Ф1956. Три большие параллельные пластины площадью $S = 2\ \text{м}^2$ каждая расположены в вакууме на одинаковых малых расстояниях $d = 1$ мм друг от друга. Заряд средней пластины $Q = 1$ мкКл, заряды двух других Q и $-2Q$. Между крайними пластинами включают резистор сопротивлением $R_1 = 30$ кОм, одновременно с ним еще один резистор сопротивлением $R_2 = 20$ кОм включают между средней пластиной и пластиной с зарядом $-2Q$. Какое количество теплоты выделится при этом в первом резисторе?

А.Зильберман

Ф1957. Цепь из катушки индуктивностью L и конденсатора емкостью C используют в качестве фильтра низких частот (рис.2). При увеличении частоты генератора начиная с некоторой частоты напряжение на нагрузке уменьшается и при дальнейшем увеличении частоты становится совсем малым. При каком сопротивлении нагрузки R напряжение с увеличением частоты генератора будет меняться монотонно? (Если взять R достаточно большим, то будет явно выражен резонанс – при приближении к собственной частоте LC-контура напряжение нагрузки будет резко возрастать, и только потом – на еще больших частотах – будет уменьшаться).

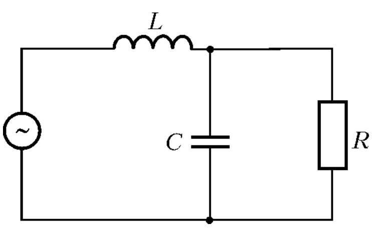


Рис. 2

З.Рафаилов

Решения задач М1921–М1930, Ф1938–Ф1942

М1921. *На наибольшей стороне AB треугольника ABC взяли точки M и N такие, что BC = BM и CA = AN, а на сторонах CA и BC – точки P и Q такие, что PM параллелен BC и QN параллелен CA (рис.1). Докажите, что QC = CP.*

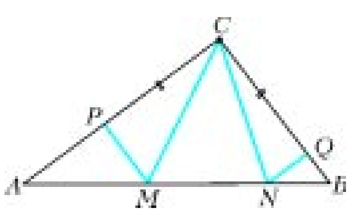


Рис. 1

Сразу обнаруживаем, что $\angle MPC = \angle CQN$. В самом деле, $\angle MPC = 180° - \angle ACB$, но и $\angle CQN = 180° - \angle ACB$.

Убедимся теперь, что MC является биссектрисой угла PMB. Действительно, с одной стороны, $\angle PMC = \angle BCM$, а с другой, $\angle BCM = \angle BMC$, ибо треугольник BCM равнобедренный. Аналогично убеждаемся, что NC является биссектрисой угла QNA.

Ввиду этого после симметричного отражения ΔPMC относительно MC получим точку P_1, образ точки P, лежащей на AB (рис.2). После симметричного отражения ΔQNC относительно NC получим точку Q_1, лежащую тоже на AB.

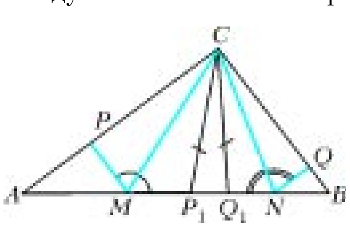


Рис. 2

Треугольник P_1Q_1C равнобедренный, так как $\angle MPC = \angle CQN$. Значит, $CP = QC$.

В.Произволов

М1922. *Бильярдный стол имеет форму многоугольника (не обязательно выпуклого), у которого соседние стороны перпендикулярны друг другу. Вершины этого многоугольника – лузы, при попадании в которые шар там и остается. Из вершины с (внутренним) углом 90° выпущен шар, который отражается от бортов (сторон многоугольника) по закону «угол падения равен углу отражения». Докажите, что шар в эту вершину никогда не вернется.*

Проведем доказательство от противного. Пусть шар вернулся в исходную точку. Обозначим начальную и конечную точку через A, а точки отражения через $A_1, \ldots, A_n$. Заметим, что угол (обычный, ненаправленный) между вертикальной прямой и отрезками пути шара постоянен (нетрудно проверить, что он не меняется при отражениях относительно как вертикальных, так и горизонтальных прямых). Можно считать, что он не равен 0° и 90°, иначе шар свалится в первую попавшуюся лузу. Так как A – вершина внутреннего угла, то существует лишь один луч с вершиной в A, образующий данный угол с вертикальной прямой и лежащий в той четверти, где расположен стол. Значит, шар вернулся в A по той же прямой, по которой и вылетел.

Таким образом, первый и последний отрезки пути шара совпадают. Рассмотрим два отражения шара от стенки в точке A_1 – первое и последнее. Учитывая закон отражения, получим, что шар в конце пути прилетел в точку A_1 по той же траектории, по которой вылетел из нее вначале. Поэтому второй и предпоследний отрезки пути шара также совпадают. Рассуждая аналогично, мы видим, что путь шара состоит из двух частей, вторая из которых получается из первой прохождением в обратном направлении. Значит, в некоторый момент времени шар, отразившись от стенки, пошел в противоположную сторону. Но тогда некоторый отрезок пути шара перпендикулярен стороне многоугольника, следовательно, образует с вертикальной прямой угол 0° или 90°. Противоречие получено.

