Материалы вступительных экзаменов 2005 года

Московский государственный университет им.М.В.Ломоносова

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(олимпиада «Ломоносов-2005»)[1]

1. Вычислите

$$\frac{(x-y)\left(x^4-y^4\right)}{x^2-y^2}-\frac{2xy\left(x^3-y^3\right)}{x^2+xy+y^2}$$

при

$$x=1,\underbrace{2\ldots22}_{46},\quad y=-2,\underbrace{7\ldots7}_{45}8.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{3\cdot 2^{1-x}+1}{2^x-1}\geq\frac{1}{1-2^{-x}}.$$

3. Найдите площадь трапеции $ABCD$ с боковой стороной $BC = 5$, если расстояния от вершин A и D до прямой BC равны 3 и 7 соответственно.

4. Решите уравнение

$$\log_4\left(4\sin^2 2x\right)=2-\log_2(-2\operatorname{tg}x).$$

5. На окружности взята точка A, на ее диаметре BC – точки D и E, а на его продолжении за точку B – точка F. Найдите BC, если $\angle BAD=\angle ACD$, $\angle BAF=\angle CAE$, $BD = 2$, $BE = 5$ и $BF = 4$.

6. Решите неравенство

$$5|x|\leq x\left(3x+2-2\sqrt{8-2x-x^2}\right).$$

7. Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами 5, 12 и 13, а ее высота образует с высотами боковых граней (опущенными из той же вершины) одинаковые углы, не меньшие 30°. Какой наибольший объем может иметь такая пирамида?

8. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$4x-\left|3x-|x+a|\right|=9|x-1|$$

имеет хотя бы один корень.

9. Группа отдыхающих в течение 2 ч 40 мин каталась на моторной лодке по реке с постоянной скоростью (относительно воды) попеременно то по течению, то против: в каждую сторону в общей сложности не менее чем по 1 ч. В итоге лодка прошла путь в 40 км (относительно берега) и, отчалив от пристани A, причалила к пристани B на расстоянии 10 км от A. В какую сторону текла река? Какова при этих условиях максимальная скорость ее течения?

10. При каждом натуральном n тело Φ_n в координатном пространстве задано неравенством

$$3|x|^n+|8y|^n+|z|^n<1,$$

а тело Φ – объединение всех тел Φ_n. Найдите объем Φ.

Вариант 2

(механико-математический факультет)

1. Согласно расписанию, автобус курсирует по маршруту из пункта A в пункт B и обратно с постоянной скоростью и без остановок. На пути из A в B он был вынужден на некоторое время остановиться, поэтому на обратном пути увеличил скорость на 25%. Приехав в A с 10-минутным отклонением от расписания, он уменьшил свою последнюю скорость на 24% и прибыл в B вовремя. Какова была продолжительность вынужденной остановки?

2. Найдите $\log_2\dfrac{2x}{2^x}$ при условии

$$\left|\log_{\sqrt2}x^{x/2}-2\log_2 x\right|+\left||2-x|-|\log_2 x|\right|\leq(x-2)\log_8 x^3.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{3-x-\sqrt{5-x^2}}{\cos\dfrac{2x-7}{4}-\cos\dfrac{x-5}{4}}\geq 0.$$

4. На основании BC трапеции $ABCD$ взята точка E, лежащая на одной окружности с точками A, C и D. Другая окружность, проходящая через точки A, B и C, касается прямой CD. Найдите BC, если $AB = 12$ и $BE : EC = 4 : 5$. Найдите все возможные значения отношения радиуса первой окружности к радиусу второй при данных условиях.

5. Пусть X – сумма корней уравнения

$$a\cos x=\sqrt2+2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

на промежутке $[0;2\pi)$, а Y – сумма корней уравнения

$$a\cos 2y-2\sin 2y=a-3\sin y$$

на том же промежутке. Найдите все значения a, при которых

$$\operatorname{ctg}\frac{X-Y}{2}=\sqrt3.$$

6. Найдите объем тетраэдра $ABCD$ с ребрами $AB = 3$, $AC = 5$ и $BD = 7$, если расстояние между серединами M и N его ребер AB и CD равно 2, а прямая AB образует равные углы с прямыми AC, BD и MN.

Вариант 3

(факультет вычислительной математики и кибернетики, олимпиада[2], апрель 2005)

1. Решите неравенство

$$6\log_{2x}x+2\log_{4\sqrt{x}}(2x)\geq 1.$$

---

[1] *Эта олимпиада рассматривалась в качестве 3-го тура Всероссийской олимпиады школьников, и ее победители зачислялись на различные факультеты МГУ.*

[2] *Результаты этой олимпиады засчитывались при приеме на контрактное обучение.*

2. Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \sin 2(x+y) = 1, \\ xy = 9. \end{cases}$$

3. Найдите все пары целых x и y, удовлетворяющие равенству

$$4x^2 - 2xy + 2y^2 + y - 2x - 1 = 0 .$$

4. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты точки M и N соответственно. Отрезки AN и CM пересекаются в точке L. Площади треугольников AML, CNL и ALC равны 1, 6 и 4 соответственно. Найдите площадь треугольника MBN.

5. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S. Известно, что длина перпендикуляра, опущенного из основания H высоты пирамиды SH на грань SDC, равна $\sqrt{6}$, а угол наклона бокового ребра SB к плоскости основания равен $\frac{\pi}{3}$. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды $SABCD$.

6. Решите уравнение

$$12\cos 2x + 8|\sin x|\sqrt{3 + |\sin x| - 3\cos 2x} = 11 .$$

Вариант 4

(факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. Решите неравенство

$$\log_2\left(\frac{x^2 + |x-3| + 3}{x+1}\right)^2 - |\log_2 x - 2| > \log_2 x + 2 .$$

2. Решите уравнение

$$\sqrt{\operatorname{ctg} x + 1} = -\sqrt{15}\sin x .$$

3. Последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, являются арифметическими прогрессиями, $a_{11} = 32$, $b_{21} = 43$. Последовательность $\{c_n\}$ определяется равенствами $c_n = (-1)^n a_n + (-1)^n b_n$. Сумма первых сорока членов последовательности $\{c_n\}$ равна 100, а сумма первых ее двадцати трех членов равна -60. Найдите b_{40} и сумму первых ста членов арифметической прогрессии $\{a_n\}$.

4. На стороне AB выпуклого четырехугольника $ABCD$ выбрана точка M так, что $\angle AMD = \angle ADB$ и $\angle ACM = \angle ABC$. Утроенный квадрат отношения расстояния от точки A до прямой CD к расстоянию от точки C до прямой AD равен 2, $CD = 20$. Найдите радиус вписанной в треугольник ACD окружности.

