быстро, другой раз очень медленно. В каком из опытов конечный объем газа окажется меньше? Во сколько раз?

А.Газов

Ф2001. Очень тонкий непроводящий стержень длиной L равномерно заряжен по длине полным зарядом Q. Маленькое проводящее кольцо радиусом R сделано из очень тонкой проволоки, его центр совпадает с одним из концов стержня, а плоскость кольца перпендикулярна стержню. Заряд кольца q. С какой силой стержень действует на кольцо?

З.Рафаилов

Ф2002. К батарейке с ЭДС $\mathscr{E}$ и внутренним сопротивлением r подключают параллельно соединенные резистор сопротивлением R и катушку индуктивностью L. Какое количество теплоты выделится в резисторе за большое время?

А.Теплов

Решения задач М1966–М1975, Ф1983–Ф1987

М1966. *Докажите, что если число* $\underbrace{11\ldots11}_{n\text{ единиц}}2\underbrace{11\ldots11}_{n\text{ единиц}}$ *делится на 11, то оно также делится и на 121.*

Воспользуемся признаком делимости на 11: число делится на 11 тогда и только тогда, когда разность сумм цифр, стоящих на четных и на нечетных местах, делится на 11. Имеем $\underbrace{1\ldots1}_{n}2\underbrace{1\ldots1}_{n}=\underbrace{1\ldots1}_{n+1}\cdot 10^n+\underbrace{1\ldots1}_{n+1}=$ $=\underbrace{1\ldots1}_{n+1}\cdot 1\underbrace{0\ldots0}_{n-1}1$. Получаем, что как первый, так и второй сомножители делятся на 11 тогда и только тогда, когда n нечетно. Таким образом, если n нечетно, то оба сомножителя делятся на 11, и их произведение делится на 121. Если же n четно, то исходное число на 11 не делится.

В.Сендеров

М1967. *В наборе из одиннадцати попарно различных гирь каждая весит натуральное число граммов. Известно, что суммарный вес любых семи гирь больше суммарного веса четырех оставшихся. Найдите наименьший возможный суммарный вес всех гирь набора.*

Ответ: 109.

Упорядочим веса гирь по возрастанию: $a_1 < a_2 < \ldots$ $\ldots < a_{11}$. Пусть $a_7 = x$, тогда $a_6 \le x-1$, $a_5 \le x-2, \ldots$ $\ldots, a_1 \le x-6$, $a_8 \ge x+1, \ldots, a_{11} \ge x+4$. Так как $a_1+\ldots+a_7 > a_8+a_9+a_{10}+a_{11}$, то $7x-21 > 4x+10$, т.е. $3x > 31$, значит, $x \ge 11$. Тогда $a_1+\ldots+a_7 > a_8+\ldots$ $\ldots+a_{11} \ge 4\cdot 11+10 = 54$, откуда $a_1+\ldots+a_7 \ge 55$, и $a_1+\ldots+a_{11} \ge 55+54 = 109$.

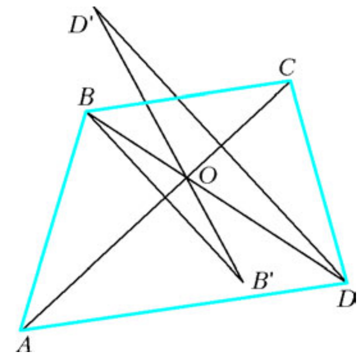
Суммарный вес 109 реализуется на наборе гирь {4, 6, 7, 8, 9,10,11,12,13,14,15}.

О.Подлипский, И.Богданов

М1968. *Каждую вершину выпуклого четырехугольника Q отразили симметрично относительно диагонали, не содержащей эту вершину. Полученные точки являются вершинами четырехугольника Q'.*

а) Докажите, что если Q – трапеция, то Q' также является трапецией.

б) Докажите, что отношение площади Q' к площади Q меньше 3.



Пусть $ABCD$ – исходный четырехугольник, и пусть при отражении получаются точки A', B', C' и D'. Тогда отрезки BD и $B'D'$ симметричны относительно AC, поэтому они равны и пересекаются на прямой AC, а именно в точке O пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ (см. рисунок). Кроме того, $\dfrac{BO}{OD}=\dfrac{B'O}{OD'}$. Аналогично, AC проходит через O и $\dfrac{CO}{OA}=\dfrac{C'O}{OA'}$.

