Числа Пизо

А.ЕГОРОВ

В ЭТОЙ СТАТЬЕ ПОЙДЕТ РЕЧЬ О ЧИСЛАХ С ОДНИМ удивительным свойством – их степени «почти целые». Это такие числа $\alpha > 1$, для которых расстояние от α^n (n – натуральное число) до ближайшего целого числа стремится к нулю. Мы постараемся понять, почему это происходит. Но сначала рассмотрим примеры.

Несколько примеров

В 50 – 60-х годах прошлого века на математических олимпиадах различных уровней и в разных странах были популярны задачи, сходные со следующей.

Задача 1. *Найдите первые n знаков после запятой в десятичной записи числа* $\left(5+\sqrt{26}\right)^n$.

Задача эта удивительно просто решается. Пусть $\alpha = 5+\sqrt{26}$, а $\beta = 5-\sqrt{26}$ — сопряженное с α число.

Слово «сопряженное» в данном случае означает, что α и β – корни уравнения $x^2-10x-1=0$ с целыми коэффициентами.

Заметим, что если

$$\alpha^n = a_n + b_n\sqrt{26}\text{, то } \beta^n = a_n - b_n\sqrt{26},$$

где a_n и b_n – натуральные числа. Но тогда

$$\alpha^n + \beta^n = 2a_n = A_n$$

— натуральное число. При этом

$$A_n - \alpha^n = \beta^n$$

и

$$\left|A_n - \alpha^n\right| = \left|\beta^n\right| = \frac{1}{\left(5+\sqrt{26}\right)^n} < \frac{1}{10^n}.$$

Таким образом, разность между α^n и A_n отличается от нуля меньше чем на $\frac{1}{10^n}$. Поэтому ($\beta < 0$) при четном n первые n цифр после запятой – девятки, а при нечетном n – нули. Задача решена.

Пока запомним, что α и β – иррациональные корни квадратного уравнения с целым коэффициентами, причем $\alpha > 1$, а $|\beta| < 1$.

Упражнения

1. Существует ли такое n, что в десятичной записи числа $\left(2+\sqrt{2}\right)^n$ окажется 1000 одинаковых цифр после запятой? Какие это цифры?

2. Те же вопросы для чисел $\left(8+\sqrt{65}\right)^n$.

3. Докажите, что при $n \ge 5k$ расстояние от числа $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ до ближайшего к нему целого числа меньше, чем $\frac{1}{10^k}$.

Введем теперь некоторые обозначения. Для данного числа a будем обозначать через (a) ближайшее к a целое число, а через $\{\{a\}\}$ – расстояние от a до (a), т.е. $\{\{a\}\} = |(a)-a|$.

Определение 1. *Будем говорить, что число α обладает свойством Пизо, если расстояние от α^n до ближайшего целого числа стремится к нулю, т.е. если $\{\{\alpha^n\}\} \to 0$ при $n \to \infty$.*

Вот еще один пример. Рассмотрим теперь кубический многочлен

$$p(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 1.$$

Поскольку $p(3) < 0$, а $p(4) > 0$, многочлен p имеет корень на промежутке (3; 4). Аналогично, так как $p(1) < 0$ и $p(0) > 0$, у него есть корень на интервале (0; 1), а так как $p(-1) < 0$, то и на интервале (–1; 0) также имеется корень этого многочлена. Итак, многочлен p имеет в точности 3 корня $\gamma \in (-1;0)$, $\beta \in (0;1)$, $\alpha \in (3;4)$.

Упражнение 4. Докажите, что числа α, β, γ иррациональные.

Задача 2. *Докажите, что число α обладает свойством Пизо.*

Рассмотрим сумму

$$S_n = \alpha^n + \beta^n + \gamma^n.$$

Докажем, что S_n – целое число при любом n.

Для этого сначала вычислим S_1, S_2 и S_3.