5. Найдите все значения параметра a, принадлежащие отрезку $[0;\pi]$, при которых уравнение

$$\sin^5(3x + a) = \cos(\pi \cdot [x])$$

имеет на отрезке $[1;\pi]$ нечетное число решений. (Здесь $[x]$ – целая часть числа x, т.е. наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству $[x] \le x$.)

6. На гранях ABC, ABD, ACD и BCD тетраэдра $ABCD$ выбраны соответственно точки K, L, M и N так, что $KL \parallel CD$, $KM \parallel BD$, $KN \parallel AD$. Отношение объема тетраэдра $ABCD$ к объему тетраэдра $KLMN$ равно 64. Известно, что

$$2(AD \cdot KM + BD \cdot KN) = AD \cdot BD .$$

Найдите отношение площадей треугольников ABD и KMN.

Вариант 5

(физический факультет)

1. Решите уравнение

$$2\cos 2x \cos 7x - \cos 4x = 1 .$$

2. Решите неравенство

$$\sqrt{5x - x^2 + 6} < \sqrt{6} - x .$$

3. Решите уравнение

$$5^{x\sqrt{12}} - 5\sqrt{3}\cdot 15^{x\sqrt{3}} + 4\cdot 3^{1+x\sqrt{12}} = 0 .$$

4. На окружности взяты последовательно точки P, Q, R и S, $PQ = PS$. Отрезки PR и QS пересекаются в точке T, $RQ = q$, $RS = s$, $RT = t$. Найдите PT.

5. Решите систему

$$\begin{cases} x + 4\sqrt{x-y} = y + 12, \\ |2(x+1) + y| + 2|2x + (y-1)| = 3. \end{cases}$$

6. Вершина M прямого угла ΔLMN лежит внутри окружности с центром O и радиусом 8, проходящей через концы гипотенузы LN, MH – высота ΔLMN. На прямой LN взята точка K так, что $KH = OH$. Найдите MK.

7. Для каждого допустимого значения a решите неравенство

$$\log_{ax}\left(\frac{a}{2}\right)\log_{a^2-2}(a-1) < 0 .$$

8. В правильной треугольной пирамиде $SKLM$ с вершиной S точка N – середина отрезка KL, $SN = \sqrt{17}$. Сфера, проходящая через точки L, M и N, касается ребра SK в точке P такой, что $KP : PS = 1 : 2$. Найдите высоту SH пирамиды $SKLM$.

Вариант 6

(химический факультет)

1. Решите уравнение

$$|2x + 1| = |x + 2| .$$

2. Решите неравенство

$$\sqrt{3}\cdot 4^x \le \sqrt{2}\cdot 9^x .$$

3. Решите тригонометрическое уравнение

$$\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg} 4x + \cos 5x .$$

4. Найдите число n сторон выпуклого n-угольника, если каждый его внутренний угол не менее 143° и не более 146°.

5. Найдите все пары целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющих уравнению

$$\sqrt{2x - y - 3} + \sqrt{2y - x + 3} = 2\sqrt{3 - x - y} .$$

6. При каких значениях параметра a уравнение

$$|x| + \left|\frac{x+1}{3x-1}\right| = a$$

имеет ровно три решения?

Вариант 7

(биологический факультет, факультет биоинженерии и биоинформатики, факультет фундаментальной медицины, факультет наук о материалах)

1. Решите уравнение

$$x^2 + 2|x| - 3 = 0 .$$

2. Решите уравнение

$$\cos x - \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2}\,.$$

3. Диагонали трапеции равны 12 см и 6 см, а сумма длин оснований равна 14 см. Найдите площадь трапеции.

4. Решите неравенство

$$\sqrt{x-1} < 3 - x\,.$$

5. На беговой дорожке стадиона длиной 400 м одновременно со старта в одном направлении начинают забег два спортсмена на дистанцию 10 км. Каждый из них бежит со своей постоянной скоростью. Первый спортсмен приходит на финиш на 16 мин 40 с раньше второго и через 43 мин 20 с после того, как он второй раз на дистанции (не считая момента старта) обогнал второго спортсмена. Известно, что скорость первого спортсмена больше 100 м/мин. Сколько всего раз первый спортсмен обгонял второго на дистанции после старта?

6. Решите систему

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2-2x-22y+122} = \\ \qquad\qquad = 2\sqrt{37} - \sqrt{x^2+y^2+2x+2y+2}, \\ \log_{x+1} 4 + \log_y 4 = 0. \end{cases}$$

7. Задана функция f, причем $f(x+y) = f(x) + f(y)$ для всех рациональных чисел x, y. Известно, что $f(10) = -\pi$. Найдите $f\left(-\frac{2}{7}\right)$.

Вариант 8

(факультет почвоведения)

1. Решите уравнение

$$(6x-15)^7 = (x-1)^{14}\,.$$

2. Решите уравнение

$$\sin\left(\sqrt{3}\arcsin x\right) = 1\,.$$

3. Решите неравенство

$$|x-1| \le |x|\,.$$

4. Грузовики трех типов A, B и C возили кирпич. В первый день работали по пять грузовиков каждого типа и выполнили весь объем работы за 3 часа 12 минут. Во второй день за 6 часов 40 минут этот же объем работы выполнили по два грузовика типов A и B и четыре грузовика типа C. За сколько часов был бы выполнен весь объем работы, если бы кирпич возили два грузовика типа A и два грузовика типа B?

5. Для каких значений параметра p отношение суммы коэффициентов многочлена $(px^2-7)^{18}$ к его свободному члену минимально?

6. На плоскости даны точки с координатами: $A(1;2)$, $B(2;1)$, $C(3;-3)$, $D(0;0)$. Они являются вершинами выпуклого четырехугольника $ABCD$. В каком отношении точка пересечения диагоналей S делит диагональ AC?

Вариант 9

(географический факультет)

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 12\sin^2 x - \sin^2 y = 3, \\ 6\sin x + \cos y = -2. \end{cases}$$

2. Произведение длины средней линии трапеции и длины отрезка, соединяющего середины ее диагоналей, равно 25. Найдите площадь трапеции, если ее высота втрое больше разности оснований.

3. Решите неравенство

$$\log_{\sqrt{1-x}}(1+5x) \ge -2\,.$$

4. Найдите периметр фигуры, точки которой на координатной плоскости $(x;y)$ удовлетворяют системе

$$\begin{cases} y > \left||x-2|-1\right|, \\ x^2+y^2 < 4x+2y-3. \end{cases}$$

5. В цехе имелось N одинаковых станков, которые, работая вместе, вытачивали в день 5850 готовых деталей. После модернизации число производимых в день каждым станком готовых деталей возросло на 20%. Это позволило по крайней мере без сокращения общего объема продукции цеха уменьшить число станков максимум на 4. Найдите N.