А.Канель-Белов

М1923. *На плоскости отмечено N различных точек. Известно, что среди попарных расстояний между отмеченными точками встречаются не более n различных расстояний. Докажите, что* $N \le (n+1)^2$.

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_N$ – отмеченные точки, и каждое из расстояний A_iA_j ($1 \le i < j \le N$) равно одному из n фиксированных чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Это означает, что для каждого i ($1 \le i \le N$) все отмеченные точки, кроме A_i, лежат на одной из n окружностей $O(A_i, r_1)$, $O(A_i, r_2), \ldots, O(A_i, r_n)$ (через $O(X, r)$ мы обозначаем окружность радиуса r с центром в точке X).

Введем на плоскости систему координат так, что оси координат не параллельны прямым A_iA_j ($1 \le i < j \le N$). Рассмотрим отмеченную точку с наименьшей абсциссой, пусть это точка A_1. Среди прямых $A_1A_2, A_1A_3, \ldots, A_1A_N$ найдем прямую (или одну из прямых) с наибольшим угловым коэффициентом, пусть это прямая A_1A_2. Точки $A_3, A_1, \ldots, A_N$ лежат в одной полуплоскости α относительно прямой A_1A_2.

По условию каждая из точек $A_3, A_1, \ldots, A_N$ является точкой пересечения окружностей $O(A_1, r_k)$ и $O(A_2, r_l)$ для некоторых $k, l \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Каждая из n^2 пар таких окружностей имеет не более одной точки пересечения, принадлежащей полуплоскости α. Следовательно, среди $N-2$ точек $A_3, A_1, \ldots, A_N$ имеется не более n^2 различных. Отсюда $N-2 \le n^2$, и $N \le n^2+2 \le (n+1)^2$.

В.Дольников

М1924. *Три натуральных числа таковы, что произведение любых двух из них делится на сумму этих двух чисел. Докажите, что данные три числа имеют общий делитель, больший единицы.*

Обозначим эти числа a, b и c. Положим $x = \text{НОД}(b,c)$, $y = \text{НОД}(c,a)$ и $z = \text{НОД}(a,b)$. Предположим, что числа a, b и c не имеют общего делителя, большего единицы. Тогда числа x, y и z попарно взаимно просты. Поэтому можно положить $a = kyz$, $b = lxz$ и $c = mxy$, где k, l и m – некоторые натуральные числа. Из нашего предположения также следует, что $\text{НОД}(k,x) = \text{НОД}(l,y) = \text{НОД}(m,z) = 1$. А из определения наибольшего общего делителя заключаем, что числа k, l и m попарно взаимно просты. Следовательно, взаимно просты также и числа ky и lx. По условию $(kyz \cdot lxz) \vdots (kyz + lxz)$, значит, $(ky \cdot lx \cdot z) \vdots (ky + lx)$. Заметим, что $\text{НОД}(ky, ky+lx) = \text{НОД}(ky, lx) = 1$ и, аналогично, $\text{НОД}(lx, ky+lx) = 1$. Таким образом, $z \vdots (ky+lx)$. Стало быть, $z \ge ky + lx \ge x + y$. Рассуждая аналогично, получим, что $x \ge y + z$ и $y \ge x + z$. Но эти три неравенства не могут выполняться одновременно. Противоречие получено.

С.Берлов

М1925. *Мишень «бегущий кабан» находится в одном из n окошек, расположенных в ряд. Окошки закрыты занавесками так, что для стрелка мишень все время остается невидимой. Чтобы поразить мишень, достаточно выстрелить в окошко, в котором она в момент выстрела находится. Если мишень находится не в самом правом окошке, то сразу после выстрела она перемещается на одно окошко вправо; из самого правого окошка мишень никуда не перемещается. Какое наименьшее число выстрелов нужно сделать, чтобы наверняка поразить мишень?*

Ответ. $\left[\frac{n}{2}\right]+1$.

Занумеруем окошки слева направо числами от 1 до n, а через k_i обозначим номер окошка, в которое делается i-й по счету выстрел ($i = 1, 2, 3, \ldots$).

Серия из $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ выстрелов, определенная равенствами $k_{\left[\frac{n}{2}\right]+1} = n$ и $k_i = 2i-1$ для $i \le \left[\frac{n}{2}\right]$, гарантирует поражение мишени. (Легко проверить, что если вначале мишень находится в m-м окошке и $m \le \left[\frac{n}{2}\right]$, то результативным окажется m-й выстрел; если же $m > \left[\frac{n}{2}\right]$, то мишень будет поражена последним выстрелом.)