По теореме Виета для кубических многочленов

$$\alpha+\beta+\gamma = 3,\quad \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma = -2,\quad \alpha\beta\gamma = -1,$$

поэтому

$$S_2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = (\alpha+\beta+\gamma)^2 - 2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma) = 13.$$

Вычислить S_3 несколько сложнее. Для этого воспользуемся известной формулой

$$x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-xz-zy\right).$$

Подставляя вместо x, y и z числа α, β, γ, получим, что

$$S_3 = \alpha^3+\beta^3+\gamma^3 = 3(13+2)+3 = 48.$$

Запишем очевидные равенства

$$\alpha^{n+3} - 3\alpha^{n+2} - 2\alpha^{n+1} + \alpha^n = 0,$$
$$\beta^{n+3} - 3\beta^{n+2} - 2\beta^{n+1} + \beta^n = 0,$$
$$\gamma^{n+3} - 3\gamma^{n+2} - 2\gamma^{n+1} + \gamma^n = 0.$$

Сложив их, получим

$$S_{n+3} - 3S_{n+2} - 2S_{n+1} + S_n = 0\,. \qquad (1)$$

Далее рассуждаем по индукции. При $n = 1$ из того, что S_1, S_2, S_3 – целые числа, следует, что и S_4 – целое число.

Пусть S_{n+2}, S_{n+1} и S_n – целые числа. Но тогда из (1) следует, что S_{n+3} тоже целое.

Итак, S_n целое при любом n. Из неравенства

$$\left|S_n - \alpha^n\right| = \left|\beta^n + \gamma^n\right| \le \left|\beta\right|^n + \left|\gamma\right|^n$$

и того, что $|\beta| < 1$ и $|\gamma| < 1$, вытекает, что

$$\left|S_n - \alpha^n\right| \to 0\,.$$

Но ведь это и есть свойство Пизо.

Упражнение 5. Найдите первые 100 знаков после запятой у числа α^{2000}, α^{2001}.

Как видите, мы довольно легко управились с поведением чисел α^n для кубического многочлена, все три корня которого действительны, причем один из них больше 1, а два оставшихся меньше единицы по модулю. Правда, пока мы еще никак явно не пользовались иррациональностью этих корней.

А что делать с кубическим многочленом, который имеет лишь один действительный корень? Рассмотрим соответствующий пример.

Задача 3. *Пусть* α *– действительный корень многочлена* $p(x) = x^3 - x - 1$. *Докажите, что число* α *обладает свойством Пизо.*

Решение. Исследование с помощью производной функции $y = x^3 - x - 1$ показывает, что этот многочлен имеет в точности один действительный корень α, причем $1 < \alpha < 2$. Пусть β и γ – комплексные корни этого многочлена. Можно доказать, что если $\beta = a + bi$, где a и b действительные, то $\gamma = a - bi$, так что $|\beta| = |\gamma| = \sqrt{a^2 + b^2}$. По теореме Виета

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0, \\ \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = 0, \\ \alpha\beta\gamma = 1. \end{cases}$$

Из последнего равенства следует, что

$$|\beta|^2 = |\gamma|^2 = |\beta\gamma| = \frac{1}{\alpha}\,.$$

Поскольку свойства действий над комплексными числами такие же, как и над действительными, дословно повторяя рассуждения, проведенные при решении задачи 2, получим, что и здесь

$$S_n = \alpha^n + \beta^n + \gamma^n$$

– целое число. При этом

$$\left|S_n - \alpha^n\right| \le |\beta|^n + |\gamma|^n < \frac{2}{\left(\sqrt{\alpha}\right)^n}\,.$$

Но $\sqrt{\alpha} > 1$, так что разность $S_n - \alpha^n$ стремится к 0 и α обладает свойством Пизо.

Упражнение 6. Докажите, что первые 1000 знаков после запятой в десятичной записи числа α^{25000} из задачи 3 одинаковы.

Во всех рассмотренных нами примерах мы имели дело с иррациональными корнями квадратичных или кубических многочленов с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом, равным 1. При этом все остальные корни этих многочленов были по модулю меньше 1. Не в этом ли причина явления, названного нами свойством Пизо?

Алгебраические числа и неприводимые многочлены

Здесь мы познакомимся с простейшими понятиями теории алгебраических чисел и неприводимых многочленов.

Определение 2. *Число* α *(действительное или комплексное) называется алгебраическим, если существует многочлен*

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$

с целыми коэффициентами a_0, $a_1, \ldots, a_n$ такой, что $p(\alpha) = 0$.