6. Угол между прямыми, каждая из которых содержит по одной образующей конуса, равен 45°. Прямая, перпендикулярная обеим этим образующим, пересекает плоскость основания конуса под углом $\frac{\pi}{8}$. Найдите угол боковой развертки конуса, если известно, что он больше 270°.

Вариант 10

(геологический факультет)

1. Решите неравенство

$$(|x|-1)(2x^2+x-1) \le 0\,.$$

2. Решите неравенство

$$\sqrt{-x^2-x+6} - x \ge 2\,.$$

3. В треугольнике ABC угол C прямой, тангенс угла A равен $\frac{1}{4}$, медиана BD равна $\sqrt{5}$. Найдите площадь треугольника ABD и радиус окружности, описанной вокруг треугольника ABD.

4. Найдите наименьший корень уравнения

$$\sqrt{\cos 2x + x - 11} = \sqrt{x - 15 - 5\cos x}\,.$$

5. В арифметической прогрессии квадрат суммы третьего и четвертого ее членов равен сумме второго и пятого ее членов. Чему равна сумма первых шести членов этой прогрессии?

6. Решите неравенство

$$\log_x\left(x+\frac{1}{3}\right) \le \log_{\sqrt{2x+3}}\left(x+\frac{1}{3}\right).$$

7. Найдите все значения, которые может принимать сумма $x + a$ при условии

$$|2x+4-2a| + |x-2+a| \le 3\,.$$

8. В треугольной пирамиде $SABC$ плоские углы ABC и SAB прямые, двугранный угол между плоскостями ABS и ABC равен $\operatorname{arcctg}\frac{2\sqrt{10}}{3}$. Найдите длину высоты пирамиды, опущенной из вершины B на плоскость ASC, если $BC = 7$, $AB = 4$.

Вариант 11

(филологический факультет)

1. Решите уравнение

$$\left|x^2 - 3|x| + 1\right| = 1\,.$$

2. На вступительном экзамене по математике 15% поступающих не решили ни одной задачи, 144 человека решили задачи с ошибками, а число верно решивших все задачи относится к числу не решивших вовсе как 5 : 3. Сколько человек экзаменовалось по математике в этот день?

3. Решите неравенство

$$\log_2(x+1) > \log_{x+1}16\,.$$

4. Найдите площадь круга, описанного около прямоугольного треугольника, катеты которого являются корнями уравнения

$$2x^2 - 6x + 1 = 0\,.$$

5. Решите уравнение

$$2 + \sin t = 3\operatorname{tg}\frac{t}{2}\,.$$

6. Биссектриса CD угла ACB при основании равнобедренного треугольника ABC $(AB = AC)$ делит сторону AB так, что $AD = BC$. Найдите длину биссектрисы CD и площадь треугольника ABC, если $BC = 2$.

7. При каких целых a неравенство

$$2\log_{\frac{1}{2}} a - 3 + 2x\log_{\frac{1}{2}} a - x^2 < 0$$

верно для любого значения x?

Вариант 12

(экономический факультет, отделение экономики)

1. Решите уравнение

$$\sqrt{\log_{\frac{1}{9}} \operatorname{ctg}\frac{2x}{9}} + \sqrt{\log_{\frac{1}{9}} \sin 4x} = 0\,.$$

2. Найдите сумму всех целых значений, которые принимает функция

$$y = \frac{x}{\sqrt{5}} - \frac{x^2}{20} + 6$$

при $x \in [2;12]$.

3. Вновь созданное акционерное общество продало населению 1000 своих акций, установив скидку 10% на каждую пятую продаваемую акцию и 25% на каждую тринадцатую продаваемую акцию. В случае если на одну акцию выпадают обе скидки, то применяется большая из них. Определите сумму, вырученную от продажи всех акций, если цена акции составляет 1000 рублей.

4. Решите неравенство

$$\log_{2+\sqrt{5}}(4-x) - \log_{9-4\sqrt{5}}\left(4x^2 + 28x + 49\right) + \\ + \log_{\sqrt{5}-2}\left(x^2 + x - 6\right) \le 0\,.$$

5. Вписанная в треугольник ABC окружность касается его сторон в точках K, N и M. Известно, что в треугольнике KNM угол M равен 75°, произведение всех сторон равно $9 + 6\sqrt{3}$, а вершина K делит отрезок AC пополам. Найдите длины сторон треугольника ABC.

6. Найдите все рациональные решения уравнения

$$\sqrt{y(x+1)^2 - x^2 + x + 1} + \log^2_{\frac{|y+2|}{21}} \cos^2 \pi y = 0\,.$$

7. Фигура F задается на координатной плоскости неравенством

$$\frac{3\pi^2 - 2\arcsin\left(\dfrac{y-x+9}{13}\right)\cdot\arccos\left(\dfrac{10+2x+2y}{18}\right)}{|x-4|\cdot\left(\left|\sqrt{9\sqrt{128}-97}+x\right| + |y+5|\right)} \ge 0\,.$$

В каких пределах изменяются площади всевозможных кругов, целиком принадлежащих F?

Вариант 13

(Московская школа экономики)

1. Решите уравнение

$$|2x-4| + 4 = 2x\,.$$

2. Решите неравенство

$$\sqrt{x^2 + 2x} - x > 1\,.$$

3. Решите уравнение

$$1 + \log_4(x+2)^2 = \log_2(2x+8)\,.$$

4. Найдите все решения уравнения

$$6\cos\left(\frac{15\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos x = 3\,,$$

принадлежащие отрезку $[-2;10,99]$.

5. Найдите четыре числа, которые образуют арифметическую прогрессию, если сумма крайних равна 18 и второе число меньше третьего на 20%.

6. Найдите все целочисленные решения системы

$$\begin{cases}(x-3)^2 + (y-4)^2 < 5,\\ 4y \le x + 11.\end{cases}$$

7. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается стороны BC в точке M. Найдите площадь треугольника ABC, если $AC = 21$, $BM = 9$, а угол ABC равен 60°.

8. При каких значениях параметра a уравнение

$$(a-1)\cdot 4^x + (2a-3)\cdot 6^x = (3a-4)\cdot 9^x$$

имеет единственное решение?

Вариант 14

(факультет психологии)

1. Решите уравнение

$$|x-2| + 2|x+1| = 9\,.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{4^x + 5}{2^x - 11} \ge -1\,.$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{2\cos^2 x - \sqrt{3}} + \sqrt{2}\sin x = 0\,.$$

4. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали BD и AC равны стороне AB. Найдите величину угла BCD и сторону AB, если угол CDA прямой, $BC = 4$, $AD = 5$.

