a, b) плоскости сопоставляется комплексное число $z = a + bi$. Комплексные числа можно складывать и умножать по естественным правилам, как и в вещественном случае: если $z = a + bi$, $z' = a' + b'i$, то $z + z' = (a + a') + (b + b')i$, $zz' = (a + bi)(a' + b'i) = aa' - bb' + (ab' + a'b)i$. Расстояние от точки $z = a + bi$ до нуля (т.е. число $\sqrt{a^2 + b^2}$) называется модулем числа z и обозначается $|z|$. Полином степени n – это выражение вида $p(z) = a_0 z^n +$

$+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n$. Коэффициенты a_k предполагаются комплексными (в частности, вещественными) числами. Полином z^2-2 имеет два вещественных корня $\pm\sqrt{2}$, полином z^2+1 – два чисто мнимых корня $\pm i$, а полином $iz+1$ имеет один корень i.

Основная теорема алгебры: *многочлен степени $n \geq 1$ имеет комплексный корень.*

Начнем с короткого комментария. Основная теорема алгебры принадлежит к числу известнейших и безусловно самых значительных результатов в математике. Ей посвящен, в частности, цикл статей первого номера третьей серии альманаха «Математическое просвещение» (1997 г.). Процитирую первый абзац вступительной статьи в первом номере: «Впервые основная теорема алгебры была сформулирована в XVII веке Жираром (1629), а затем Декартом в его знаменитой «Геометрии», изданной в 1637 г. ... Вот как формулирует Декарт эту теорему: «Знайте, что в каждом уравнении может быть столько корней, какова его степень. ... Но иногда случается, что некоторые из этих корней ложны [так Декарт называет отрицательные числа], или даже меньше, чем ничто [здесь речь идет о комплексных корнях]».

Попытку доказать основную теорему алгебры предпринимали Эйлер и Даламбер. Основная идея рассуждения Даламбера будет приведена далее, однако его доказательство было неполным. Гаусс предложил четыре доказательства основной теоремы. Ни одно из них не может считаться удовлетворительным с нынешней точки зрения, ибо во всех его доказательствах присутствуют (без надлежащей аргументации) утверждения типа теоремы Коши о промежуточном значении. В одном из самых замечательных доказательств Гаусс сводит основную теорему к доказанному нами факту существования вещественного корня у вещественного нечетного полинома, (см. это доказательство в учебнике А.Г.Куроша «Курс высшей алгебры», § 55). Этот факт Гаусс считал очевидным, и на самом деле он таков, но для его строгого доказательства необходимо было построить теорию вещественных чисел.

А теперь переходим к доказательству основной теоремы.

Пусть $p(z)=a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n$ – полином степени n с комплексными коэффициентами ($n \geq 1$), у которого $a_n \neq 0$. Рассмотрим вещественную функцию двух переменных $f(z)=|p(z)|$. Она непрерывна (докажите!). Покажем, что эта функция «растет на бесконечности» (это показывается точно так же, как ранее для нечетного полинома). Действительно,

$$f(z)=|a_n||z|^n\left|1+\frac{a_{n-1}}{z}+\ldots+\frac{a_0}{z^{n-1}}\right|.$$

Если величина $|z|$ достаточно велика, то модуль величины $\frac{a_{n-1}}{z}+\ldots+\frac{a_0}{z^{n-1}}$ меньше $\frac{1}{2}$, и, значит, $f(z)\geq\frac{|a_n||z|^n}{2}$, так что (при достаточно большом $|z|=R$) $f(z)$ станет больше $f(0)$. Отсюда следует, что минимум функции f не может достигаться вне круга радиуса R с центром в нуле и, тем более, вне любого квадрата с центром в нуле, содержащего этот круг.

Но по теореме Вейерштрасса (для квадрата) непрерывная функция f должна достигать минимума в таком квадрате. Пусть это будет число $\hat{z}$. Не ограничивая себя в общности, можно считать, что $\hat{z}=0$ (иначе сделаем замену от z к $z-\hat{z}$). Итак, пусть f достигает минимума в нуле.

Если $f(0)=0$, то все доказано. Оказывается, что случай $f(0)>0$ невозможен.

Лемма Даламбера: *минимум модуля алгебраического полинома степени $n \geq 1$, достигающийся в нуле, не может быть отличным от нуля.*

Действительно, пусть a_k – первый после нулевого отличный от нуля коэффициент полинома $p(z)=a_0+$ $+a_1z+\ldots+a_nz^n$ (мы предположили, что $f(0)=|a_0|>0$, т.е. $a_0 \neq 0$). Возьмем одно из решений уравнения $a_0+a_kz^k=0$ (это один из корней k-й степени из числа $-a_0a_k^{-1}$). Обозначив это число через ζ, а $ta_{k+1}\zeta^{k+1}+\ldots$ $\ldots+t^{n-k}a_n\zeta^n$ – через $g(t)$, получим тогда

$$|p(t\zeta)|=\left|a_0+a_kt^k\zeta^k+a_{k+1}t^{k+1}\zeta^{k+1}+\ldots+a_nt^n\zeta^n\right|=$$

$$=\left|a_0-t^k\left(a_0+g(t)\right)\right|<|a_0|=|p(0)|,$$

ибо при малых $t>0$ $|g(t)|<\frac{|a_0|}{2}$ (рис.3). Получили противоречие. Теорема доказана.

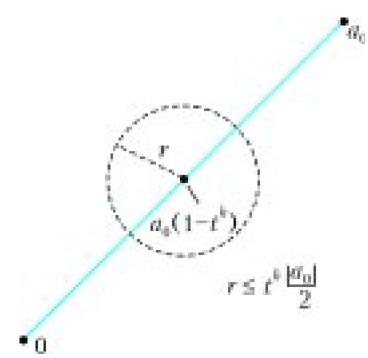

Рис. 3

И в заключение одно замечание. Я назвал основную теорему алгебры теоремой Даламбера – Гаусса, воздавая дань двоим великим математикам. Обоим не хватило для того, чтобы мы с вами признали их доказательства безупречными, самой малости: один считал очевидным, что модуль квадрата полинома достигает своего минимума, другой – что вещественный полином нечетной степени имеет вещественный ноль. Но это и на самом деле очевидно, не так ли?