Покажем, что никакая серия из меньшего числа выстрелов требуемым свойством не обладает.

В самом деле, если произведено не более $\left[\frac{n}{2}\right]$ выстрелов, то для $m = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]+1$ условием поражения мишени, находившейся вначале в m-м окошке, является равенство $k_i = m + i - 1$ хотя бы для одного из значений i. Но каждый выстрел может обеспечить выполнение только одного из требующихся равенств. Следовательно, найдется такое число $m_0 \le \left[\frac{n}{2}\right]+1$, что $k_i \ne m_0 + i - 1$ для $i = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]$; это и означает, что для произвольной серии из $\left[\frac{n}{2}\right]$ (и, тем более, из меньшего числа) выстрелов существует начальное положение мишени, при котором она останется непораженной.

С.Токарев

М1926. *Найдите все простые числа p, q, r, s такие, что все числа $p^s + s^q$, $q^s + s^r$, $r^s + s^p$ – простые.*

Ответ: (2, 2, 2, 3), (3, 3, 3, 2).

Первый случай: s нечетно.

Тогда $p = q = r = 2$, $2^s + s^2$ – простое и $2^s \equiv 2 \pmod 3$. Если $s = 3k \pm 1$, то $s^2 \equiv 1 \pmod 3$, и $2^s + s^2$ делится на 3. Следовательно, $s = 3$.

Второй случай: $s = 2$.

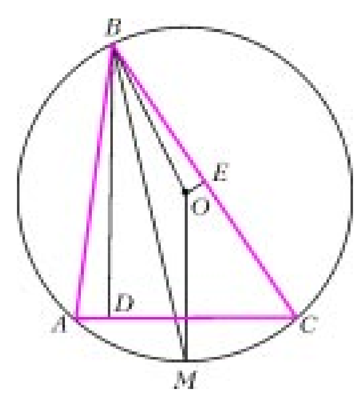
Тогда p, q, r нечетны, $p^2 + 2^q$ – простое и $2^q \equiv 2 \pmod 3$. Если $p = 3k \pm 1$, то $p^2 \equiv 1 \pmod 3$ и $p^2 + 2^p$ делится на 3. Следовательно, $p = 3$. Аналогично, $q = 3$, $r = 3$.

Б.Френкин, В.Сендеров

М1927. *Пусть ABC – неравносторонний треугольник; O и I – центры описанного и вписанного кругов, H – точка пересечения высот треугольника. Могут ли точки O, I и H быть вершинами равнобедренного треугольника?*

Ответ: Да.

Лемма 1. В любом треугольнике биссектриса делит пополам угол между высотой и радиусом описанного круга, проведенным в ту же вершину.



Доказательство. Пусть BM – биссектриса угла ABC, BD – высота (см. рисунок). Так как $OB = OM$, то $\angle OBM = \angle OMB$. Поскольку точка M – середина дуги AMC, то прямые OM и BD параллельны. Следовательно, $\angle DBM = \angle BMO$, отсюда $\angle OBM = \angle DBM$, что и требовалось доказать.

Лемма 2. В любом треугольнике ABC расстояние от центра описанного круга до стороны BC вдвое меньше расстояния от точки пересечения высот до вершины A. (Пусть H – точка пересечения высот, O – центр описанной окружности, E и F – середины сторон BC и AC соответственно. Для доказательства достаточно заметить, что треугольники AHB и EOF подобны.)

Лемма 3. Если ABC – неравносторонний треугольник, то никакие две из трех точек O, I, H не совпадают.

Решение задачи. Пусть $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$. Тогда $\angle OBC = \frac{\pi}{6}$, $OB = 2FO$, где F – середина отрезка BC. Отсюда по лемме 2 имеем $AH = OB = OA$. Докажем, что $IO = IH$. Если хотя бы одна из точек O и H лежит на прямой AI, то $\angle ABC = \angle ACB$, откуда ABC – правильный треугольник. Пусть O и H не лежат на AI. Из леммы 1 следует, что треугольники AIO и AIH равны, откуда $IO = IH$.

Заметим теперь, что точки O, I, H лежат на некоторой окружности.

Вследствие леммы 3 получаем отсюда: O, I и H – вершины равнобедренного треугольника.

Отметим, что в случае равнобедренного неравностороннего треугольника ABC равенство $IO = IH$ выполняться не может. Действительно, пусть $\angle ABC = \angle ACB$, $O \neq H$, $OI = IH$. Из леммы 1 следует, что медиана BI треугольника BOH является его биссектрисой, а значит, и высотой. Получили чушь: I лежит на BC.

Р.Будылин, А.Куликов, В.Сендеров

M1928. *Положительные числа $x_1,\ldots,x_n$, где $n \geq 2$, лежат на некотором отрезке Δ длины 2. Докажите, что*

$$x_1 + \ldots + x_n \leq \sqrt{x_1x_2+1} + \ldots$$
$$\ldots + \sqrt{x_nx_1+1} < x_1 + \ldots + x_n + n.$$

В каких случаях имеет место равенство?