а) Если $ABCD$ – трапеция с основаниями AD и BC, то $\dfrac{BC}{AD}=\dfrac{BO}{OD}=\dfrac{CO}{OA}=k$ из подобия треугольников AOD и COB. Поэтому $\dfrac{B'O}{OD'}=\dfrac{C'O}{OA'}=k$, следовательно, треугольники $A'OD'$ и $C'OB'$ также подобны. Из их подобия получаем, что $B'C' \parallel A'D'$. Кроме того, заметим, что $\dfrac{B'C'}{A'D'}=k=\dfrac{BC}{AD}$, значит, Q' – не параллелограмм, если Q – не параллелограмм.

б) Пусть меньший угол между диагоналями был равен α, $\alpha \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, тогда после отражения один из углов между диагоналями становится равным либо 3α, либо $3\alpha-\pi$, поэтому отношение площадей равно

$$\frac{S'}{S}=\frac{A'C'\cdot B'D'\cdot|\sin 3\alpha|}{AC\cdot BD\cdot \sin\alpha}=\frac{|\sin 3\alpha|}{\sin\alpha}=$$

$$=\frac{\left|3\sin\alpha-4\sin^3\alpha\right|}{\sin\alpha}=\left|3-4\sin^2\alpha\right|.$$

Но $\sin^2\alpha \in (0;1]$, следовательно, $3-4\sin^2\alpha \in [-1;3)$, и $\dfrac{S'}{S}=\left|3-4\sin^2\alpha\right|<3$.

Л.Емельянов

М1969. *На оборотных сторонах 2005 карточек написаны различные числа (на каждой по одному). За один вопрос разрешается указать на любые три карточки и узнать множество чисел, написанных на них. За какое наименьшее число вопросов можно узнать, какие числа записаны на каждой карточке?*

Ответ: за 1003 вопроса.

Пусть было задано N вопросов. Ясно, что каждая карточка участвует хотя бы в одном вопросе, иначе число на ней мы не определим. Пусть есть k карточек, участвующих ровно в одном вопросе. Тогда в одном вопросе не может встретиться двух таких карточек. Действительно, если бы две такие карточки участвовали в одном вопросе, то, поменяв местами числа на этих карточках, мы не изменим ответов на вопросы; поэтому невозможно установить, какое число на которой из них написано. Следовательно, $k \le N$. Остальные карточки участвовали хотя бы в двух вопросах. Теперь, просуммировав для каждой карточки количество вопросов, в которых она участвовала, получим утроенное количество вопросов. Поэтому $3N \ge k + 2(2005 - k) = 4010 - k \ge 4010 - N$, откуда $2N \ge 2005$, $N \ge 1003$. Приведем способ узнать числа за 1003 вопроса. Отложим одну карточку, а остальные разобьем на 334 группы по 6 карточек. В каждой группе занумеруем карточки числами от 1 до 6 и зададим три вопроса: $(1, 2, 3)$, $(3, 4, 5)$ и $(5, 6, 1)$. Тогда числа на карточках 1, 3, 5 встречаются в двух ответах (для разных карточек – в разных парах) и поэтому однозначно определяются, а числа на карточках 2, 4, 6 – оставшиеся числа в каждом из ответов. Так за $\frac{2004}{6} \times 3 = 1002$ вопроса мы узнаем числа на 2004 карточках. Осталось спросить про отложенную карточку вместе с любыми двумя уже известными.

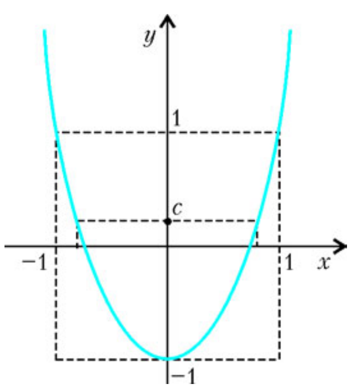
И.Богданов

М1970. *Существует ли такой квадратный трехчлен $f(x)$, что для любого целого положительного n уравнение $\underbrace{f(f(\ldots f(x)))}_{n\ раз} = 0$ имеет ровно 2^n различных действительных корней?*

Ответ: существует.

Докажем, например, что трехчлен $f(x) = 2x^2 - 1$ удовлетворяет условию.

Введем обозначения: $f_1(x) = f(x)$, $f_{n+1}(x) = f(f_n(x))$. Докажем индукцией по n следующее утверждение: если $-1 < c < 1$, то уравнение $f_n(x) = c$ имеет ровно 2^n корней на интервале $(-1; 1)$.