5. Зенон не раз наблюдал забавную игру Ахилла с черепахой: Ахилл и черепаха приближались друг к другу вдоль тропинки, стартуя с разных концов тропинки. Двигались они только навстречу друг другу, причем, когда черепаха стояла, Ахилл шел навстречу ей, а когда черепаха ползла навстречу Ахиллу, Ахилл стоял в течение всего времени ее движения. Продвигались они по тропинке друг к другу каждый со своей постоянной скоростью, одной и той же в разных играх, причем скорость идущего Ахилла была в 50 раз больше скорости ползущей черепахи. Игра заканчивалась, когда Ахилл и черепаха сходились в одной точке тропинки. В первой игре, начав сближаться по первой тропинке, они сошлись не ранее чем через 15 минут. Во второй игре, сближаясь по второй тропинке, они сошлись не позже чем через полторы минуты. В третьей игре они сошлись по третьей тропинке за 11 минут, причем в ходе этой игры Ахилл двигался в общей сложности в течение 1 минуты, а черепаха – в течение 10 минут. Известно, что сумма длин первой и третьей тропинок равна длине второй тропинки. Каково отношение расстояния, пройденного Ахиллом навстречу черепахе за время всех трех игр, к расстоянию, на которое продвинулась черепаха навстречу Ахиллу за время всех трех игр?

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых функция

$$f(x) = \frac{4\sin x + a}{4a - 2\sin x}$$

принимает все значения из отрезка $[0;1]$.

Вариант 15

(Институт стран Азии и Африки)

1. Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 3x - 4}{x + 1} \le 1 .$$

2. Решите уравнение

$$\cos 4x = 4\cos x \cos 2x - 1 .$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2 + 4x + 3} = \sqrt{(x+2)^3} .$$

4. Магазин закупил некоторое количество товара и начал его реализацию по цене на 25% выше цены, назначенной производителем, чтобы покрыть затраты, связанные с его транспортировкой, и другие дополнительные расходы. Оставшуюся после реализации часть товара магазин уценил на 16% с тем, чтобы покрыть только затраты на закупку этой части товара у производителя и его транспортировку. Сколько процентов от цены, назначенной производителем, составляла стоимость транспортировки товара?

5. Решите неравенство

$$\log_{4|x|+1}(6x+2) - \log_{6x+2}(4|x|+1) < 0 .$$

6. В выпуклом четырехугольнике с вершинами в точках A, B, C, D заданы длины отрезков $AD = 2$, $AB = 2\sqrt{3}$, $BC = 2(\sqrt{3} - 1)$. Величины углов DAB и ABC равны $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{3}$ соответственно. Вычислите все углы четырехугольника.

7. Фигура на плоскости $(x;y)$ состоит из всех точек, через которые не проходит ни одна из кривых, задаваемых соотношением

$$\left(p^4 + 4p^2 + 16\right)^2 + \left(x^2 - y^2\right)^2 = 16\left(p^3 + 4p\right)xy + 2\left(p^4 + 12p^2 + 16\right)\left(x^2 + y^2\right)$$

при различных действительных значениях p. Найдите длину линии, ограничивающей эту фигуру.

Вариант 16

(факультет государственного управления)

1. Можно ли разделить сумму в 196 рублей на 16 разных частей так, чтобы ближайшие по величине части отличались на 50 копеек?

2. Решите неравенство

$$1 < \frac{\sqrt{2}(x-4)}{\sqrt{x^2 - 8x + 17}} .$$

3. В четырехугольнике $ABCD$ найдите точку E такую, чтобы отношение площадей треугольников EAB и ECD было равно $1/2$, а треугольников EAD и EBC – $3/4$, если известны координаты всех его вершин: $A(-2;-4)$, $B(-2;3)$, $C(4;6)$, $D(4;-1)$.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x - \sin 1 = 0, \\ \cos x - \cos 1 = 0. \end{cases}$$

5. Тёма сделал несколько мелких покупок в супермаркете, имея при себе сто рублей. Давая сдачу с этой суммы, кассир ошиблась, перепутав местами цифры, и выплатила рублями то, что должна была вернуть копейками, и, наоборот, копейками то, что полагалось вернуть рублями. Купив в аптеке набор пипеток за 1 руб. 40 коп., Тёма обнаружил ошибку кассира и, пересчитав деньги, нашел, что оставшаяся у него сумма втрое превышает ту, которую ему должны были вернуть в супермаркете. Какова стоимость всех покупок Тёмы?

6. Найдите все значения a, для которых при любом положительном b уравнение

$$a\log_{\frac{1}{x}-2} 4 = \log_2\left(\frac{1}{x} - 2\right) - b$$

имеет хотя бы одно решение, меньшее $\frac{1}{3}$.

7. Для того чтобы сделать полный круг по кольцевому маршруту, автомобилю требуется 150 л бензина. На маршруте расположены пять промежуточных пунктов, в каждом из которых имеется запас в 30 л бензина. Покажите, что найдется пункт, в котором автомашина с пустыми баками и достаточным запасом пустых канистр может заправиться, стартовать и, пополняя запас бензина в четырех встречных пунктах, сделать полный круг.

Вариант 17

(социологический факультет)

1. Решите уравнение

$$\sqrt{x^2 - 4x + 9} = 3 .$$

2. Решите уравнение

$$3 \cdot 81^x - 10 \cdot 9^x + 3 = 0 .$$

3. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия содержит член $b_n = \frac{1}{6}$. Отношение суммы членов прогрессии, стоящих перед b_n, к сумме членов, стоящих после b_n, равно 6. Найдите n, если сумма всей прогрессии равна $\frac{3}{4}$.

4. Высота треугольника, равная 2, делит угол треугольника в отношении $2:1$ и делит основание треугольника на части, меньшая из которых равна 1. Определите площадь треугольника.

5. Решите неравенство

$$\log_{0,5}\left(\sqrt{5-x} - x + 1\right) > -3 .$$

6. Группа школьников решила купить музыкальный центр, при этом каждый внес одну и ту же сумму. Однако в последний момент двое отказались, и каждому из оставшихся пришлось добавить по 100 рублей. Сколько школьников первоначально участвовало в покупке, и какова цена музыкального центра, если известно, что она заключена в пределах от 17000 до 19500 рублей?

Вариант 18

(факультет глобальных процессов)

1. В турнире борцов участвуют 127 спортсменов. Борец выбывает из соревнований сразу после поражения в поединке. Сколько поединков требуется провести, чтобы выявить победителя турнира?