Обозначим

$$A = x_1 + \ldots + x_n,$$

$$B = \sqrt{x_1x_2+1} + \ldots + \sqrt{x_nx_1+1}, \quad C = A + n.$$

Докажем неравенство $A \leq B$. Пусть x и y – какие-либо два числа из множества $\{x_1,\ldots,x_n\}$. Тогда $|x-y| \leq 2$, т.е. $x^2 - 2xy + y^2 \leq 4$, или $x^2 + 2xy + y^2 \leq 4(1+xy)$. Отсюда $x + y \leq 2\sqrt{xy+1}$, так как x и y положительны. Следовательно,

$$x_1 + x_2 \leq 2\sqrt{x_1x_2+1},\ldots, x_n + x_1 \leq 2\sqrt{x_nx_1+1}. \quad (1)$$

Сложив эти неравенства, получаем $2A \leq 2B$.

Докажем неравенство $B < C$. Обозначим

$$y_1 = \min\{x_1,x_2\},\ldots, y_n = \min\{x_n,x_1\}.$$

Имеем

$$\sqrt{x_1x_2+1} \leq \sqrt{y_1(y_1+2)+1} =$$
$$= \sqrt{(y_1+1)^2} = y_1 + 1,\ldots, \sqrt{x_nx_1+1} \leq y_n + 1. \quad (2)$$

Сложив неравенства (2), получаем

$$B \leq y_1 + \ldots + y_n + n.$$

Отсюда, поскольку $y_i \leq x_i$, $B \leq C$. При этом если $y_i = x_i$ при всех i, то $x_1 = \ldots = x_n$, откуда в (2) все неравенства строгие. Получили $B < C$.

Найдем теперь условия равенства $A = B$. Все неравенства (1) являются равенствами в точности если $n = 2m$, $x_1, x_3, \ldots$ лежат на одном конце отрезка Δ, а $x_2, x_4, \ldots$ – на другом.

Заметим, что неравенство $B < C$ – точное: оно переходит в равенство, если все числа устремить к 0. Покажем, что при любом $n \geq 2$ точным является и неравенство $A \leq B$. Предположим противное: существуют $n \geq 3$ и $\varepsilon > 0$ такие, что $A + \varepsilon \leq B$ при любом наборе $\{x_1,\ldots,x_n\}$ задачи. Тогда, в частности, $nk + \varepsilon \leq n\sqrt{k^2+1}$ при любом натуральном k. Отсюда $2nk\varepsilon + \varepsilon^2 \leq n^2$, что при $k \to \infty$ приводит к противоречию.

Н.Агаханов, В.Сендеров

M1929. *Докажите, что для любого натурального числа d существует делящееся на него натуральное число n, в десятичной записи которого можно вычеркнуть некоторую ненулевую цифру так, что получившееся число тоже будет делиться на d.*

Первое решение. Число n можно записать в виде $n = 10^k(10a+b) + c$, где $0 \leq c < 10^k$, b – ненулевая цифра, которую вычеркиваем, a – число, образованное цифрами, стоящими левее b. Тогда после вычеркивания получится число $n_1 = 10^k a + c$. Их разность $n - n_1 = 10^k(9a+b)$. Чтобы выполнялось условие задачи, достаточно, чтобы числа $9a+b$ и $10^k a + c$ делились на d. Для этого подберем ненулевую цифру b так, чтобы число $d - b$ делилось на 9, и возьмем $a = \frac{d-b}{9}$. Тогда $d = 9a + b$. Пусть k – такое число, что $10^{k-1} > d$. Число $10^k a + 10^{k-1}$ разделим с остатком на d: $10^k a + 10^{k-1} = dq + r$, $0 \leq r < d$. Положим $c = 10^{k-1} - r > 0$. Тогда $10^k a + c = dq$ делится на d.

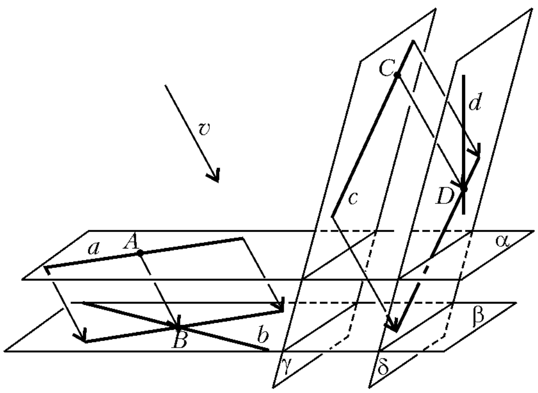
Второе решение (предложенное школьниками на олимпиаде). Рассмотрим для произвольного натурального k число $n_k = 10^k d - d$. Пусть l – количество знаков в десятичной записи числа d ($l = [\lg d] + 1$). Заметим, что при достаточно больших k (а именно, при $k > l$) десятичная запись числа n_k выглядит следующим образом: сначала идет десятичная запись числа $d - 1$, затем – серия девяток и, наконец – десятичная запись числа $10^l - d$. Таким образом, при $k > l$ число n_k можно получить из числа n_{k+1} путем вычеркивания одной из девяток в центральной части десятичной записи. Очевидно также, что все числа n_k делятся на d.