База ($n = 1$) ясна из рассмотрения графика (см. рисунок).

Пусть утверждение доказано для $n = k$, докажем его для $n = k + 1$. Уравнение $f_{k+1}(x) = c$, где $-1 < c < 1$, равносильно уравнению $f(f_k(x)) = c$, которое, очевидно, равносильно совокупности уравнений $f_k(x) = \alpha$, $f_k(x) = \beta$, где $-1 < \alpha < 1$ и $-1 < \beta < 1$ – корни уравнения $f(x) = c$. Каждое из этих уравнений имеет, по предположению индукции, ровно 2^k корней из интервала $(-1; 1)$. Эти группы корней не пересекаются, так как система уравнений $f_k(x) = \alpha$, $f_k(x) = \beta$ несовместна. Значит, уравнение $f_{k+1}(x) = c$ имеет ровно $2^k + 2^k = 2^{k+1}$ корней из интервала $(-1; 1)$, что и требовалось доказать.

Осталось заметить, что степень многочлена $f_n(x)$ равна 2^n, следовательно, он имеет не более 2^n корней. Но по доказанному выше $f_n(x)$ имеет не менее 2^n корней, т.е. имеет ровно 2^n корней.

С.Дориченко

М1971. *В таблице $2 \times n$ расставлены положительные числа так, что в каждом из n столбцов сумма двух чисел равна 1. Докажите, что можно вычеркнуть по одному числу в каждом столбце так, чтобы в каждой строке сумма оставшихся чисел не превосходила $\frac{n+1}{4}$.*

Пусть в верхней строке стоят числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Переставим столбцы так, что $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$. Тогда в нижней строке стоят, соответственно, $b_1 = 1 - a_1$, $b_2 = 1 - a_2, \ldots, b_n = 1 - a_n$; ясно, что $b_1 \ge b_2 \ge \ldots \ge b_n$. Если $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \le \frac{n+1}{4}$, то вычеркнем все числа нижней строки. Иначе, найдем минимальный номер k такой, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_k > \frac{n+1}{4}$, вычеркнем в верхней строке числа $a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n$, а в нижней – $b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}$. По выбору k имеем $a_1 + \ldots + a_{k-1} \le \frac{n+1}{4}$.

Остается доказать, что $b_k + b_{k+1} + \ldots + b_n \le \frac{n+1}{4}$.

Поскольку $a_k \ge \frac{a_1 + \ldots + a_k}{k} > \frac{n+1}{4k}$, имеем

$$b_k + b_{k+1} + \ldots + b_n \le (n + 1 - k) b_k =$$

$$= (n + 1 - k)(1 - a_k) < (n + 1 - k)\left(1 - \frac{n+1}{4k}\right) =$$

$$= \frac{5}{4}(n+1) - \left[\frac{(n+1)^2 + (2k)^2}{4k}\right] \le$$

$$\le \frac{5}{4}(n+1) - \frac{2(n+1)(2k)}{4k} = \frac{n+1}{4}.$$

Е.Куликов

М1972. *На плоскости расположено бесконечное множество L прямых, никакие две из которых не параллельны. Известно, что как бы ни расположить на плоскости квадрат со стороной 1, он будет пересекаться хотя бы с одной прямой множества L. Докажите, что найдется квадрат со стороной а) 0,8; б) 0,75, который пересекается не менее чем с тремя прямыми множества L.*

Докажем сразу более сильное утверждение пункта б).

Лемма. *Для любого $\varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ найдутся две прямые множества L, пересекающиеся под углом, меньшим φ.*

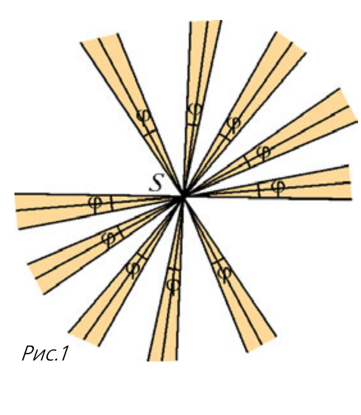


Рис.1

В самом деле, предположим противное – пусть любой угол между парой прямых больше некоторого $\varphi > 0$. Перенесем прямые параллельно так, чтобы они проходили через одну точку S. Все полученные прямые различны, так как в L нет параллельных прямых. Построим для каждой прямой l пару вертикальных углов величиной φ с вершиной в S, для которых l является биссектрисой (рис.1). Построенные углы не должны перекрываться (иначе угол между соответствующими прямыми меньше φ), значит, их количество не больше $2\pi/\varphi$, т.е. конечно – противоречие. Лемма доказана.