В этом определении мы можем считать, во-первых, что $a_0 > 0$ и, во-вторых, что числа a_0, $a_1, \ldots, a_n$ в совокупности взаимно просты.

Таким образом, алгебраические числа – это корни многочленов с целыми коэффициентами.

Ясно, что существует многочлен наименьшей степени, имеющий данное алгебраическое число α своим корнем. Такой многочлен называется *минимальным многочленом* числа α, а его степень – *степенью* числа α.

Рассмотренные нами ранее числа были алгебраическими числами второй и третьей степени.

Определение 3. *Говорят, что многочлен* $p(x)$ *с целыми коэффициентами неприводим, если он не делится ни на какой многочлен с целыми коэффициентами, имеющий меньшую ненулевую степень.*

Во множестве $\boldsymbol{Z}[x]$ всех многочленов с целыми коэффициентами неприводимые многочлены играют ту же роль, что и простые числа во множестве всех целых чисел. В частности, всякий многочлен из $\boldsymbol{Z}[x]$ может быть разложен в произведение неприводимых множителей и это разложение с точностью до постоянных сомножителей единственно.

Определение 4. *Многочлен с целыми коэффициентами*

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$

называется примитивным, если его коэффициенты в совокупности взаимно просты.

Важное свойство примитивных многочленов выражает следующая лемма.

Лемма Гаусса. *Произведение двух примитивных многочленов – примитивный многочлен.*

Лемма Гаусса доказывается вполне элементарно. Мы предлагаем вам доказать ее самостоятельно.

Упражнение 7. Проделайте это.

Из леммы Гаусса вытекает важное для нас в дальнейшем

Утверждение 1. *Если многочлен $p(x) \in \boldsymbol{Z}[x]$ делится на примитивный неприводимый многочлен, то частное – многочлен с целыми коэффициентами.*

Это значит, что если $p(x) = h(x)q(x)$, где многочлен $q(x)$ примитивен и неприводим, то $h(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами.

Важным для нас будет и еще одно свойство.

Утверждение 2. *Если два многочлена $f(x) \in \boldsymbol{Z}[x]$ и $p(x) \in \boldsymbol{Z}[x]$ имеют общий корень α: $f(\alpha) = 0$, $p(\alpha) = 0$, а многочлен $p(x)$ неприводим, то $f(x)$ делится на $p(x)$, т.е. $f(x) = h(x)p(x)$, где $h(x)$ – некоторый многочлен с рациональными коэффициентами. А если $p(x)$ еще и примитивен, то $h(x)$ имеет целые коэффициенты.*

Верно также следующее утверждение.

Утверждение 3. *Всякий неприводимый многочлен степени n имеет в точности n различных (действительных или комплексных) корней.*

Доказательства всех перечисленных утверждений вы можете найти в любой книге, где подробно изложена теория многочленов, или же провести их самостоятельно.

И, наконец, приведем очень важное для дальнейшего

Утверждение 4. *Минимальный многочлен всякого алгебраического числа α неприводим.*

Это утверждение почти очевидно. В самом деле, если минимальный многочлен $p(x)$ числа α раскладывается на множители $p(x) = p_1(x)p_2(x)$, где $p_1(x)$, $p_2(x)$ – многочлены меньшей степени, то $p(\alpha) = p_1(\alpha)p_2(\alpha)$. И либо $p_1(\alpha) = 0$, либо $p_2(\alpha) = 0$. Но это противоречит минимальности многочлена $p(x)$.

Определение 5. *Пусть α – алгебраическое число степени r и $p(x) = a_0x^r + \ldots + a_r$ – минимальный многочлен числа α. Пусть $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ – его корни. Числа $\alpha_2, \ldots, \alpha_r$ называются сопряженными с числом α.*

Теорема Виета

Пусть $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ ($n \ge 1$) – произвольный многочлен с действительными или комплексными коэффициентами.

