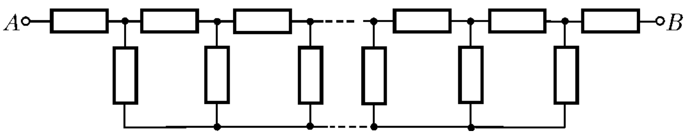


Рис. 2

бесконечного числа одинаковых резисторов с сопротивлением R каждый.

Д.Харабадзе

Ф2016. Во всех точках кривой A, изображенной на рисунке 3, потенциал электрического поля, созданного неподвижными точечными зарядами $q_1 = 4$ нКл и $q_2 = 1$ нКл, равен $\varphi = 900$ В. Определите расстояние l между зарядами. Постоянная в законе Кулона $k = 9 \cdot 10^9$ Н·м²/Кл².

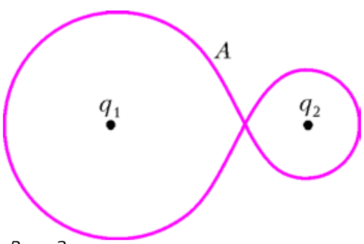


Рис. 3

И.Горбатый

Ф2017. В воду с показателем преломления $n_в$ частично погружена тонкая стеклянная плосковыпуклая линза, причем ее плоская сторона горизонтальна и находится под водой, а толщина линзы H (рис.4). На эту систему вертикально падает параллельный пучок света. На глубинах l и $L > l$ в воде возникают два одинаково ярких изображения. Каковы радиус R выпуклой поверхности линзы, показатель преломления n материала линзы и глубина h ее погружения в воду? Отражением света от воды и от линзы, а также поглощением света пренебречь.

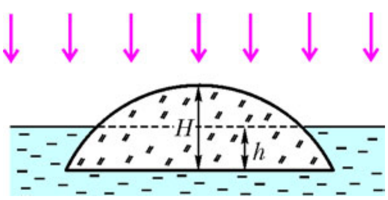


Рис. 4

С.Варламов, М.Семенов

Решения задач М1981–М1990, Ф1998–Ф2002

М1981. *В клетках таблицы 11×11 расставлены все натуральные числа от 1 до 121. Дима посчитал произведение чисел в каждой строке, а Саша – произведение чисел в каждом столбце. Могли ли они получить одинаковые наборы из 11 чисел?*

Ответ: не могли.

Из 13 чисел 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113 (это простые числа из промежутка [61;121]) найдутся два числа p и q, расположенные в одной строке. Значит, в наборе чисел Димы есть число A (произведение чисел этой строки), которое делится на pq. С другой стороны, существует единственный столбец (а именно, столбец, содержащий число p), произведение чисел которого делится на p. Но в этом столбце нет числа q, поэтому в наборе чисел Саши отсутствует число A.

С.Берлов

М1982. *На экране написано натуральное число. Каждую секунду к написанному в данный момент числу прибавляется произведение цифр его десятичной записи. Докажите, что начиная с некоторого момента число на экране не будет изменяться.*

Сначала докажем следующую **лемму**: *найдется такое натуральное k_0, что при $k > k_0$ любое k-значное число более чем в 10 раз превосходит произведение своих цифр.*

Доказательство. Любое k-значное число не меньше 10^{k-1}, а произведение его цифр не больше 9^k; поэтому достаточно, чтобы для k выполнялось неравенство

$$10^{k-1} > 10 \cdot 9^k, \text{ или } \left(\frac{10}{9}\right)^k = \left(1 + \frac{1}{9}\right)^k > 100 .$$

Пользуясь *неравенством Бернулли* $(1+x)^n \geq 1 + nx$ при $x \geq -1$ и любом натуральном n (это неравенство нетрудно доказать индукцией по n), получаем, что при $k > k_0 = 900$ неравенство $\left(1 + \frac{1}{9}\right)^k > 100$ верно. Лемма доказана.

Перейдем к решению задачи. Если на экране возникло число, у которого в десятичной записи есть ноль, то с этого момента число не будет изменяться. Предположим противное – пусть в десятичной записи чисел $a_1, a_2, \ldots$, последовательно появляющихся на экране, нет нулей. Тогда последовательность $a_1, a_2, \ldots$ строго возрастает. Зафиксируем некоторое натуральное $k > k_0$ такое, что $10^k > a_1$, и найдем в последовательности $a_1, a_2, \ldots$ последнее число a_m, которое меньше 10^k, т.е. $a_m < 10^k \leq a_{m+1}$. Согласно лемме, произведение цифр числа a_m меньше $\frac{a_m}{10} < 10^{k-1}$, поэтому

$$a_{m+1} < a_m + 10^{k-1} < 10^k + 10^{k-1} .$$

Неравенства

$$10^k \leq a_{m+1} < 10^k + 10^{k-1}$$

показывают, что a_{m+1} – это $(k+1)$-значное число, причем его первая цифра единица, а вторая ноль. Противоречие.