2. Решите неравенство

$$\frac{1}{2x^2+3x} \le \frac{1}{3x-2x^2}.$$

3. Решите неравенство

$$\log_{0,5-\left|2x^2-5x+2\right|}\left(0,5+\left|8x^2-2x-1\right|\right) \ge 1.$$

4. Найдите площадь трапеции $ABCD$ $(BC \parallel AD)$, вписанной в окружность с центром в точке O, если ее высота равна 2, а угол COD равен 60°.

5. Выясните, верно ли следующее утверждение: множество значений функции

$$y = \cos 2x - 3\sin x$$

принадлежит отрезку $\left[-4; \sqrt{5}\right]$. Ответ надо обосновать.

6. Общий процент прибыли за весь товар, проданный в трех магазинах, расположенных в разных районах города, составил 26,8%. Через первый магазин было продано 60% всего товара, через второй – 40% оставшейся части товара. С какой прибылью продан товар через третий магазин, если прибыль от продажи в первом составила 30%, а во втором – 25%?

7. Верхняя грань $ABCD$ куба $ABCDA'B'C'D'$ ($AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$ – боковые ребра) является одновременно основанием правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, у которой высота вдвое меньше длины ребра куба. Найдите угол между прямыми $A'B$ и AS.

8. Переменные x, y связаны условием

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 10 = 0.$$

Найдите все значения параметра a, при которых разность между наибольшим и наименьшим значениями выражения $2ax - 3y - 10$ больше 12.

ФИЗИКА

Физический факультет

Избранные задачи олимпиады «Покори Воробьевы горы»

1. В высокий цилиндрический сосуд с внутренним диаметром D = 7 см налито m = 50 г воды. В сосуд медленно опускают подвешенный на нити стержень массой M = 5 кг, имеющий форму прямого кругового цилиндра длиной L = = 218,3 см. Плотность материала стержня $\rho = 600$ кг/м^3. Оси сосуда и стержня вертикальны и совпадают. Найдите изменение силы натяжения подвеса, когда расстояние между нижним основанием стержня и дном сосуда станет равным h = 3 мм, по сравнению со случаем, когда стержень еще не касался воды.

2. К грузу, надетому на гладкий горизонтальный стержень, с разных сторон прикреплены две одинаковые легкие пружины жесткостью k. Другие концы пружин прикреплены к стенкам так, что оси пружин совпадают с осью стержня и пружины не деформированы. При этом длина каждой пружины равна L. В момент времени t = 0 правая стенка начинает двигаться влево с постоянной скоростью v, скользя по стержню. Найдите массу груза, если за время перемещения стенки на расстояние L скорость груза монотонно росла и стала равной v.

3. Телу, лежащему на плоскости, наклоненной под углом α к горизонту, сообщают начальную скорость v_0, направленную горизонтально вдоль наклонной плоскости. Коэффициент трения тела о плоскость $\mu > \operatorname{tg}\alpha$. Через какое время после начала движения тело остановится, если оно не покидает плоскость?

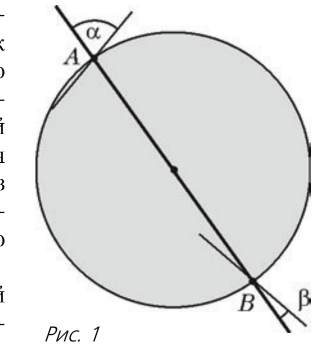

Рис. 1

4. По гладкой горизонтальной плоскости скользит диск радиусом R, вырезанный из тонкого однородного листа металла (рис.1). В момент времени $t = 0$ величина скорости точки A, расположенной на краю диска, оказалась равной v_A. При этом скорость диаметрально противоположной крайней точки B диска была направлена вдоль прямой, образующей с диаметром AB угол $\beta < 0,5\pi$, а скорость точки A совпадала с прямой, образующей с этим диаметром угол $\alpha < 0,5\pi$. Найдите величину перемещения Δr центра диска к моменту $t = \tau$. Окончательный расчет проведите для $\alpha = 60^\circ$ и $\beta = 30^\circ$.

5. Две большие одинаковые металлические пластины, находящиеся в вакууме, могут свободно двигаться вдоль перпендикулярной их плоскостям горизонтальной прямой AB, проходящей через середины пластин. Середины пластин скреплены между собой легкой недеформированной проводящей пружиной жесткостью k. На прямой AB на расстоянии L от наружных поверхностей пластин, удерживая их, закрепляют два маленьких шарика, имеющих заряды $+q$ и $-q$. При каком значении q пластины после отпускания будут совершать колебания с максимальным отклонением от исходного положения, не касаясь шариков?

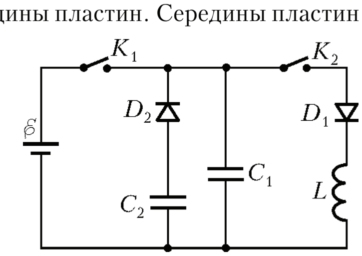

Рис. 2

6. В схеме, изображенной на рисунке 2, ключи K_1 и K_2 вначале разомкнуты, а конденсаторы разряжены. Сначала замыкают ключ K_1, затем его размыкают и замыкают ключ K_2. Зная емкости конденсаторов C_1 и C_2, найдите отношение установившегося напряжения на диоде D_2 к величине ЭДС батареи ℰ. Диоды считайте идеальными.

7. Через некоторое время τ после замыкания ключа K в схеме, показанной на рисунке 3, напряжение на конденсаторе емкостью C_2 перестало изменяться, а его заряд стал равным q. Параметры элементов указаны на рисунке. Зная, что до замыкания ключа все конденсаторы были разряжены, найдите количество теплоты Q, которое может выделиться на резисторе R_1 после этого момента. Диод считать идеальным, индуктивностью элементов схемы и внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

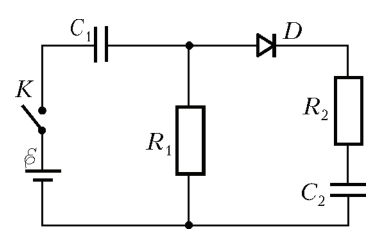

Рис. 3

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Задачи устного экзамена

1. Беговые дорожки легкоатлетического стадиона состоят из двух прямолинейных участков, соединенных двумя полуокружностями. Ширина дорожки $d = 1$ м. Линия старта проведена перпендикулярно прямолинейному участку дорожек и совпадает с линией финиша. Два бегуна, находящихся на первой (внутренней) и второй (внешней) дорожках, одновременно принимают старт и пробегают до финиша один круг. Они разгоняются равноускоренно, пока не наберут максимальную скоростью $v_0 = 8$ м/с, одинаковую для обоих бегунов, с которой и пробегают оставшуюся часть дистанции. На сколько отличаются времена разгона бегунов, если, двигаясь каждый по середине своей дорожки, они финишируют одновременно?