А.Галочкин

M1930. *Верно ли, что для любых четырех попарно скрещивающихся прямых можно так выбрать по одной точке на каждой из них, чтобы эти точки были вершинами а) трапеции; б) параллелограмма?*

а) **Ответ**: да, верно.

Пусть a, b, c, d – четыре попарно скрещивающиеся прямые. Построим такие плоскости $\alpha \supset a$ и $\beta \supset b$, что α параллельна β (см. рисунок). Аналогично, построим такие плоскости $\gamma \supset c$ и $\delta \supset d$, что γ параллельна



δ. Рассмотрим произвольное направление $\vec{v}$, не параллельное никакой из этих плоскостей. Спроецируем прямую a на плоскость β вдоль этого направления. Обозначим через B точку пересечения проекции и прямой b, а через $A \in a$ – ее прообраз при проекции. Тогда прямая AB параллельна направлению $\vec{v}$. Аналогично строятся точки $C \in c$ и $D \in d$, для которых прямая CD параллельна направлению $\vec{v}$. Тогда прямая AB параллельна CD. Поэтому либо точки A, B, C и D лежат на одной прямой, либо четырехугольник $ABCD$ – трапеция, либо четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм.

Для всех направлений $\vec{v}$, кроме конечного числа, точки A, B, C и D не лежат на одной прямой.

Чтобы исключить случай параллелограмма, достаточно обеспечить неравенство $AB \neq CD$. Заметим, что $AB = \dfrac{p}{\sin\varphi}$ и $CD = \dfrac{q}{\sin\psi}$, где p – расстояние между плоскостями α и β, q – расстояние между плоскостями γ и δ, φ – угол между направлением $\vec{v}$ и плоскостью α, ψ – угол между направлением $\vec{v}$ и плоскостью γ.

Если плоскости α и γ не параллельны, то найдется направление $\vec{v}$, для которого $\dfrac{\sin\varphi}{\sin\psi} < \dfrac{p}{q}$ (например, направление, почти параллельное плоскости α и перпендикулярное прямой пересечения плоскостей α и γ), и тогда $AB \neq CD$.

Если же все плоскости $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ параллельны, то $\varphi = \psi$ для любого направления $\vec{v}$, и для выполнения неравенства $AB \neq CD$ достаточно неравенства $p \neq q$, которого всегда можно добиться, переобозначив плоскости.

б) **Ответ**: нет, неверно.

Возьмем четыре параллельные плоскости, все попарные расстояния между которыми различны. В каждой из них проведем прямую таким образом, чтобы эти прямые попарно скрещивались. Докажем, что параллелограмма с вершинами на этих прямых не существует. Действительно, длины любых двух параллельных отрезков с концами на этих прямых пропорциональны расстояниям между соответствующими парами плоскостей, а значит, различны.

П.Бородин

Ф1938. *Автомобиль едет вверх по наклонной плоскости. Каким может быть максимальный угол наклона, если коэффициент трения между колесами и поверхностью $\mu = 0,6$? С каким максимальным ускорением может начать движение этот автомобиль на горизонтальном участке поверхности? У автомобиля четыре колеса, задние колеса – ведущие. Расстояние между передними и задними осями колес $L = 2$ м, центр масс автомобиля находится на высоте $h = 0,5$ м на равных расстояниях от осей колес.*

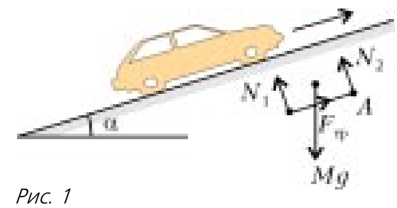


Рис. 1

При максимальном значении угла наклона α автомобиль едет вверх равномерно, сила трения равна максимальному своему значению $F_{тр} = \mu N_1$ (рис. 1). Силу нормального давления N_1 легко найти из уравнения моментов сил, записанных относительно точки A:

$$N_1 L = Mg\cos\alpha \cdot \frac{L}{2} + Mg\sin\alpha \cdot h,$$

откуда

$$N_1 = Mg\left(\frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{h}{L}\sin\alpha\right).$$

Искомый угол найдем из условия равномерного движения автомобиля вдоль наклонной плоскости:

$$\mu N_1 - Mg\sin\alpha = 0,$$

и

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{\mu/2}{1-\mu h/L} \approx 20°.$$

Вторую часть задачи проще всего решать в неинерциальной системе отсчета, относительно которой автомобиль (он едет с ускорением a) неподвижен. Нам придется добавить силу инерции, равную $-Ma$, приложив ее в центре масс (рис.2), тогда условия равновесия дадут нам необходимые уравнения.