А.Белов

М1983. *Сколько существует разных способов разбить число 2006 на натуральные слагаемые, которые приблизительно равны? Слагаемых может быть одно или несколько. Числа называются приблизительно равными, если их разность не больше 1. Способы, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются одинаковыми.*

Ответ: 2006.

Докажем, что для каждого целого k от 1 до 2006 число 2006 можно разбить ровно на k приблизительно равных слагаемых, причем единственным способом. Отсюда будет следовать решение.

Заметим, что в каждом разбиении натурального числа на k приблизительно равных слагаемых найдется не более двух разных слагаемых, т.е. несколько ($x > 0$ штук) слагаемых равны m, а остальные ($y \geq 0$ штук) равны $m+1$. Имеем: $x + y = k$, $2006 = m \cdot x + (m+1) \cdot y = m \cdot k + y$.

Так как $0 \le y < k$, то y и m определяются по k однозначно – это, соответственно, остаток и неполное частное при деления 2006 на k; x также определяется однозначно: $x = k - y$. Отсюда вытекает, что при фиксированном k имеется не более одного требуемого разбиения.

С другой стороны, для каждого k от 1 до 2006 разбиение возможно: разделив 2006 на k с остатком ($2006 = k \cdot m + y$, $0 \le y < k$), получаем представление числа 2006 в виде суммы $x = k - y$ слагаемых, равных m, и y слагаемых, равных $m + 1$.

С.Дориченко, П.Кожевников

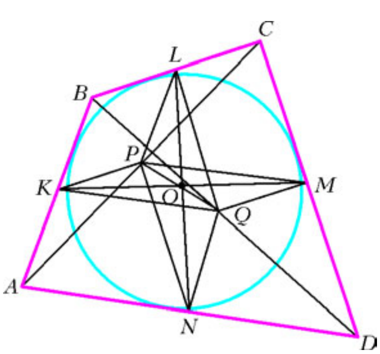
M1984. *На плоскости отмечены 1000 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что найдется не более 1000000 равнобедренных треугольников с вершинами в этих точках.*

Рассмотрим один из $N = \frac{1000 \cdot 999}{2}$ отрезков, соединяющих пару отмеченных точек. Этот отрезок является основанием для двух или менее равнобедренных треугольников с вершинами в отмеченных точках, так как иначе на серединном перпендикуляре к этому отрезку находятся хотя бы 3 отмеченные точки, что невозможно по условию. Таким образом, количество равнобедренных треугольников с вершинами в отмеченных точках не превосходит $2N < 1000000$.

С.Берлов, И.Богданов

M1985. *Четырехугольник ABCD, у которого нет параллельных сторон, описан около окружности с центром O. Середины сторон AB, BC, CD, DA обозначены K, L, M, N соответственно. Докажите, что если точки O, K, M лежат на одной прямой, то точки O, L, N также лежат на одной прямой.*

Известно (но не просто доказывается – см., например, задачу М448 «Задачника «Кванта»), что для описанного четырехугольника прямая, проходящая через середины его диагоналей (называемая прямой Гаусса четырехугольника), проходит через центр вписанной окружности. Пусть P и Q – середины диагоналей AC и BD четырехугольника $ABCD$ (см. рисунок). Тогда PQ проходит через O. Заметим, что KQ и PM – средние линии треугольников ABD и ACD, $KQ \parallel AD \parallel PM$. Аналогично, $KP \parallel BC \parallel QM$. Поскольку AD и BC непараллельны, то $KQMP$ – параллелограмм. Так как O лежит на PQ и, по условию задачи, на KM, то O – точка пересечения диагоналей параллелограмма $KQMP$, т.е. середина отрезка PQ.



Аналогично предыдущему, $LPNQ$ – параллелограмм, поэтому его диагональ LN проходит через середину O другой диагонали PQ, что и требовалось доказать.

Укажем еще несколько эквивалентных условий, задающих класс описанных четырехугольников $ABCD$ без параллельных сторон, о котором идет речь в задаче.

Условие 0: KM проходит через точку O.

Условие 1: точка O является центром четырех равных масс, размещенных в вершинах A, B, C, D.