По основной теореме алгебры, он имеет действительный или комплексный корень (см., например, статью В.Тихомирова «Теоремы существования и основная теорема алгебры» в предыдущем номере журнала). Из основной теоремы следует, что

$$p(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_r),$$

где x_1, x_2, x_r – корни многочлена $p(x)$. Раскрывая скобки и приравнивая коэффициенты, получим равенства

$$a_1 = -a_0(x_1 + x_2 + \ldots + x_r),$$

$$a_2 = a_0(x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{r-1}x_r),$$

$$\ldots$$

$$a_k = (-1)^k a_0(x_1x_2\ldots x_k + x_1x_2\ldots x_{k-1}x_{k+1} + \ldots + x_{r-k+1}\ldots x_r),$$

$$\ldots$$

$$a_n = (-1)^n a_0x_1x_2\ldots x_r.$$

Здесь в k-й строчке стоят суммы всевозможных произведений по k сомножителей.

Выписанные соотношения называются теоремой Виета. Они обобщают хорошо известную школьникам теорему Виета для квадратного уравнения и несколько менее известную теорему Виета для кубического уравнения.

И, наконец, сформулируем еще одно утверждение, ранее доказанное нами для многочленов второй и третьей степеней.

Утверждение 5. *Если $p(x) = x^r + a_1x^{r-1} + \ldots + a_r$ – многочлен с целыми коэффициентами, $x_1, x_2, \ldots, x_r$ – его корни, $S_n = x_1^n + \ldots + x_r^n$, то S_n – целое число при любом натуральном n.*

Это утверждение мы также не будем здесь доказывать.

Целые алгебраические числа

Определение 6. *Алгебраическое число α называется целым алгебраическим числом, если оно – корень неприводимого многочлена с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом, равным 1.*

Как видите, понятие целого алгебраического числа существенно отличается от привычного понятия целого числа. Прежде всего, сами целые числа – это целые алгебраические числа степени 1: они корни многочленов вида $p(x) = x - n$, где $n \in \boldsymbol{Z}$.

Целые же алгебраические числа более высоких степеней иррациональны. Корни многочленов из задач 1–3 – целые алгебраические числа степеней 2 и 3. Числа вида $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[5]{2}$, $\sqrt[7]{3}$ – это тоже целые алгебраические числа. Корни многочленов $2x^3 - 3x - 1$, $3x^3 + 3x + 1$ не являются целыми алгебраическими.

Пусть α – целое алгебраическое число степени r, а числа $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_r$ – сопряженные с ним числа, т.е. остальные корни минимального многочлена $p(x)$ числа α. Из утверждения 4 следует, что

$$\alpha^n + \alpha_2^n + \ldots + \alpha_r^n = S_n$$

– целое число при любом n.

Числа Пизо

Теперь приступим к главному в этой статье.

Определение 7. *Действительное целое алгебраическое число $\alpha > 1$ называется числом Пизо, если все сопряженные с ним числа по модулю меньше 1.*

Докажем, что числа Пизо обладают свойством Пизо.

Теорема 1. *Если α – число Пизо степени $r > 1$, то*

$$\lim_{n\to\infty} \{\{\alpha^n\}\} = 0.$$

Доказательство. Пусть $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ – корни минимального многочлена $p(x) = x^r + a_1x^{r-1} + \ldots + a_r$. Из утверждения 5 следует, что

$$S_n = \alpha^n + \alpha_2^n + \ldots + \alpha_r^n$$

– целое число. Рассмотрим разность $S_n - \alpha^n = \alpha_2^n + \ldots + \alpha_r^n$ и оценим ее модуль:

$$\left|S_n - \alpha^n\right| = \left|\alpha_2^n + \ldots + \alpha_r^n\right| \le \left|\alpha_2\right|^n + \ldots + \left|\alpha_r\right|^n.$$

Поскольку $|\alpha_i| < 1$ при $i = 2, \ldots, r$, правая часть последнего неравенства стремится к нулю и потому $S_n - \alpha^n \to 0$. Но это в точности значит, что $\{\{\alpha^n\}\} \to 0$.

Итак, мы обнаружили целый класс алгебраических чисел, обладающих свойством Пизо – это числа Пизо, т.е. действительные алгебраические числа, большие 1, все сопряженные которых по модулю меньше 1.

В дальнейшем мы увидим, что верна и обратная теорема: если действительное алгебраическое число $\alpha > 1$ обладает свойством Пизо, то оно является числом Пизо.

Однако сначала выясним, какие *целые* алгебраические числа обладают свойством Пизо.