Обозначим за d длину диагонали квадрата со стороной 0,75. Заметим, что $d = 0{,}75\sqrt{2} > 1$.

Согласно лемме, выберем прямые l_1 и l_2 из L, пересекающиеся в некоторой точке O под таким углом α, что

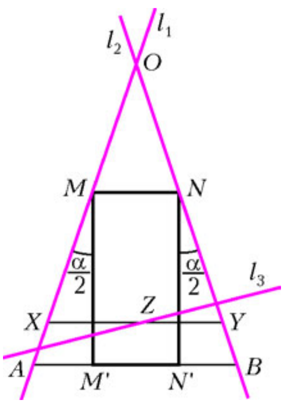


Рис.2

$0 < \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} < \frac{d-1}{2}$. Отложим на лучах прямых l_1 и l_2, образующих угол α, отрезки OA, OM и OB, ON так, что $OA = OB$, $OM = ON$, $AB = d$, $MN = 1$ (рис.2).

Обозначим через M' и N' проекции точек M и N на AB. Заметим, что

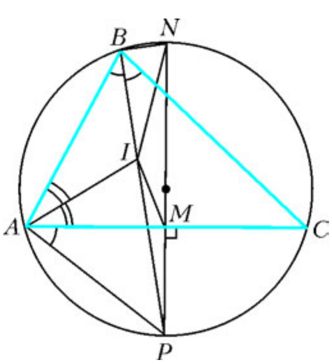
$$AM' = BN' = \frac{AB - M'N'}{2} = \frac{AB - MN}{2} = \frac{d-1}{2},$$

откуда $MM' = \dfrac{AM'}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} > 1$. Треугольник OAB покрывает прямоугольник $MNN'M'$ со сторонами $MN = 1$ и $MM' > 1$, поэтому строго внутри треугольника OAB можно расположить единичный квадрат, пересекаемый некоторой прямой l_3 множества L (l_3 отлична от l_1, l_2). Итак, внутри треугольника OAB есть точка Z, лежащая на прямой l_3.

Проведем через Z прямую, параллельную AB; она пересечет стороны OA и OB в точках X и Y. Длина отрезка XY меньше $AB = d$. Расположим квадрат со стороной 0,75 так, чтобы его диагональ покрывала отрезок XY. Этот квадрат искомый, поскольку содержит точки $X \in l_1$, $Y \in l_2$, $Z \in l_3$.

С.Волчёнков, П.Кожевников

М1973. *В треугольнике ABC ($AB < BC$) точка I – центр вписанной окружности, M – середина стороны AC, N – середина дуги ABC описанной окружности. Докажите, что $\angle IMA = \angle INB$.*



Пусть NP – диаметр описанной окружности (см. рисунок). Тогда $\angle NBP = \angle NAP = 90°$, точка P – середина дуги AC, поэтому $\angle ABP = \angle CBP$, т.е. BP – биссектриса $\angle ABC$. Следовательно, I лежит на BP. Диаметр NP является серединным перпендикуляром к отрезку AC, следовательно, NP проходит через M. Так как $\angle AIP$ – внешний для ΔAIB, то

$$\angle AIP = \angle BAI + \angle ABI = \frac{\angle BAC}{2} + \frac{\angle ABC}{2} =$$

$$= \angle IAC + \angle CBP = \angle IAC + \angle CAP = \angle IAP.$$

Получаем, что ΔAPI – равнобедренный ($AP = IP$). Отрезок AM – высота прямоугольного треугольника NAP, поэтому $\frac{AP}{MP} = \frac{NP}{AP}$ и $\frac{IP}{MP} = \frac{NP}{IP}$. Из последнего равенства следует подобие треугольников PMI и PIN, откуда получаем $\angle PMI = \angle PIN$.

Но $\angle IMA = \angle PMI - 90°$, а из прямоугольного ΔBNI следует $\angle INB = \angle PIN - \angle IBN = \angle PIN - 90°$.