Условие 2: выполняется равенство $OA \cdot OC = OB \cdot OD$.

Для формулировки следующих условий введем дополнительные обозначения: пусть K' и M' – точки касания окружности со сторонами AB и CD, K'' и M'' – точки, симметричные точкам K' и M' относительно K и M соответственно.

Условие 3: $KM \parallel K'M'$.

Условие 4: прямые $K''M''$, BC, AD пересекаются в одной точке.

Условие 5: центр тяжести вершин четырехугольника, центр тяжести его периметра и центр тяжести сплошного четырехугольника лежат на одной прямой.

Эквивалентность условий 0 и 1 является фактически переформулировкой данной задачи. Об условии 2 см. задачу 7 для 11 класса заключительного этапа XXXI Всероссийской олимпиады школьников («Квант» №5 за 2005 г.). Об условиях 3 и 4 см. задачу 7 для 11 класса заключительного этапа XXVI Всероссийской олимпиады школьников («Квант» №5 за 2000 г.).

А.Заславский, П.Кожевников

M1986. *Докажите, что для 2n действительных чисел* $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n \le y_1 \le y_2 \le \ldots \le y_n$ *выполняется неравенство*

$$\left(x_1 + x_2 + \ldots + x_n + y_1 + y_2 + \ldots + y_n\right)^2 \ge$$
$$\ge 4n\left(x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n\right).$$

Рассмотрим n квадратных трехчленов $P_i(t) = t^2 - (x_i + y_i)t + x_iy_i = (t - x_i)(t - y_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Если $t \in [x_i; y_i]$, то $P_i(t) \le 0$, поэтому в точке $t_0 = \frac{x_n + y_1}{2}$ (находящейся на отрезке $[x_n; y_1]$) каждый из трехчленов принимает неположительное значение. Следовательно, квадратичная функция

$$F(t) = P_1(t) + P_2(t) + \ldots + P_n(t) =$$
$$= nt^2 - \left(x_1 + x_2 + \ldots + x_n + y_1 + y_2 + \ldots + y_n\right)t +$$
$$+ \left(x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n\right)$$

в точке t_0 также принимает неположительное значение, т.е. график функции $F(t)$ пересекает ось Ox (или касается ее). Значит, трехчлен $F(t)$ имеет вещественный корень, и его дискриминант $\left(x_1 + x_2 + \ldots + x_n + y_1 + y_2 + \ldots + y_n\right)^2 - 4n\left(x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n\right)$ неотрицателен.

Получено неравенство, которое и нужно было доказать.

П.Самовол, М.Аппельбаум

M1987. *Даны икосаэдр и додекаэдр с равными расстояниями от центра до ребра. У какого из многогранников больше объем?*

Ответ: у икосаэдра.

Рассмотрим додекаэдр D с центром O, расстоянием d от центра до ребра и расстоянием h от центра до грани. Центры граней додекаэдра – вершины икосаэдра I с центром O. При гомотетии с центром O и коэффициентом $\frac{d^2}{h^2}$ икосаэдр I перейдет в такой икосаэдр I', что середины ребер многогранников D и I' будут совпадать, причем ребра с совпадающими серединами будут перпендикулярны. В икосаэдре I' расстояние от центра до ребра будет равно d. На рисунке 1 показано, как центры A и B соседних граней перейдут при гомотетии в A' и B'. На рисунке 2 мы видим сечение $OAMB$, перпендикулярное ребру PQ и проходящее через его середину M. Так как $\frac{OA'}{OA} = \frac{d^2}{h^2}$, то треугольники MOA' и AOM подобны, и угол OMA' прямой. Аналогично, угол OMB' прямой, поэтому A', M, B' лежат на одной прямой. Удалим общую часть