Пусть $\alpha > 1$ – целое действительное алгебраическое число, а $p(x) = x^r + a_1 x^{r-1} + \ldots + a_r$ – его минимальный многочлен. Предположим, что

$$\{\{\alpha^n\}\} \to 0 .$$

Пусть A_n – ближайшее к α^n целое число и

$$\{\{\alpha^n\}\} = |A_n - \alpha^n| \to 0 .$$

Тогда $\alpha^n = A_n + \delta_n$, где $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$. Теперь умножим равенство

$$\alpha^r + a_1\alpha^{r-1} + \ldots + a_r = 0$$

на α^n:

$$\alpha^{n+r} + a_1\alpha^{n+r-1} + \ldots + a_r\alpha^n = 0 .$$

Подставим в полученное равенство $\alpha^{n+r} = A_{n+r} + \delta_{n+r}$, $\alpha^{n+r-1} = A_{n+r-1} + \delta_{n+r-1}$, …, $\alpha^n = A_n + \delta_n$.

Тогда

$$A_{n+r} + a_1 A_{n+r-1} + \ldots + a_r A_n + \gamma_n = 0 , \qquad (2)$$

где $\gamma_{n+r} = \delta_{n+r} + a_1\delta_{n+r-1} + \ldots + a_n\delta_n$.

Ясно, что $\gamma_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Но число $A_{n+r} + a_1 A_{n+r-1} + \ldots + a_r A_n$ целое и потому при всех достаточно больших n

$$A_{n+r} + a_1 A_{n+r-1} + \ldots + a_r A_n = 0 . \qquad (3)$$

В самом деле, из того, что $\gamma_n \to 0$, следует, что существует такое N, что $|\gamma_n| < 1$ при всех $n \geq N$. Но при таких n равенство (2) возможно только при выполнении равенства (3).

Итак, числа A_n при $n \geq N$ удовлетворяют рекуррентному уравнению (3).

С этого момента линейные рекурренты становятся основным аппаратом наших исследований.

Но сначала выясним, как ведут себя степени рациональных чисел.

Рациональные числа

Если $\alpha = \dfrac{p}{q} > 1$ – несократимая дробь ($q > 1$), то α – корень уравнения первой степени $qx - p = 0$.

Докажем, что $\{\{\alpha^n\}\}$ не стремится к нулю.

Предположим, что $\lim\limits_{n\to\infty} \{\{\alpha^n\}\} = 0$.

Пусть $(\alpha^n) = A_n$, так что $\alpha^n = A_n + \delta_n$ и $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$, $|\delta_n| = \{\{\alpha^n\}\}$. Но $q\alpha - p = 0$, поэтому $q\alpha^{n+1} - p\alpha^n = 0$, т.е.

$$q(A_{n+1} + \delta_{n+1}) - p(A_n + \delta_n) = qA_{n+1} - pA_n + \gamma_n = 0 ,$$

где $\gamma_n = q\delta_{n+1} - p\delta_n$, так что $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = 0$. Но число $qA_{n+1} - pA_n$ целое. Поэтому при достаточно больших n оно равно нулю, т.е.

$$A_{n+1} = \frac{p}{q} A_n \quad \text{при } n \geq N .$$

Но тогда

$$A_{n+k} = \left(\frac{p}{q}\right) A_N$$

при всех $k > 1$. Это невозможно, так как A_N не делится на q^k при достаточно больших k, т.е. A_{n+k} не целое.

Итак, не целые рациональные числа свойством Пизо не обладают.

В то же время обычные целые положительные числа, очевидно, являются числами Пизо.

Таким образом, все рациональные числа со свойством Пизо – целые.

Упражнение 7. Существует ли предел $\lim\limits_{n\to\infty} \left\{\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^n\right\}\right\}$?

Квадратичные иррациональности

Рассмотрим квадратное уравнение

$$x^2 + px + q = 0$$

с целыми коэффициентами и иррациональными корнями $\alpha > 1$ и β.

Если $|\beta| < 1$, то α – число Пизо и, как нам уже известно, $\{\{\alpha^n\}\} \to 0$ (это, напомним, следует из того, что $S_n = \alpha^n + \beta^n$ целое при любом n).