А.Бадзян

М1974. *На бесконечном белом листе клетчатой бумаги конечное число клеток окрашено в черный цвет так, что у каждой черной клетки четное число (0, 2 или 4) белых клеток, соседних с ней по стороне. Докажите, что каждую белую клетку можно покрасить в красный или зеленый цвет так, чтобы у каждой черной клетки стало поровну красных и зеленых клеток, соседних с ней по стороне.*

Введем координаты так, чтобы множество центров клеток совпадало с множеством точек, имеющих целые координаты. Будем считать, что окрашены не клетки, а целочисленные точки. Соединим пары соседних черных точек отрезками единичной длины. По условию, из каждой черной точки выходит четное число отрезков. Идея раскраски состоит в следующем. Можно показать, что объединение проведенных отрезков разбивает плоскость на области, которые можно покрасить в два цвета – желтый и синий – так, чтобы области, граничащие по отрезку, имели разные цвета. Далее, покрасим зеленым в синих областях точки с четной абсциссой, а в желтых – с нечетной абсциссой. Остальные клетки покрасим красным (рис. 1).

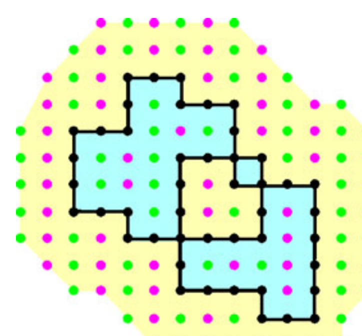


Рис.1

Проведем формальные рассуждения. Вначале окрасим все белые точки «в полоску», т.е. так, чтобы зеленые точки имели нечетную абсциссу, а красные – четную.

Начнем движение по отрезкам из какой-то черной точки A_1, при этом образуется последовательность черных точек $A_1, A_2, A_3, \ldots$, в которой каждая точка соединена отрезком со следующей. Войдя в черную точку по некоторому отрезку, мы сможем выйти по другому отрезку (поскольку число выходящих из точки отрезков четно), пока в первый раз не попадем в вершину A_n, в которой уже раньше побывали (т.е. $A_n = A_k$ для некоторого $k < n$). Тем самым, найден цикл $A_k A_{k+1} A_{k+2} \ldots A_n$ из отрезков, который ограничи-

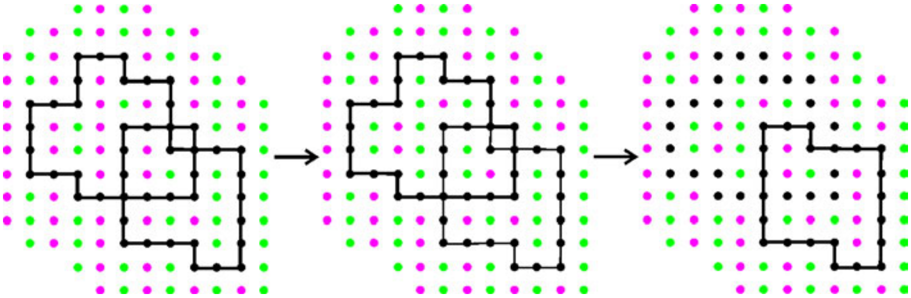


Рис. 2

вает на плоскости многоугольник X. Изменим цвет у всех красных и зеленых точек, лежащих внутри X, а отрезки $A_kA_{k+1}, A_{k+1}A_{k+2}, \ldots, A_{n-1}A_n$ сотрем. В оставшейся системе отрезков из каждой черной точки также выходит четное число отрезков, поэтому снова найдем цикл, ограничивающий многоугольник, произведем перекрашивание внутри многоугольника и сотрем отрезки, ограничивающие многоугольник. Действуем так до тех пор, пока все отрезки не будут стерты (шаги перекрашивания показаны на рисунке 2).

Докажем, что полученная в конце раскраска удовлетворяет условию.

Если у черной точки P четыре белых соседа, то при каждом перекрашивании они находились либо все внутри многоугольника, либо все – вне, а значит, перекрашивались одинаковое число раз. Тогда у P по два красных и зеленых соседа, поскольку так было в начальной раскраске.

Пусть у черной точки P два белых соседа K и L и два черных соседа M и N.