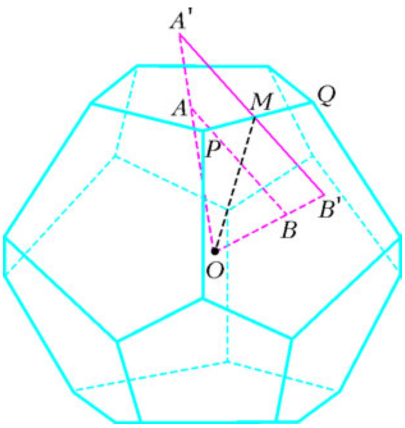


Рис. 1

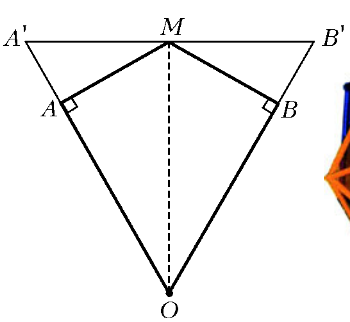


Рис. 2

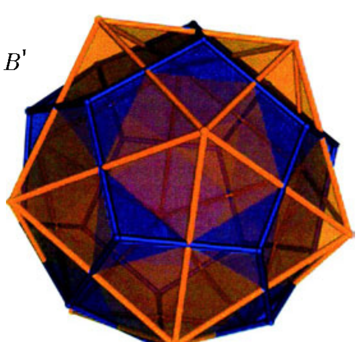


Рис. 3

многогранников D и I'. После этого от додекаэдра останется 20 синих правильных треугольных пирамид, а от икосаэдра – 12 желтых правильных пятиугольных пирамид (рис.3), причем ребра основания и двугранные углы при этих ребрах у всех пирамид одинаковы. Плоскостями, проходящими через высоту и каждое из боковых ребер, разрежем каждую пятиугольную пирамиду на пять треугольных пирамид, равных $S_1A_1B_1H_1$, а каждую треугольную пирамиду – на три треугольных

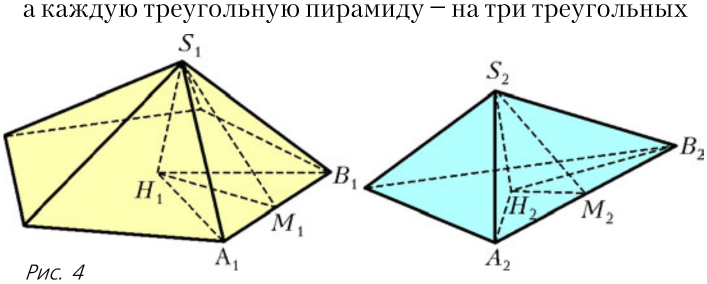


Рис. 4

пирамиды, равных $S_2A_2B_2H_2$ (рис.4). Итого, желтые пирамиды разбиты на 60 пирамид, равных $S_1A_1B_1H_1$, а синие – на 60 пирамид, равных $S_2A_2B_2H_2$.

Остается показать, что объем $S_1A_1B_1H_1$ больше объема $S_2A_2B_2H_2$. Пусть $A_1B_1 = A_2B_2 = 2a$, $\angle(S_1A_1B_1, H_1A_1B_1) = \angle(S_2A_2B_2, H_2A_2B_2) = \alpha$. Проведем высоты H_1M_1 и H_2M_2 в треугольниках $H_1A_1B_1$ и $H_2A_2B_2$. Тогда

$$H_1M_1 = A_1M_1 \operatorname{tg}\angle H_1A_1M_1 = a\operatorname{tg}\frac{3\pi}{10} >$$

$$> a\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = A_2M_2 \operatorname{tg}\angle H_2A_2M_2 = H_2M_2,$$

$$S_1H_1 = H_1M_1 \operatorname{tg}\angle S_1M_1H_1 = H_1M_1 \operatorname{tg}\alpha >$$

$$> H_2M_2 \operatorname{tg}\alpha = H_2M_2 \operatorname{tg}\angle S_2M_2H_2 = H_2M_2.$$

Значит, в пирамиде $S_1A_1B_1H_1$ больше и площадь основания и высота, откуда следует требуемое.

Отметим, что если у икосаэдра и додекаэдра равны радиусы описанной (или, что то же самое, вписанной) сферы, то больший объем, наоборот, имеет додекаэдр.

А.Заславский

М1988. *Для каких натуральных чисел a найдутся такие целые неотрицательные числа k, m, n, что если выписать друг за другом числа a^n и a^m в десятичной записи, то получится десятичная запись числа a^k?*

Ответ: $a = 5$ $\left(125 = \overline{5^0 5^2} = 5^3\right)$ и $a = 11$ $\left(11 = \overline{11^0 11^0} = 11^1\right)$.

Запишем условие в виде $a^n \cdot 10^x + a^m = a^k$, где x – количество цифр в десятичной записи числа a^m, т.е. $10^{x-1} \le a^m < 10^x$. Ясно, что $a \ge 2$, $k > m$ и $k > n$.

Пусть $n > m$. Тогда, сократив на a^m, получим $a^{n-m} \cdot 10^x + 1 = a^{k-m}$, или $a^{n-m} \cdot 10^x - a^{k-m} = -1$. Но левая часть последнего равенства делится на a, а правая – нет. Противоречие.