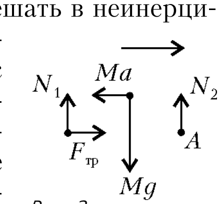


Рис. 2

Чтобы не вычислять силу N_2 (не нужна она нам!), запишем уравнение моментов сил относительно точки A:

$$N_1 L - Mg\frac{L}{2} - Mah = 0$$

и уравнение сил вдоль горизонтального направления:

$$F_{тр} - Ma = 0.$$

Учтем, что мы ищем максимальное ускорение, поэтому

$$F_{тр} = \mu N_1.$$

Отсюда легко получим

$$a = g\frac{\mu L}{2(L-\mu h)} \approx 3,5 \text{ м/с}^2.$$

А.Повторов

Ф1939. *Моль гелия в сосуде под поршнем получает тепло извне и расширяется. Теплоемкость этой порции газа в данном процессе постоянна и составляет C = 20 Дж/К. Какую работу совершит газ при увеличении его объема вдвое? Начальная температура T = 200 К, начальное давление p = 0,5 атм.*

Легко видеть, что молярная теплоемкость в данном процессе $C = 20$ Дж/(моль·К) практически совпадает с молярной теплоемкостью при постоянном давлении $C_p = 2{,}5R \approx 20{,}8$ Дж/(моль·К). Поэтому для упрощенного расчета работы можно принять $p = \text{const}$, тогда

$$A = p(2V - V) = pV = RT \approx 1{,}66 \text{ кДж}.$$

Можно оценить точность (вернее – неточность) нашего расчета:

$$C\Delta T = A + C_V \Delta T,$$

где $C_V = 1{,}5\,R$ – молярная теплоемкость при постоянном объеме, откуда

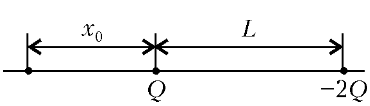
$$\Delta T = \frac{A}{C - C_V} \approx 220 \text{ К}.$$

Если считать, что $p = \text{const}$, то $T_{\text{кон}} = 200 \text{ К} \cdot 2 = 400 \text{ К}$. Наша оценка дает $T^*_{\text{кон}} = 420$ К. Средняя температура отличается меньше чем на 3%, такой же результат получается и при точном расчете. Наш результат $A \approx 1{,}66$ кДж занижен примерно на 3%.

З.Рафаилов

Ф1940. *На расстоянии 1 м друг от друга закреплены точечные заряды 1 мкКл и –2 мкКл (заряд противоположного знака). В пространстве возникает электростатическое поле. Найдите максимальную разность потенциалов между точками, в которых напряженность этого поля не превышает по величине значения 1 В/м.*

Точки поля, где напряженность не превышает малую величину $E_0 = 1$ В/м, можно найти либо вдали от системы зарядов, либо там, где поля почти компенсируют друг друга.



Точка, в которой поле в точности равно нулю, находится на прямой, проходящей через заряды Q (здесь $Q = 1$ мкКл) и $-2Q$ (см. рисунок):

$$k\frac{Q}{x_0^2} + k\frac{-2Q}{(x_0 + L)^2} = 0,$$

откуда

$$x_0 = \frac{L}{\sqrt{2} - 1} = \frac{1 \text{ м}}{\sqrt{2} - 1} \approx 2{,}4 \text{ м}.$$

Вдали от системы можно считать, что в этой точке находится точечный заряд $q = Q - 2Q = -Q$. Тогда запишем

$$k\frac{q}{y^2} = E_0, \text{ и } y = \sqrt{\left|\frac{kq}{E_0}\right|} \approx 100 \text{ м}$$

(это и в самом деле сильно превышает $L = 1$ м). Потенциал в такой точке равен

$$\varphi = k\frac{q}{y} = -\sqrt{kQE_0} \approx -95 \text{ В}.$$

Найдем теперь потенциал в точке x_0:

$$\varphi_0 = k\frac{Q}{x_0} + k\frac{-2Q}{x_0 + L} =$$

$$= k\frac{Q}{x_0}\left(1 - \frac{2}{\sqrt{2}}\right) = k\frac{Q}{L}\left(\sqrt{2} - 1\right)^2 = -1544 \text{ В}.$$

Точки на прямой, в которых напряженность составляет ровно 1 В/м (по модулю), находятся совсем близко к «нулевой» точке (на расстоянии $l = 2{,}7$ мм в обе стороны; расчет несложный – его можно провести приближенно), разность потенциалов между любой из этих точек и «нулевой» точкой порядка $1 \cdot 10^{-3}$ В ($\Delta\varphi = E_{\text{ср}} l \approx \frac{E_0}{2} l \approx 1{,}3 \cdot 10^{-3}$ В).