Первый случай: если K и L – соседи по диагонали (рис.3), то при каждом перекрашивании отрезок KL

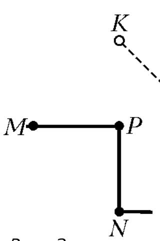


Рис. 3

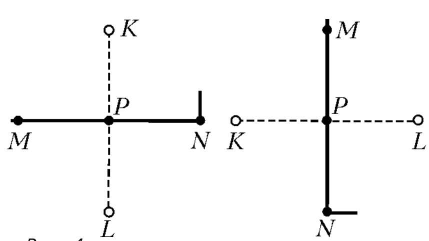


Рис. 4

находится либо весь внутри многоугольника, либо весь – вне. Поэтому K и L перекрашивались одинаковое число раз, и значит, одна из них зеленая, другая – красная, как это было вначале.

Второй случай: если K и L лежат в одной горизонтали или в одной вертикали (рис.4), то при перекрашивании внутри многоугольника, граница которого содержит путь MPN, одна из точек K, L лежит внутри, а другая – вне многоугольника. При любом другом перекрашивании отрезок KL находится либо весь внутри многоугольника, либо весь – вне. Поэтому количество перекрашиваний точек K и L отличается на 1. Так как в начальной раскраске K и L одноцветны, то в конечной – разноцветны.

П.Кожевников

М1975. *а) За круглым столом сидят 100 представителей 50 стран, по двое от каждой страны. Докажите, что их можно разбить на две группы таким образом, чтобы в каждой группе было по одному представителю от каждой страны и каждый человек находился в одной группе не более чем с одним своим соседом.*

б) За круглым столом сидят 100 представителей 25 стран, по 4 представителя от каждой. Докажите, что их можно разбить на 4 группы таким образом, чтобы в каждой группе было по одному представителю от каждой страны и никакие двое из одной группы не сидели за столом рядом.*

Лемма. *Пусть среди 2n человек – представителей n стран, по двое от страны – у каждого человека не более одного знакомого. Тогда всех людей можно так разбить на две группы, чтобы в каждой из групп не было знакомых и было по одному представителю от каждой страны.*

Доказательство. Если есть люди, которые ни с кем не знакомы, то разобьем их на пары (их четное число, поскольку все остальные разбиваются на пары знакомых) и познакомим людей в каждой паре. Итак, можно считать, что у каждого человека ровно один знакомый. Выберем любого представителя A страны i и поместим его в первую группу, второго представителя этой же страны поместим во вторую группу, его знакомого – представителя, скажем, j-й страны – поместим снова в первую группу, второго представителя j-й страны – во вторую и так далее. Этот процесс остановится, когда очередной знакомый уже распределен; это возможно, только если этот знакомый – изначальный представитель A страны i, тогда он помещен в первую группу, что и требовалось.

Если еще остались люди, не распределенные по группам, повторим процесс и так далее. Лемма доказана.

а) Разобьем всех сидящих за столом на 50 пар соседей и объявим людей в каждой паре знакомыми. Применяя лемму, получаем нужное разбиение на группы.

б) Пусть каждая из 25 стран состоит из двух республик. Положим, среди четырех представителей каждой страны двое из одной республики и двое из другой. Разобьем всех сидящих за столом на 50 пар соседей и объявим людей из одной пары друзьями; соседей, не являющихся друзьями, объявим знакомыми (таким образом, у каждого два соседа – один друг и один знакомый). Тогда, используя лемму (для республик и друзей), разобьем всех людей на две группы по 50 человек так, что в каждой из групп нет пар друзей и есть по одному представителю от каждой из 50 республик (т.е. по двое от страны). Снова применив лемму, разобьем каждую из двух групп по 50 человек на две группы по 25 человек так, что в каждой из групп нет пар знакомых и есть по одному представителю от каждой страны.

С.Берлов

Ф1983. *В системе, изображенной на рисунке 1, все грузы одинаковые, блоки имеют пренебрежимо малые массы, нити очень легкие и нерастяжимые. В начальный момент грузы удерживают так, что нити натя-*

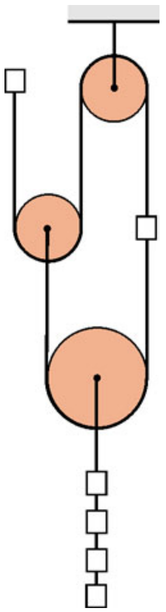


Рис. 1

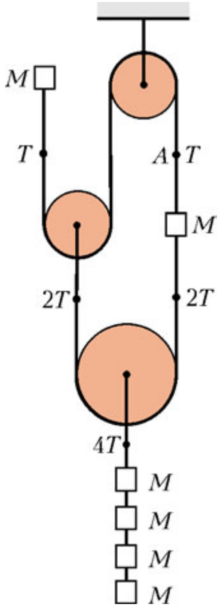


Рис. 2

нуты, а при их отпускании движение начинается без рывков. Найдите ускорения блоков. Свободные куски нитей вертикальны.