Если $n = m$, то $10^x + 1 = a^{k-m}$. Заметим, что $a^{k-m} > 10^x > a^m \ge 10^{x-1}$, откуда $a \le \frac{a^{k-m}}{a^m} \le \frac{10^x + 1}{10^{x-1}} = 10 + \frac{1}{10^{x-1}} \le 11$. При $a = 11$, т.е. когда последняя цепочка – цепочка равенств, имеем $m = n = 0$, $k = 1$. При четном a или a, кратном 5, равенство $10^x + 1 = a^{k-m}$ невозможно. Левая часть дает остаток 2 при делении на 3, поэтому равенство невозможно, если a дает остаток 0 или 1 при делении на 3. Таким образом, ни одно из значений a = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 не подходит.

Пусть $n < m$. Обозначив $z = m - n > 0$, $t = k - m > 0$, приходим к равенству $a^z\left(a^t - 1\right) = 10^x = 2^x \cdot 5^x$, где $x > 0$. Если $a = 2$ и $t = 1$, то левая часть не делится на 5. Пусть хотя бы одно из этих равенств не выполняется. Тогда каждый из взаимно простых сомножителей a^z и $a^t - 1$ больше 1, поэтому один из них является натуральной степенью двойки, а другой – натуральной степенью пятерки.

Пусть $a^z = 2^x$ и $a^t - 1 = 5^x$. Из первого равенства вытекает, что a является степенью двойки. В равенстве $a^t = 5^x + 1 = (4+1)^x + 1$ правая часть дает остаток 2 при делении на 4, значит, не делится на 2^2. Отсюда $a = 2$ и $t = 1$. Противоречие.

Пусть теперь $a^z = 5^x$ и $a^t - 1 = 2^x$. Тогда a является степенью пятерки, $a = 5^s$. Имеем: $5^r - 1 = 2^x$, где $r = ts$. Если r четно, то левая часть делится на $5^2 - 1 = 24$, что невозможно. Если r нечетно, то $5^r - 1 = (5-1)(1 + 5 + 5^2 + \ldots + 5^{r-1})$, где число $1 + 5 + 5^2 + \ldots + 5^{r-1}$ нечетно, так как является суммой нечетного количества нечетных слагаемых. Поэтому возможно только $r = 1$. Отсюда $s = t = 1$, $a = 5$. Далее, $x = 2$, откуда $m = 2$, $z = 2$. Из равенств $z = m - n$ и $t = k - m$ получаем $n = 0$ и $k = 3$.

В.Сендеров

М1989. *В королевстве N городов и r дорог, каждая дорога соединяет два города, и из любого города можно добраться до любого по дорогам. В городах живут гонцы. В начале каждого года один из городов отправляет во все соседние (т.е. соединенные с ним дорогами) города по гонцу (в таком городе должно быть достаточное для этого количество гонцов). Если в каждом городе гонцов недостаточно, то движения гонцов прекращаются.*

а) Пусть через несколько лет движение гонцов прекратилось. Докажите, что если города, отправляющие гонцов, выбирать по-другому, то движение гонцов все равно прекратится; при этом конечное количество гонцов в каждом городе не зависит от выбора городов.

б) Пусть через несколько лет в каждом городе оказалось столько же гонцов, сколько было изначально. Какое наименьшее количество гонцов может быть в королевстве?*

Пусть из некоторой ситуации (т.е. некоторого распределения гонцов по городам) X, последовательно отправляя гонцов из городов $A_1, A_2, \ldots, A_m$, мы получим ситуацию Y. Условимся обозначать это следующим образом: $Y = A_m A_{m-1} \ldots A_1(X)$.

а) Обозначим через X начальную конфигурацию гонцов. Назовем ситуацию *финальной*, если в ней нельзя отправить гонцов ни из одного города.

Пусть из X можно за n лет достичь финальной ситуации Y ($Y = A_n A_{n-1} \ldots A_1(X)$). Мы можем считать, что число n минимальное возможное, т.е. за меньшее количество лет никакой финальной ситуации достичь невозможно. Предположим, что за n лет из X можно было также получить ситуацию Z: $Z = B_n B_{n-1} \ldots B_1(X)$. Если мы покажем, что $Z = Y$, то задача будет решена. Действительно, в ситуации X в любом случае произойдет хотя бы n отправок гонцов; мы же докажем, что после этих n отправлений обязательно получится одна и та же финальная ситуация Y.