Пусть $\{\{\alpha^n\}\} \to 0$. Докажем, что $|\beta| < 1$. Запишем для нашего случая уравнение (3). Если $A_n = (\alpha^n)$, то при всех достаточно больших n будет

$$A_{n+2} + pA_{n+1} + qA_n = 0 .$$

Теперь нам предстоит немного отвлечься от основной темы и поговорить о линейных рекуррентных уравнениях.

Линейные рекурренты

Определение 8. *Последовательность* x_0, x_1, … …, x_n,… *называется линейной рекуррентой (ЛР) порядка* k, *если существуют такие числа* $a_0 \neq 0$, a_1, …, $a_k \neq 0$, *что при любом натуральном* n

$$a_0 x_{n+k} + a_1 x_{n+k-1} + \ldots + a_k x_n = 0 . \qquad (4)$$

Иногда линейные рекурренты называются также возвратными последовательностями. Числа A_n, появившиеся выше, образуют линейную рекурренту порядка r. Также являются ЛР известные многим нашим читателям числа Фибоначчи, т.е. последовательность f_0, f_1, …, f_n, …, для которой $f_0 = 1$, $f_1 = 1$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$.

Любая геометрическая прогрессия u_n образует ЛР порядка 1: $u_{n+1} = qu_n$.

Всякая арифметическая прогрессия a_n является ЛР порядка 2, ибо для нее $a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n$, т.е. $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 0$.

Заметим, что если две последовательности u_n и v_n удовлетворяют уравнению (4), то все последовательности вида $w_n = \lambda u_n + \mu v_n$ также удовлетворяют этому уравнению.

В самом деле,

$$a_0 w_{n+k} + a_1 w_{n+k-1} + \ldots + a_k w_n =$$
$$= a_0\left(\lambda u_{n+k} + \mu v_{n+k}\right) + a_1\left(\lambda u_{n+k-1} + \mu v_{n+k-1}\right) + \ldots$$
$$\ldots + a_k\left(\lambda u_n + \mu v_n\right) =$$
$$= \lambda\left(a_0 u_{n+k} + \ldots + a_k u_n\right) + \mu\left(a_0 v_{n+k} + \ldots + a_k v_n\right) = 0.$$

Будем искать решения уравнения (4) в виде комбинации простейших решений. А поскольку простейшей линейной рекуррентой является геометрическая прогрессия, сначала будем искать решения в виде $x_n = \lambda^n$, где $\lambda \ne 0$.

Подставляя λ^m вместо x_m в (4), получаем

$$a_0\lambda^{n+k} + \ldots + a_k\lambda^n = 0.$$

После сокращения на λ^n приходим к уравнению

$$a_0\lambda^k + \ldots + a_k = 0,$$

которое называется *характеристическим уравнением* линейной рекурренты.

Сделаем некоторые упрощающие дело предположения. Именно, будем считать, что характеристическое уравнение имеет k различных ненулевых корней (этот случай и будет нужен в дальнейшем). Ясно, что все прогрессии вида λ_i^n ($i = 1, 2, \ldots, k$) — решения ЛР.

Докажем теперь, что всякое решение ЛР можно «скомбинировать» из прогрессий.

Утверждение 6. *Всякое решение ЛР (4) представляется в виде*

$$x_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + \ldots + c_k\lambda_k^n.$$

Прежде всего заметим, что ЛР однозначно определяется заданием первых k членов последовательности: x_0, x_1, …, x_{k-1}.

Будем искать решение в виде

$$x_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + \ldots + c_k\lambda_k^n.$$

Подставляя сюда $n = 0, 1, \ldots, k-1$, получим систему уравнений

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + \ldots + c_k = x_0, \\ c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + \ldots + c_k\lambda_k = x_1, \\ \ldots \\ c_1\lambda_1^{k-1} + c_2\lambda_2^{k-1} + \ldots + c_k\lambda_k^{k-1} = x_{k-1}. \end{cases}$$

Вспомним, что все числа λ_1, λ_2, …, λ_k различны, и рассмотрим многочлен

$$f_i(\lambda) = \frac{f(\lambda)}{\lambda - \lambda_i} =$$
$$= a_0\left(\lambda - \lambda_1\right)\ldots\left(\lambda - \lambda_{i-1}\right)\left(\lambda - \lambda_{i+1}\right)\ldots\left(\lambda - \lambda_k\right) =$$
$$= a_0\lambda^{k-1} + \tilde{a}_{1i}\lambda^{k-1} + \tilde{a}_{2i}\lambda^{k-2} + \ldots + \tilde{a}_{k-1,i}.$$