Обозначим силу натяжения нити в точке A буквой T, после этого можно сразу «нарисовать» остальные силы натяжения нитей (рис.2). Видно, что груз M наверху слева и груз M справа двигаются под действием одинаковых сил, значит, у них будут одинаковые ускорения – обозначим их буквой a. Сразу ясно, что «средний» блок имеет нулевое ускорение – если грузы M сдвинуть вниз на одинаковые расстояния, то этот блок должен будет остаться на месте. Тогда получается, что ускорение нижнего блока и груза $4M$, привязанного к нему, равно $0{,}5a$.

Теперь можно записать уравнения динамики для любого из грузов M и для нижнего груза общей массой $4M$:

$$T + Mg = Ma\,,\quad 4Mg - 4T = 4M \cdot 0{,}5a\,.$$

Отсюда получаем

$$a = \frac{4}{3}g \quad \text{и} \quad T = \frac{Mg}{3}$$

(мы проверяем, натянуты ли куски нити: если система устроена так, что нить окажется не натянутой, наши соотношения между ускорениями тел системы окажутся неверными).

Итак, два блока неподвижны, а ускорение нижнего блока равно $\frac{2}{3}g$.

А.Блоков

Ф1984. *Моль гелия находится в сосуде объемом 10 л при температуре 300 К. Объем газа увеличивают, при этом теплоемкость его во всем процессе равна $C = 1000$ Дж/К (и остается постоянной!). Оцените изменение температуры газа при его расширении в 20 раз.*

Теплоемкость $C = 1000$ Дж/(моль·К) – очень большая, поэтому температура газа изменяется в этом процессе совсем немного. Можно оценить работу газа приближенно, считая температуру T постоянной:

$$A = \nu RT \ln\frac{V_2}{V_1} =$$

$$= 1\ \text{моль} \cdot 8{,}3\ \text{Дж/(моль}\cdot\text{К)} \cdot 300\ \text{К} \cdot \ln 20 = 7460\ \text{Дж}\,.$$

Теперь можно найти изменение температуры:

$$C\Delta T = A + C_V \Delta T\,,$$

откуда

$$\Delta T = \frac{A}{C - C_V} = \frac{A}{C - \frac{3}{2}\nu R} \approx 7{,}5\ \text{К}\,.$$

Итак, температура газа увеличилась примерно на 7,5 К. Точное решение дает «добавку» приблизительно 0,15 К.

Р.Александров

Ф1985. *Батарейку напряжением $U = 6$ В с малым внутренним сопротивлением подключают к цепи, изображенной на рисунке 1. Конденсаторы имеют одинаковые емкости $C = 100$ мкФ, резисторы также одинаковые, сопротивлением $R = 10$ кОм каждый. Какой полный заряд протечет через «горизонтальный» резистор? Какое количество теплоты в нем выделится?*

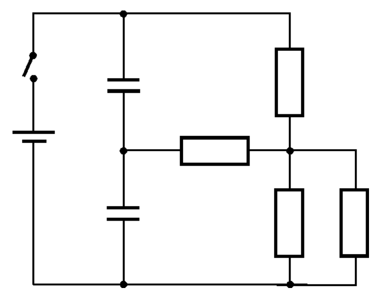


Рис. 1

Найдем потенциал точки соединения конденсаторов φ_1 как функцию заряда q, протекшего через «горизонтальный» резистор (рис.2):

$$C\varphi_1 + C(\varphi_1 - U) = -q\,,$$

откуда

$$\varphi_1 = \frac{U}{2} - \frac{q}{2C}\,.$$

Теперь найдем потенциал точки соединения всех резисторов φ_2 в тот же момент (рис.3):

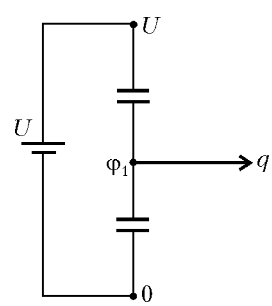


Рис. 2

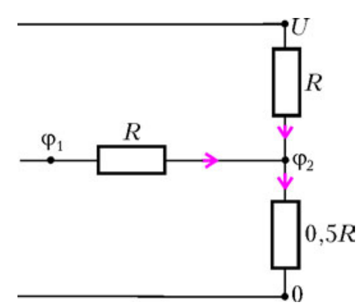


Рис. 3

$$\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} + \frac{U - \varphi_2}{R} = \frac{\varphi_2}{0{,}5R}\,,$$