Предположим, что в последовательности городов $A_1, \ldots, A_n$ нет города B_1. Тогда в ситуации Y в городе B_1 не меньше гонцов, чем в ситуации X, и из этого города можно отправить гонцов. Это противоречит финальности Y. Поэтому $A_k = B_1$ для некоторого k, причем мы можем считать, что число k выбрано минимальным.

Рассмотрим ситуацию X и отправим в ней гонцов из B_1, получив ситуацию $X_1 = B_1(X)$. Поскольку количество гонцов в городах $A_1, \ldots, A_{k-1}$ не уменьшилось, то затем можно отправить гонцов последовательно из этих городов, получив ситуацию $A_{k-1} \ldots A_1 B_1(X)$. Заметим, что количество гонцов в городе зависит только от того, сколько раз из него отправляли гонцов, но не от порядка отправки. Поэтому $A_{k-1} \ldots A_1 B_1(X) = B_1 A_{k-1} \ldots A_1(X) = A_k A_{k-1} \ldots A_1(X)$.

Итак, мы получили, что $Y = A_n \ldots A_{k+1} A_{k-1} \ldots A_1 B_1(X)$. В таком случае $Y = A_n \ldots A_{k+1} A_{k-1} \ldots A_1(X_1)$, $Z = B_n \ldots B_2(X_1)$. Аналогично доказываем, что среди городов, участвующих в получении Y из X_1, есть B_2, и поэтому $Y = A'_{n-2} \ldots A'_1(X_2)$, $Z = B_n \ldots B_3(X_2)$, где $X_2 = B_2(X_1)$. Будем продолжать такой процесс перестановки городов дальше. После n-й перестановки мы получим, что $Y = X_n = B_n \ldots B_1(X) = Z$, что и требовалось.

б) **Ответ**: r гонцов.

Предположим, что $X = A_n A_{n-1} \ldots A_1(X)$, т.е. ситуация повторилась.

Заметим для начала, что из каждого города был отправлен хотя бы один гонец. Действительно, если из города A гонцов не отправлялось, то количество гонцов в нем не уменьшалось. Значит, оно и не увеличивалось, и гонцы не отправлялись также из всех соседей города A. Аналогично, соседи соседей A также не отправляли гонцов и т.д. Поскольку из города A можно добраться до любого, то мы в результате докажем, что никакой город гонцов не отправлял. Противоречие.

Будем последовательно рассматривать ситуации X, $A_1(X), \ldots, A_{n-1}A_{n-2} \ldots A_1(X)$ и сопоставлять некоторым гонцам некоторые дороги. При этом будут выполнены следующие условия:

1) если гонцу в некоторый момент сопоставили дорогу AB (т.е. дорогу между городами A и B), то *после* этого он может двигаться только по дороге AB;

2) никаким двум гонцам не будет сопоставлена одна и та же дорога.

В начальной ситуации X сопоставим каждому выезжающему из A_1 гонцу ту дорогу, по которой он выезжает. Тогда оба условия, очевидно, выполнены.

Рассмотрим ситуацию $A_{k-1}A_{k-2} \ldots A_1(X)$ и отправление гонцов из A_k. Если в A_k находятся гонцы, уже сопоставленные каким-то дорогам, то по условию 1 эти дороги выходят из A_k. Пустим каждого такого гонца по сопоставленной ему дороге (по условию 2 это возможно). Ясно, что то, какой именно гонец пойдет по какой дороге, не повлияет на ситуацию. Далее, пустим по всем остальным дорогам из A_k некоторых из оставшихся гонцов (тех, которым еще не сопоставлены дороги). При этом, если какой-то гонец едет по еще «не сопоставленной никому» дороге, то сопоставим ему эту дорогу. Ясно, что после этого условия 1, 2 остаются выполненными. Кроме того, если до этого действия какой-то дороге, ведущей из A_k, не был сопоставлен никакой гонец, то после него такой гонец появится. Поэтому каждой дороге, выходящей из A_k, будет сопоставлен гонец.

В конце концов после рассмотрения ситуации $A_{n-1}A_{n-2}\ldots A_1(X)$ каждой дороге будет сопоставлен гонец (так как из каждого города гонцы отправлялись), значит, гонцов не меньше, чем дорог.

Осталось показать, что r гонцов достаточно. Обозначим города $A_1, A_2, \ldots, A_N$. Расставим вначале на каждой дороге по гонцу, а затем переместим гонца, находящегося на дороге A_iA_j $(i < j)$, в город A_i. В результате в каждом городе A_i будет столько гонцов, сколько из него ведет дорог в города с номерами, большими i.