Итак, максимальной будет разность потенциалов между «нулевой» (почти!) и «бесконечно удаленной» точками:

$$\left|\Delta\varphi_{\max}\right| = 1544 \text{ В} - 0 = 1544 \text{ В}.$$

Р.Александров

Ф1941. *Конденсатор емкостью 1 мкФ и три одинаковые катушки индуктивностью 1 Гн каждая соединены параллельно и подключены к внешней цепи. Сопротивления проводов оказались немного разными, в результате установившиеся токи через катушки составили 1А, 2А и 4А. Внешнюю цепь отключают, и токи катушек начинают изменяться. Найдите максимальные значения каждого из токов. Найдите также максимальное значение заряда конденсатора. Элементы цепи считать идеальными. Сопротивление проводов очень мало.*

После отключения внешней цепи в схеме начинаются колебания. Интересующие нас максимальные значения токов имеют место в первом же периоде колебаний – за этот интервал времени потери энергии совсем малы. И еще – перед отключением внешней цепи токи катушек неизменны и заряд конденсатора практически нулевой. Изменения токов катушек после отключения внешней цепи одинаковы, а максимальный заряд конденсатора получится при условии

$$(I_1 + I) + (I_2 + I) + (I_3 + I) = 0,$$

$$\text{т.е. при токе } I = -\frac{7}{3} \text{ А}.$$

Энергия магнитного поля до отключения равна

$$W_{\text{нач}} = \frac{LI_1^2}{2} + \frac{LI_2^2}{2} + \frac{LI_3^2}{2} = 10{,}5 \text{ Дж},$$

а в рассматриваемый момент –

$$W = \frac{L(I_1 + I)^2}{2} + \frac{L(I_2 + I)^2}{2} + \frac{L(I_3 + I)^2}{2} = \frac{7}{3} \text{ Дж}.$$

Значит, энергия электрического поля в этот момент составляет

$$\frac{q_m^2}{2C} = W_{\text{нач}} - W,$$

откуда для максимального значения заряда конденсатора получаем $q_m \approx 4$ мКл.

Максимальные токи катушек получаются в тот момент, когда конденсатор разряжен (ЭДС индукции в этот момент обращаются в ноль). Тогда, в соответствии с законом сохранения энергии,

$$W^* = \frac{L\left(I_1 + I^*\right)^2}{2} + \frac{L\left(I_2 + I^*\right)^2}{2} + \frac{L\left(I_3 + I^*\right)^2}{2} = W_{\text{нач}},$$

или

$$I_1^2 + 2I_1I^* + I^{*2} + I_2^2 + 2I_2I^* + I^{*2} + I_3^2 + \\ + 2I_3I^* + I^{*2} = I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 .$$

Тут получаются два решения: либо $I^* = 0$, либо $I^* = 2I = -\frac{14}{3}$ А. Первое соответствует начальному моменту, второе – концу первой половины периода колебаний. В этот момент максимальный ток первой катушки будет равен

$$I_1 + I^* = -\frac{11}{3}\ \text{А},$$

второй катушки –

$$I_2 + I^* = -\frac{8}{3}\ \text{А},$$

третьей –

$$I_3 + I^* = -\frac{2}{3}\ \text{А},$$

что по модулю меньше начального тока, равного 4 А. Итак, максимальные величины токов составляют приблизительно 3,67 А, 2,67 А и 4 А.

А.Старов

Ф1942. *На главной оптической оси тонкой собирающей линзы диаметром 1 см с фокусным расстоянием 10 см находится точечный источник света. На какой максимальный угол линза может отклонить падающий на нее луч?*

Лучи, направленные в центральную часть линзы, отклоняются мало, а максимальный угол отклонения получается у «крайнего» луча. Легко записать формулу (рис.1)

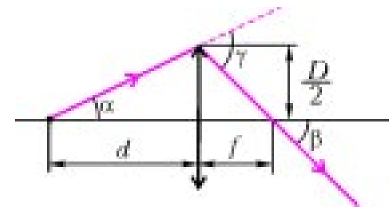


Рис. 1

$$\gamma = \alpha + \beta = \operatorname{arctg}\frac{D/2}{d} + \operatorname{arctg}\frac{D/2}{f}.$$

Если углы малы (при $d, f \gg D/2$), то

$$\gamma \approx \frac{D}{2}\left(\frac{1}{d} + \frac{1}{f}\right) = \frac{D}{2F} \approx \frac{1}{20}\ \text{рад} \approx 2{,}9^\circ .$$

Получается один и тот же угол отклонения для разных точек линзы.

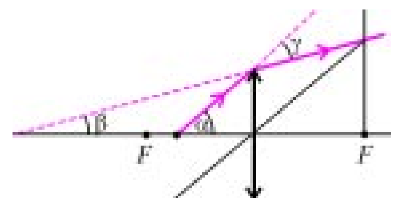


Рис. 2

А что будет для не слишком малых углов? Пусть $d < F$, тогда (рис.2)

$$\gamma = \alpha - \beta = \operatorname{arctg}\frac{D/2}{d} - \operatorname{arctg}\frac{D/2}{f}.$$

Дальше можно воспользоваться известным соотношением $\sin\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha$, откуда $\arcsin\alpha > \alpha > \operatorname{arctg}\alpha$, и получить тот же ответ. А можно (и удобно) просто сделать расчет нескольких точек при помощи калькулятора.