откуда

$$\varphi_2 = \frac{1}{4}\varphi_1 + \frac{1}{4}U\,.$$

Разность потенциалов между этими точками равна

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{3}{4}\varphi_1 - \frac{1}{4}U = \frac{1}{8}U - \frac{3}{8}\frac{q}{C}\,.$$

Для того чтобы эта разность потенциалов упала до нуля, через «горизонтальный» резистор должен протечь заряд

$$Q = \frac{CU}{3} = 2 \cdot 10^{-4}\ \text{Кл}\,.$$

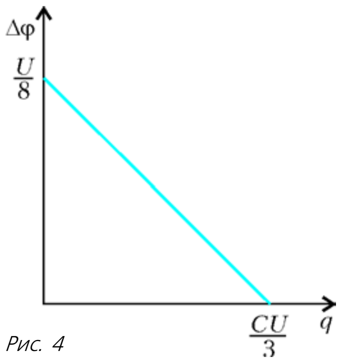


Рис. 4

Построим график зависимости $\Delta\varphi$ от q (рис.4). Площадь под этим графиком – это количество теплоты, выделившееся в резисторе:

$$W = \frac{1}{2}\frac{U}{8}\frac{CU}{3} = \frac{CU^2}{48} = 7{,}5\cdot 10^{-5}\ \text{Дж}.$$

А.Зильберман

Ф1986. *Катушка содержит $N = 1000$ витков провода и намотана на тороидальный сердечник, сделанный из материала с большой магнитной проницаемостью. Катушка включена в сеть переменного напряжения $U = 36$ В последовательно с резистором сопротивлением $R = 100$ Ом. От части катушки ($n = 250$ витков от одного из концов намотки) сделан отвод, и эта часть катушки замкнута проводником, имеющим очень малое сопротивление. Какой ток течет по этому проводнику? Рассеянием магнитного потока пренебречь. Сопротивление провода, которым намотана катушка, считать малым.*

Напряжение на замкнутой части катушки равно нулю. Но чтобы ЭДС индукции была нулевой, нужно, чтобы магнитный поток через эти витки не изменялся со временем. Для цепи переменного тока это означает, что магнитный поток равен нулю. Так может получиться в том случае, когда магнитные поля, создаваемые частями катушки, компенсируют друг друга. Для этого токи частей катушки должны течь навстречу друг другу и относиться по величине как 1:3 (ток меньшей части в три раза больше). Ток через «длинную» часть катушки определяется внешней частью цепи, поскольку ЭДС всей катушки тоже равна нулю:

$$I = \frac{U}{R} = 0{,}36\ \text{А}.$$

Ток через замыкающий проводник складывается из токов частей катушки (они текут навстречу друг другу) и равен

$$I_{\text{пр}} = 3I + I = 4I = 1{,}44\ \text{А}.$$

Можно было и сразу догадаться – автотрансформатор уменьшает напряжение в 4 раза, а ток при этом в 4 раза увеличивается.

З.Рафаилов

Ф1987. *Для уменьшения отражения света от поверхности линзы применяют просветляющий слой из материала с меньшим коэффициентом преломления, чем у стекла линзы. Расчет этого слоя обычно производят для длины волны 0,55 мкм, соответствующей зеленому цвету. Как изменится при этом отражение света для красного и фиолетового краев диапазона видимого света?*

Толщина просветляющего слоя составляет четверть длины волны интересующего нас зеленого света (убедитесь в этом самостоятельно). При этом запаздывание «прошедшей – отраженной – прошедшей назад» волны относительно «прошедшей» волны составляет половину длины волны, что соответствует изменению фазы на $180°$, и происходит почти полная (ну, это в идеале!) компенсация отраженной волны.

Для красного (длина волны примерно 0,7 мкм) и фиолетового (примерно 0,4 мкм) краев диапазона видимого света запаздывание получится другим – примерно 0,4 длины волны для красного и 0,7 длины волны для фиолетового. Компенсации не получится – для фиолетового света отражение останется почти прежним, для красного оно уменьшится, но немного. В результате для «главного» участка спектра отражение света станет существенно меньше, чем без просветления. А это для цветной фотографии, например, весьма важно.

А.Светов