Корни этого многочлена – это все числа λ_1, λ_2, …, λ_k, кроме λ_i. Умножив первое уравнение на $\tilde{a}_{k-1,i}$, второе – на $\tilde{a}_{k-2,i}$, …, последнее на a_0 и сложив полученные уравнения, придем к равенству

$$c_1 f_i\left(\lambda_1\right) + c_2 f_i\left(\lambda_2\right) + \ldots + c_k f_i\left(\lambda_i\right) + \ldots + c_k f_i\left(\lambda_k\right) =$$
$$= a_{k-1,i}x_0 + \ldots + a_0 x_{k-1} = M_i.$$

Но $f_i\left(\lambda_j\right) = 0$ при $i \ne j$, а $f_i\left(\lambda_i\right) \ne 0$. Поэтому

$$c_i = \frac{M_i}{f_i\left(\lambda_i\right)}.$$

Тем самым утверждение 6 доказано.

Найдем, например, формулу для n-го числа Фибоначчи.

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0.$$

Его корни $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Ищем решение в виде

$$f_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n.$$

При $n = 0$ и $n = 1$ имеем

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0, \\ c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 = 1, \end{cases} \text{откуда} \quad c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \; c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Мы получили формулу Бине:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Любопытно, что в записи целых чисел Фибоначчи участвуют иррациональности.

Вот еще один пример ЛР:

$$x_0 = 0, \; x_1 = 1, \; x_{n+2} = 2x_{n+1} - 3x_n.$$

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0$ имеет комплексные корни: $\lambda_1 = 1 + i\sqrt{2}$ и $\lambda_2 = 1 - i\sqrt{2}$, а последовательность, состоящая из целых чисел, записывается так:

$$x_n = -\frac{i}{2\sqrt{2}}\left(\left(1 + i\sqrt{2}\right)^n - \left(1 - i\sqrt{2}\right)^n\right),$$

т.е. в записи целочисленной последовательности участвуют даже мнимые числа.

Квадратичные иррациональности (завершение)

Вернемся к рассмотрению квадратичных иррациональностей.

Мы видели, что числа A_n при $n \ge N$ образуют ЛР:

$$A_{n+2} + pA_{n+1} + qA_n = 0.$$

Это значит, что

$$A_n = c_1\alpha^n + c_2\beta^n,$$

где c_1, c_2 – некоторые действительные числа, причем $c_1 \neq 0$ и $c_2 \neq 0$. (Если, например, $c_2 = 0$, то $A_{n+1}/A_n = \alpha$, что противоречит иррациональности числа α.)

Рассмотрим разность

$$A_n - \alpha^n = (c_1 - 1)\alpha^n + c_2\beta^n. \qquad (5)$$

Нам известно, что $A_n - \alpha^n \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому и $(c_1 - 1)\alpha^n + c_2\beta^n \to 0$ при $n \to \infty$. Теперь докажем лемму из элементарного курса анализа.

Лемма. *Если числа c_1, c_2, …, c_r не равны нулю, числа λ_1, λ_2, …, λ_r попарно различны, не равны нулю и все отличны от 1, а последовательность*

$$u_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + \ldots + c_r\lambda_r^n$$

имеет предел, то $|\lambda_i| < 1$ при всех $i = 1, 2, \ldots, r$ и $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Доказательство. Проведем индукцию по r. При $r = 1$ утверждение леммы очевидно. Пусть лемма справедлива для $r = k$, и

$$u_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + \ldots + c_{k+1}\lambda_{k+1}^n.$$

Рассмотрим последовательность

$$w_n = u_{n+1} - \lambda u_n = \\ = c_2(\lambda_2 - \lambda_1)\lambda_2^n + \ldots + c_{k+1}(\lambda_{k+1} - \lambda_1)\lambda_{k+1}^n.$$

Из существования предела последовательности u_n следует существование предела последовательности w_n, а из предположения индукции – справедливость леммы.