А.Зильберман

Университеты Италии

(Начало см. на с. 10)

1200-тонную камеру для обнаружения примерно десяти типов предполагаемых новых частиц.

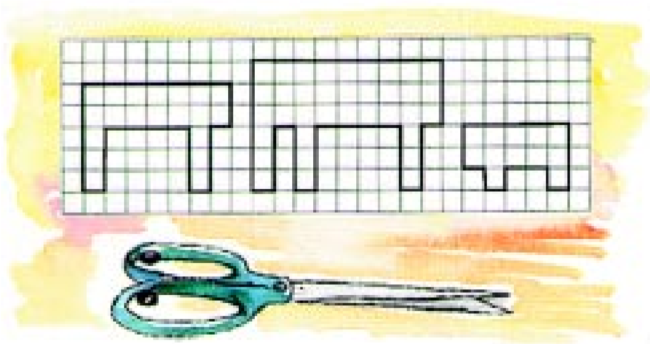
Проблема получения достаточного количества антипротонов была решена Симоном ван дер Мером. Его идея заключалась в том, что антипротоны, рождающиеся при бомбардировке медной мишени высокоэнергичными протонами, собирались в специальном накопительном кольце. Сложная система электродов фокусировала антипротоны, собирая их в компактные сгустки. Затем эти сгустки поступали в протонный синхротрон вместе со сгустками протонов, предварительно ускоренных аналогичным образом. После этого частицы и античастицы окончательно ускорялись до энергии в 300 млрд электронвольт. Поскольку частицы и античастицы имеют противоположные знаки зарядов, они вращаются по синхротронному кольцу в противоположных направлениях, сталкиваясь между собой лишь в точках, где установлены детекторы.

Эксперименты начались в 1982 году, и уже через месяц было объявлено об обнаружении пяти W частиц. Еще через год удалось также пронаблюдать Z^0 частицы. В 1984 году Карло Руббиа и Симон ван дер Мер были удостоены Нобелевской премии по физике «за решающий вклад в большой проект, который привел к открытию квантов поля, W и Z частиц, переносчиков слабого взаимодействия». Слабое взаимодействие оказалось слабым именно потому, что W и Z частицы такие тяжелые.

Задачи

1. Разрежьте каждую из трех фигур, изображенных на рисунке, на две равные части.

М.Ахмеджанова



2. Если звонить с обычного телефона на сотовый, то оплату разговора производит владелец сотового телефона. Если же звонить с обычного телефона на обычный, либо с сотового на любой, то за разговор платит тот, кто звонил.
Восемь бизнесменов в течение дня перезванивались между собой и сделали по три звонка каждый. При этом все владельцы сотовых телефонов уплатили за разное число разговоров.

У бизнесменов Иванова, Петрова, Сидорова и Кузнецова – сотовые телефоны, у Адамова и Давыдова – обычные. Какой телефон у бизнесмена Джапаридзе?

И.Акулич

3. Можно ли в клетки таблицы 4×4 вписать числа от 1 до 16 (каждое по одному разу) так, чтобы произведения всех чисел в каждом квадрате 3×3 были равны?

В.Каскевич

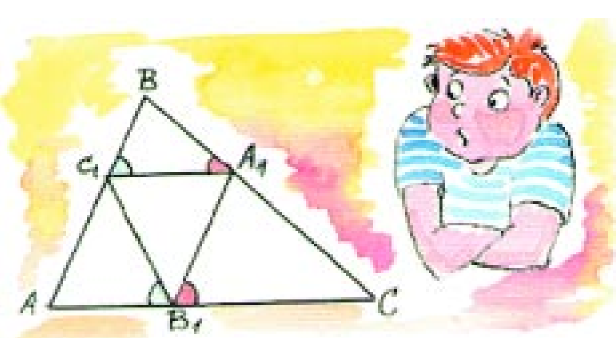
4. Профессор Мумбум-Плюмбум пытается подобрать 6 таких натуральных чисел, среди которых
ровно одно число делится на 6,
ровно два числа делятся на 5,
ровно три числа делятся на 4,

ровно четыре числа делятся на 3,
ровно пять чисел делятся на 2,
ровно шесть чисел делятся на 1.
Удастся ли ему это сделать?

Я.Камыш

5. В треугольник ABC вписан равносторонний треугольник $A_1B_1C_1$ так, что $\angle BC_1A_1 = \angle C_1B_1A$, $\angle BA_1C_1 = \angle A_1B_1C$. Докажите, что треугольник ABC равносторонний.

В.Произволов



Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6 – 8 классов.