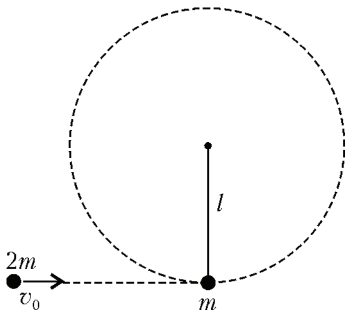

Рис. 4

2. Шарик массой m подвешен на невесомой нерастяжимой нити длиной $l = 1$ м (рис.4). В него ударяется шарик массой $2m$, летящий в плоскости рисунка со скоростью v_0 так, что вектор скорости направлен горизонтально вдоль линии, соединяющей центры шариков. Какой должна быть скорость v_0, чтобы после удара шарик массой m совершил полный оборот по окружности в вертикальной плоскости? Удар считать абсолютно упругим, силы трения не учитывать. Ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2.

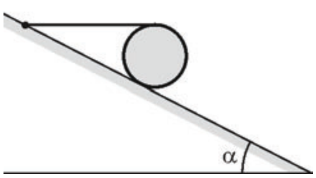

Рис. 5

3. Сплошной однородной цилиндр массой m располагается на шероховатой наклонной плоскости, образующей с горизонталью угол α (рис.5). На цилиндр намотана нить, которая закреплена на наклонной плоскости так, что ее отрезок между цилиндром и точкой закрепления горизонтален. Найдите силу F, с которой цилиндр действует на плоскость, если известно, что он находится в равновесии. Ускорение свободного падения равно g.

4. Тонкую деревянную палочку подвесили за один из концов на нити, а другой конец опустили в воду (рис.6). При этом палочка оказалась наклоненной к горизонтали на угол $\alpha = 30°$, а длину ее части, погруженной в воду, составила половину длины палочки. Какую работу A нужно совершить, чтобы вытащить за нить палочку из воды? Длина палочки L, площадь сечения S, плотность воды $\rho_в$, ускорение свободного падения g заданы.

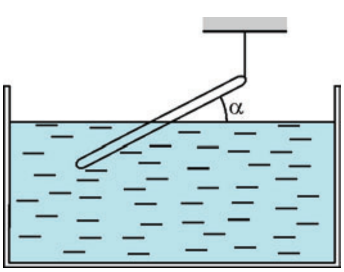

Рис. 6

5. Два одинаковых шарика массой m каждый, связанные пружиной жесткостью k и длиной l, лежат неподвижно на гладком горизонтальном столе (рис. 7). Третий такой же шарик движется со скоростью v_0 по линии, соединяющей центры шариков, связанных пружиной, и совершает упругое соударение с одним из них. Определите максимальное и минимальное расстояния между шариками, связанными пружиной, при их дальнейшем движении. Принять, что $v_0 < l\sqrt{2k/m}$. Массой пружины, временем соударения и трением пренебречь.

Рис. 7

6. Груз массой M подвешен на пружине. Удерживая груз в положении равновесия, на него кладут брусок массой m, а затем отпускают. С какой максимальной силой F_{max} брусок будет действовать на груз в процессе движения? Ускорение свободного падения равно g. Сопротивлением воздуха пренебречь.

7. Тонкая сферическая оболочка воздушного шара изготовлена из однородного материала, масса единицы площади которого $\sigma = 1$ кг/м^2. Шар наполнен гелием при атмосферном давлении $p_0 = 10^5$ Па. Какой минимальный радиус r_{min} должен иметь шар, чтобы он начал подниматься вверх? Температуры гелия и окружающего воздуха одинаковы и равны $t_0 = 0$ °С. Молярные массы гелия и воздуха равны $M_{He} = 4$ г/моль и $M_в = 29$ г/моль соответственно. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К).

8. Внутри вертикально расположенного цилиндра, воздух из которого откачан, находится тонкий массивный поршень. Под поршень ввели смесь водорода и гелия, в результате чего поршень поднялся до середины цилиндра. Поскольку материал, из которого изготовлен поршень, оказался проницаемым для гелия, поршень начал медленно опускаться. Спустя достаточно большое время поршень занял окончательное положение равновесия на высоте, составляющей 1/3 высоты цилиндра. Найдите отношение k масс водорода и гелия в смеси в первоначальный момент. Молярная масса водорода $M_1 = 2$ г/моль, молярная масса гелия $M_2 = 4$ г/моль. Температуру считать постоянной.

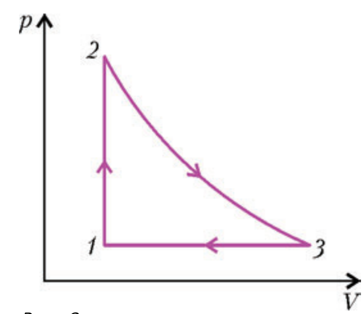

Рис. 8

9. В тепловом двигателе, рабочим телом которого является один моль идеального одноатомного газа, совершается циклический процесс, изображенный на рисунке 8, где участок *2–3* – изотермическое расширение. Найдите работу газа A на участке *2–3*, если коэффициент полезного действия двигателя $\eta = 20\%$, а разность между максимальной и минимальной температурами газа $\Delta T = 100$ К.

10. Маленький шарик, несущий заряд $+q$, закреплен на пружине жесткостью k (рис.9). На расстоянии L от этого шарика удерживают другой такой же шарик с зарядом, равным $-q$. Какую работу A нужно совершить, чтобы, медленно отодвигая второй шарик от первого, увеличить расстояние между ними в 2 раза? Действием силы тяжести пренебречь. Электрическая постоянная равна ε_0.

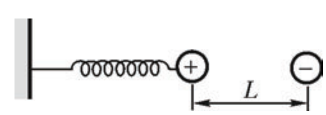

Рис. 9

11. Два одноименно заряженных металлических шарика находятся в вакууме на расстоянии, намного превышающем радиусы обоих шариков. Радиус и заряд первого шарика равны $R_1 = 4$ см и $Q_1 = 10^{-8}$ Кл соответственно. Чему равны радиус R_2 и начальный заряд Q_2 второго шарика, если известно, что после соединения шариков тонким проводом напряженность электрического поля вблизи поверхности первого шарика изменилась в $k_1 = 4$ раза, а вблизи второго – в $k_2 = 0{,}5$ раза?

12. Заряженный конденсатор емкостью C замыкают на реостат, сопротивление которого может плавно изменяться от R_0 до нуля. По какому закону нужно изменять со временем сопротивление реостата, чтобы сила тока через него оставалась постоянной вплоть до полной разрядки

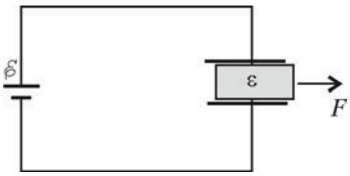

Рис. 10

конденсатора? Сопротивление реостата в начале разрядки равно R_0.