Из A_1 можно отправить гонцов – в нем столько же гонцов, сколько из него выходит дорог. Отправим гонцов и перенумеруем города по циклу: A_1 станет A_N, а A_i станет A_{i-1} при $i \geq 2$. Тогда по-прежнему из каждого города будет идти столько дорог в города с бо́льшими номерами, сколько в нем гонцов. Продолжив этот процесс, после N-й перенумерации мы получим, что в каждом городе будет столько же гонцов, сколько было вначале, что и требовалось.

И.Богданов, П.Кожевников

М1990*. *Дан треугольник ABC. На продолжении стороны BC за точку C выбирается точка X. Окружности, вписанные в треугольники ABX и ACX, пересекаются в точках P и Q. Докажите, что все прямые PQ проходят через некоторую точку, не зависящую от положения точки X.*

Прежде докажем вспомогательное **утверждение** (это утверждение содержится, например, в задачнике Шарыгина «Геометрия 9–11», задача 255): *пусть в треугольнике ABC вписанная окружность имеет центр I и касается сторон BC, CA в точках D, E соответственно. Тогда прямые AI и DE пересекаются в такой точке G, что $\angle AGB = 90°$ (рис. 1).*

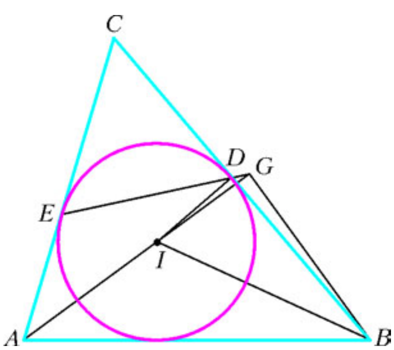


Рис. 1

Доказательство. Из равнобедренного треугольника CDE находим $\angle CDE = \angle CED = 90° - \frac{\angle C}{2}$, поэтому

$$\angle AGE = \angle CED - \angle GAE =$$

$$= 90° - \frac{\angle C}{2} - \frac{\angle A}{2} = \frac{\angle B}{2} = \angle IBD.$$

Отсюда следует, что точки B, D, I, G лежат на одной окружности. Поскольку $\angle IDB = 90°$, это окружность с диаметром BI, следовательно, $\angle IGB = 90°$. Утверждение доказано.

Перейдем к решению задачи. Пусть окружности, вписанные в треугольники ABX и ACX, касаются прямых AX и BC в точках K, L, M, N (рис.2). Пусть биссектриса угла ABC пересекает прямую KM в точке U. Согласно доказанному утверждению, U является проекцией точки A на эту биссектрису, и поэтому U не зависит от выбора точки X. Аналогично, прямая LN проходит через фиксированную точку V – проекцию точки A на биссектрису угла ACX.

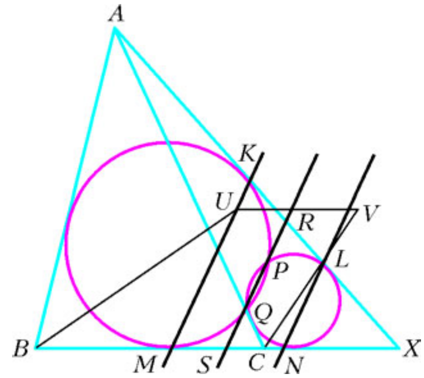


Рис. 2

Прямые KM и LN параллельны, так как они перпендикулярны биссектрисе угла AXB. Пусть прямая PQ пересекает прямые AX и BC в точках R и S соответственно. По теореме о касательной и секущей, $RK^2 = RP \cdot RQ = RL^2$, т.е. $RK = RL$. Аналогично, $SM = SN$. Таким образом, прямая PQ является средней линией трапеции $KLNM$. Значит, прямая PQ делит пополам любой отрезок, соединяющий точки на прямых KM и LN, в частности, проходит через фиксированную точку – середину отрезка UV.

Л.Емельянов

Ф1998. *Автомобиль едет по прямой дороге. За первый час пути его средняя скорость составила 50 км/ч, еще час он ехал со средней скоростью 70 км/ч, затем ровно час простоял в пробке. Остаток пути он ехал с постоянной скоростью 40 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на всем пути.*

За первые три часа автомобиль проехал 120 км, значит, его средняя скорость была 40 км/ч. И остальную часть пути он проехал со скоростью 40 км/ч. Ясно, что средняя скорость на всем пути также равна 40 км/ч. Такое простое решение получилось только потому, что числа в условии были специально подобраны. Если бы автомобиль проехал, например, 60 км за первый час, то для получения ответа данных оказалось бы просто недостаточно.