Из леммы сразу следует, что в нашем случае $c_1 = 1$, а $|\beta| < 1$. (Если $c_1 \neq 1$, то из существования предела последовательности $(c_1 - 1)\alpha^n + c_2\beta^n$ следовало бы, что $|\alpha| < 1$.)

Итак, $A_n = \alpha^n + c_2\beta^n$. Кроме того, разность

$$A_n - S_n = (c_2 - 1)\beta^n$$

тоже стремится к нулю (поскольку $|\beta| < 1$) и потому $A_n = S_n$ при достаточно больших n и $c_2 = 1$, т.е. $A_n = S_n$.

Мы доказали, что если иррациональный корень уравнения $x^2 + px + q = 0$ обладает свойством Пизо, то второй корень β по модулю меньше 1, т.е. α – число Пизо.

Итак, *целое* алгебраическое число второго порядка обладает свойством Пизо тогда и только тогда, когда оно является числом Пизо.

Кубические иррациональности

Пусть $\alpha > 1$ – целое алгебраическое число третьего порядка, т.е. корень уравнения

$$p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c,$$

где a, b, c – целые числа, многочлен $p(x)$ неприводим, а β и γ – числа (действительные или комплексные), сопряженные с α.

Предположим, что $\{\{\alpha^n\}\} \to 0$ и докажем, что α – число Пизо. Для этого мы должны доказать, что $|\beta| < 1$, $|\gamma| < 1$.

Числа A_n в этом случае образуют ЛР, для которой

$$A_{n+3} + aA_{n+2} + bA_{n+1} + cA_n = 0$$

при достаточно больших n. Как мы видели,

$$A_n = c_1\alpha^n + c_2\beta^n + c_3\gamma^n$$

для некоторых c_1, c_2, c_3.

Покажем, что ни одно из чисел c_1, c_2, c_3 не равно нулю.

Предположим, например, что $c_3 = 0$. Тогда

$$A_n = c_1\alpha^n + c_2\beta^n,$$
$$A_{n+1} = c_1\alpha^{n+1} + c_2\beta^{n+1}, \qquad (6)$$
$$A_{n+2} = c_1\alpha^{n+2} + c_2\beta^{n+2}.$$

Пусть $q(x) = (x - \alpha)(x - \beta) = x^2 + kx + l$ – квадратичный многочлен с корнями α и β.

Умножим первое из равенств (6) на l, второе на k и сложим все три равенства:

$$A_{n+2} + kA_{n+1} + lA_n = c_1\alpha^n q(\alpha) + c_2\beta^n q(\beta) = 0,$$

т.е. целые числа A_n образуют линейную рекурренту второго порядка.

Докажем, что числа k и l рациональны. В самом деле, так как

$$\begin{cases} kA_{n+1} + lA_n = -A_{n+2}, \\ kA_{n+2} + lA_{n+1} = -A_{n+3} \end{cases}$$

пара (k, l) – решение системы из двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

Вычислим определитель этой системы:

$$\begin{vmatrix} A_{n+1} & A_n \\ A_{n+2} & A_{n+1} \end{vmatrix} = A_{n+1}^2 - A_n A_{n+2} = -c_1c_2\alpha^n\beta^n(\alpha - \beta)^2 \neq 0.$$

Итак, решение системы единственно, а числа k и l, очевидно, рациональны.

Число α при этом оказывается корнем квадратного трехчлена $Mq(x)$ с целыми коэффициентами (M – общий знаменатель дробей k и l). Но это противоречит неприводимости многочлена $p(x)$. Здесь у нас впервые явно «сработала» неприводимость. Аналогично доказывается, что $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$.

Рассмотрим теперь разность

$$A_n - \alpha^n = (c_1 - 1)\alpha^n + c_2\beta^n + c_3\gamma^n.$$

Поскольку она стремится к нулю, а $\alpha > 1$, из леммы предыдущего пункта следует, что $c_1 = 1$, $|\beta| < 1$ и $|\gamma| < 1$. Итак, α – число Пизо.

Подведем итоги. Мы доказали, что *если целое алгебраическое число второго или третьего порядка обладает свойством Пизо, то оно является числом Пизо.*

Рассмотрение общего случая и окончательное решение задачи о числах Пизо мы отложим до следующего номера.

(Окончание следует)