13. Плоский воздушный конденсатор емкостью C_0 с квадратными обкладками, сторона каждой из которых равна l, подключен к источнику с ЭДС $\mathscr{E}$. В конденсатор вставляют пластинку с диэлектрической проницаемостью ε, занимающую все пространство между обкладками, а затем выдвигают ее из конденсатора на небольшое расстояние, как показано на рисунке 10. Какую силу F нужно приложить к пластинке, чтобы удерживать ее в таком положении?

14. Самолет летит горизонтально, держа курс строго на север при сильном западном ветре, имеющем скорость $u = 40$ м/с. Скорость самолета относительно воздуха $v = 720$ км/ч. Чему равна разность потенциалов ΔU между концами крыльев самолета, если размах крыльев составляет $L = 50$ м, а вертикальная составляющая индукции магнитного поля Земли равна $B = 5 \cdot 10^{-5}$ Тл? Ширина концов крыльев пренебрежимо мала.

15. Металлический стержень массой m лежит на двух проводящих рейках, расположенных в горизонтальной плоскости, как показано на рисунке 11. Рейки через ключ подсоединены к пластинам конденсатора, а вся система находится в однородном магнитном поле с индукцией B, направленной вертикально. В начальный момент заряд на конденсаторе равен q_0, ключ разомкнут, а стержень покоится. Затем ключ замыкают. Определите заряд q на конденсаторе в момент, когда скорость стержня достигнет величины v. Расстояние между рейками l. Индуктивностью цепи, а также силами трения пренебречь.

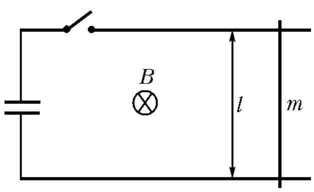

Рис. 11

16. Согласно модели Томсона, атом водорода представляет собой положительно заряженный шар, внутри которого находится отрицательный точечный заряд – электрон, причем в невозбужденном атоме электрон покоится в центре шара. Предположим, что электрон сместили от центра шара на некоторое расстояние, не превышающее радиус шара, и предоставили самому себе. Определите период T возникших при этом свободных колебаний электрона, пренебрегая потерями на излучение. Радиус шара принять равным $R = 3 \cdot 10^{-10}$ м, а его заряд, равный $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, считать равномерно распределенным по объему. Масса электрона $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг, электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

17. Плоскопараллельная пластинка толщиной $d = 2$ мм изготовлена из прозрачной пластмассы с показателем преломления $n = \sqrt{29}/4 \approx 1{,}35$. Изгибая пластинку, ей придают форму, изображенную на рисунке 12, где показано поперечное сечение пластинки. Радиус кривизны изогнутого участка пластинки равен $R = 1$ см. Под каким максимальным углом α_{max} может падать световой пучок на торец пластинки в плоскости рисунка, чтобы свет не выходил из пластинки через ее боковую поверхность?

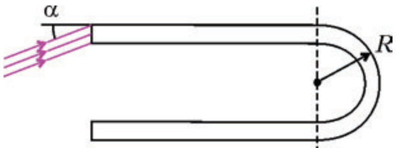

Рис. 12

18. На некотором расстоянии от стеклянного шара находится точечный источник света, дающий узкий световой пучок, ось которого проходит через центр шара. При каких значениях показателя преломления стекла n изображение источника будет находиться вне шара независимо от расстояния шара до источника?

19. Узкий световой пучок падает на тонкую собирающую линзу параллельно ее главной оптической оси и образует светлое пятно на экране, параллельном плоскости линзы и расположенном за ней на расстоянии l. Когда линзу передвинули на расстояние δ в направлении, перпендикулярном ее главной оптической оси, центр пятна сместился на величину Δ. Найдите фокусное расстояние линзы F.

20. С помощью установки, схема которой показана на рисунке 13, наблюдают дифракцию параллельного пучка белого света на дифракционной решетке *Д*, расположенной перпендикулярно оси пучка. При этом на экране *Э*, установленном в фокальной плоскости тонкой собирающей линзы *Л*, видны две светлые полосы, вызванные наложением спектральных компонент с длинами волн $\lambda_1 = 460$ нм и $\lambda_2 = 575$ нм. Эти полосы расположены симметрично относительно главной оптической оси линзы на расстоянии $l = 30$ см друг от друга. Найдите минимальный период решетки d, при котором наблюдается эта картина, если фокусное расстояние линзы $F = 20$ см.

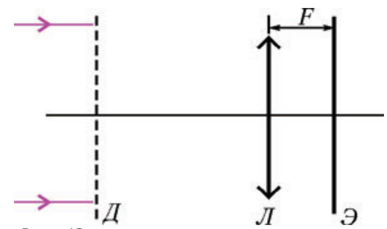

Рис. 13

Химический факультет

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Сформулируйте закон электромагнитной индукции Фарадея.

2. Что такое «резонанс»?

3. ЭДС источника тока изменяется со временем так, как показано на рисунке 14. К полюсам источника подключен соленоид. В каком промежутке времени максимальна величина ЭДС самоиндукции соленоида?

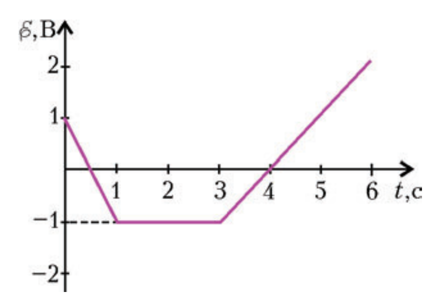

Рис. 14

4. Давление идеального газа в данном объеме увеличилось в 4 раза. Во сколько раз изменилась при этом (увеличилась или уменьшилась) средняя скорость движения его молекул?

5. Постройте ход луча *1* после тонкой рассеивающей линзы, если известен ход луча *2* для этой линзы (рис.15).

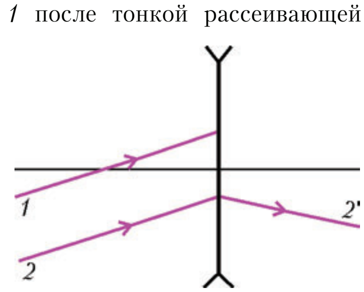

Рис. 15

6. Неоднородное бревно лежит на земле. Чтобы приподнять один конец бревна, требуется приложить к нему минимальную силу $F_1 = 425$ Н, а для того чтобы приподнять другой конец бревна, требуется минимальная сила $F_2 = 575$ Н. Найдите массу бревна.

7. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 10^{-5}$ Ф и катушки индуктивностью L = 0,2 Гн. Найдите амплитуду напряжения на конденсаторе в процессе гармонических колебаний, если сила тока в контуре равна I = 0,01 А в те моменты, когда напряжение на конденсаторе равно U = 2 В.

8. Брусок массой m = 1 кг лежит на горизонтальной поверхности стола. Если к бруску приложить силу F = 0,5 Н, направленную горизонтально, то брусок будет двигаться с ускорением $a = 0{,}3$ м/с^2. С каким ускорением a_1 будет двигаться брусок, если ту же силу приложить к нему под углом $\alpha = 45°$ (рис.16)? Принять $g = 10$ м/с^2.

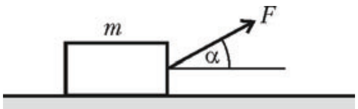

Рис. 16

9. В схеме, изображенной на рисунке 17, C = 100 мкФ, $\mathcal{E} = 20$ В. Найдите заряд q на обкладках конденсатора. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

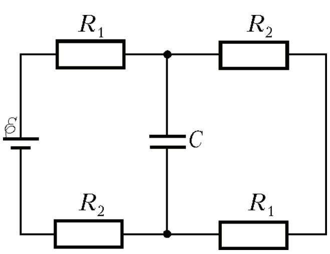

Рис. 17

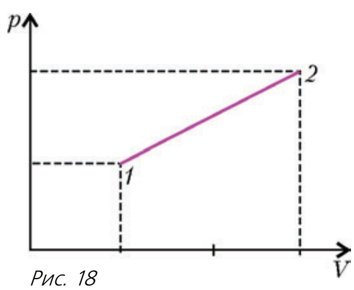

Рис. 18

10. Процессу, происходящему с одним молем одноатомного идеального газа, на p–V-диаграмме соответствует прямая линия (рис.18). При этом $p_2 = 2p_1$ и $V_2 = 3V_1$. Какое количество теплоты передано газу, если его начальная температура равна $T_1 = 180$ К? Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}3$ Дж/(моль · К).

Вариант 2

1. Сформулируйте закон сохранения импульса для системы материальных точек.

2. Дайте определение понятия «сила постоянного тока».

3. Тело массой m = 0,5 кг движется вдоль оси OX под действием одной силы F. При этом его ускорение зависит от координаты так, как показано на графике (рис.19). Определите работу, совершаемую этой силой на первом этапе x = = 4 м пути.

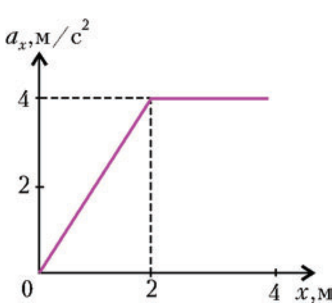

Рис. 19

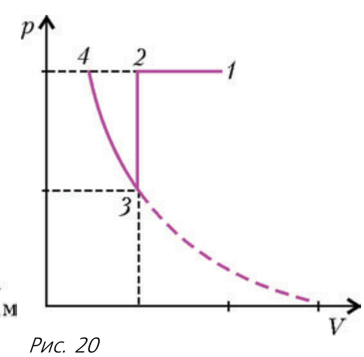

Рис. 20

4. Состояние некоторого количества идеального газа изменялось в соответствии с p–V-диаграммой, представленной на рисунке 20. Участок *3–4* – гипербола. Изобразите этот процесс на p–T-диаграмме.

5. Брусок движется равномерно под действием силы F = = 3 Н, направленной вверх вдоль наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30°$ с горизонтом. Масса бруска m = 0,5 кг. С каким ускорением будет скользить брусок в отсутствие силы F? Принять $g = 10$ м/с^2.

6. Угол падения луча света из воздуха на стеклянную пластинку толщиной d = 4 см равен углу полного внутреннего отражения для границы раздела стекло–воздух. Внутри пластинки луч света проходит расстояние l = 4,5 см. Оцените по этим данным показатель преломления стекла n.

7. Некоторое количество идеального газа участвует в процессе, представленном на p–V-диаграмме (рис.21). Точки *1* и *2* лежат на одной изотерме. Найдите переданное газу количество теплоты в этом процессе. Значения p_1, V_1, V_2, p_2 определите по графику.

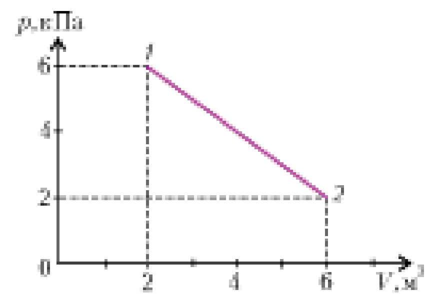

Рис. 21

8. Проволочная рамка вращается с постоянной угловой скоростью вокруг горизонтальной оси в однородном магнитном поле. Индукция поля равна $B = 2 \cdot 10^{-2}$ Тл и направлена вертикально. Площадь рамки $S = 100$ см^2. В тот момент, когда рамка расположена вертикально, ЭДС индукции в ней равна $\mathcal{E} = 6{,}3 \cdot 10^{-3}$ В. Найдите частоту вращения рамки.

9. Газовый лазер, работающий в непрерывном режиме, излучает ежесекундно $n = 3 \cdot 10^{17}$ фотонов. При этом к его разрядной трубке приложено напряжение U = 5 кВ и в ней протекает ток газового разряда I = 10 А. Считая длину волны излучения равной $\lambda = 6{,}6 \cdot 10^{-7}$ м, определите КПД такого процесса излучения. Принять, что постоянная Планка равна $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Дж · с, а скорость света в вакууме составляет $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

10. Маленький заряженный шарик массой m = 180 мг подвешен на невесомой нити. Сила натяжения нити увеличивается вдвое, если к шарику поднести снизу на расстояние d = 6 см горизонтально расположенное кольцо из проволоки радиусом R = 8 см, несущее заряд Q = –50 нКл. При этом ось кольца совпадает с вертикальным направлением нити. Чему равен заряд q шарика? Принять $g = 10$ м/с^2. Электрическая постоянная $\varepsilon_0 \approx 8{,}9 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

Публикацию подготовили С.Аввакумов, В.Бенинг, С.Волошин, В.Воронин, Е.Григорьев, Д.Денисов, А.Зотеев, Н.Лёвшин, И.Ломов, Г.Медведев, В.Панферов, В.Погожев, А.Разгулин, И.Сергеев, А.Склянкин, В.Ушаков, Е.Хайлов, С.Чесноков,Е.Шикин, А.Щеглов, Б.Щедрин