О.Простов

Ф1999. *Спутник вращается вокруг Земли по круговой орбите, все время находясь над одной и той же точкой экватора («суточный» спутник). По совершенно непонятной причине спутник вдруг остановился (его скорость относительно центра Земли стала нулевой). Оцените время падения спутника на Землю с точностью не хуже 1%.*

Вначале разберемся с радиусом орбиты «суточного» спутника. Пусть радиус Земли R, а радиус орбиты спутника nR. Тогда ускорение спутника на орбите в n^2 раз меньше, чем у поверхности Земли, и для скорости спутника можно записать

$$\frac{v^2}{nR} = \frac{g}{n^2}.$$

Время полного оборота спутника составляет

$$T = \frac{2\pi nR}{v},$$

откуда

$$n^{3/2} = \frac{T}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{R}}, \quad n = 6{,}63.$$

Получается очень большое расстояние до центра Земли – радиус орбиты больше 42 тысяч километров. Если бы спутник начал с этой высоты падать на Землю без начальной скорости и если бы размер Земли был очень малым (при той же массе Земли, например, несколько метров), то движение это напоминало бы движение по ОЧЕНЬ узкому эллипсу с длиной большой оси nR. Время такого движения равно половине периода обращения по круговой орбите с той же большой осью – радиус такой орбиты $0{,}5nR$. При уменьшении радиуса орбиты вдвое время оборота уменьшается в $2^{3/2} \approx 2{,}828$ раз. Тогда время полуоборота составляет

$$\frac{24 \cdot 3600\ \text{с}}{2 \cdot 2{,}828} \approx 15300\ \text{с}.$$

Но радиус Земли не так мал, мы посчитали время падения «с избытком» – долетев до поверхности, спутник дальше уже не летит. Скорость при подлете к поверхности Земли приближенно равна второй космической скорости, т.е. примерно 11 км/с. С этой скоростью расстояние 6400 км (до центра Земли) еще лететь примерно 600 с, можно просто вычесть их из найденного результата и получить ответ: ≈ 14700 секунд.

Однако скорость спутника должна была бы еще возрасти при приближении к центру «маленькой Земли», время полета при этом получается меньше 600 с. Это время τ можно посчитать поточнее. Пусть до центра Земли осталось лететь x метров, тогда скорость можно найти из соотношения

$$\frac{GMm}{x} - \frac{GMm}{nR} = \frac{mv^2(x)}{2}.$$

Если пренебречь в левой части уравнения вторым слагаемым (погрешность невелика, а интеграл получится совсем простым!), то

$$v(x) = \sqrt{\frac{2GM}{x}} = v_2\sqrt{\frac{R}{x}}.$$

Тогда

$$\tau = \int \frac{dx}{v(x)} = \frac{2R}{3v_2} \approx 400\ \text{с}.$$

Окончательно, время падения составляет приблизительно 15000 с.

Р.Александров

Ф2000. *В горизонтальном цилиндрическом сосуде находится порция гелия. Сосуд закрыт массивным поршнем, который может двигаться по горизонтали без трения. С газом в сосуде проводят два опыта: наружное давление увеличивают в три раза – один раз очень быстро, другой раз очень медленно. В каком из опытов конечный объем газа окажется меньше? Во сколько раз?*

При очень медленном повышении давления получится обычное адиабатическое сжатие газа. Для одноатомного газа связь давления и объема при адиабатическом процессе такова:

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{3/5} = 3^{3/5} \approx 1{,}93.$$

Если давление повышается скачкообразно, то поршень не остановится, когда давления внутри и снаружи в первый раз сравняются, – в этот момент он обладает значительной кинетической энергией и будет довольно долго колебаться, понемногу уменьшая амплитуду. После окончательной остановки его кинетическая энергия «достанется» газу. Считая, что эта энергия перейдет газу, находящемуся внутри сосуда (конечно, это неверно, но мы получим «крайнюю» оценку), можно записать закон сохранения энергии с учетом работы внешних сил. Давление снаружи можно считать постоянным и равным $3p$ (где p – первоначальное давление), объем меняется от V_1 до V_2, тогда работа внешних сил равна

$$A_{\text{вн}} = 3p(V_1 - V_2).$$

Внутренняя энергия газа увеличилась на эту величину, поэтому

$$\frac{3}{2}\nu RT_2 - \frac{3}{2}\nu RT_1 = 3p(V_1 - V_2).$$

Запишем теперь уравнения для начального и конечного состояний газа в сосуде:

$$pV_1 = \nu RT_1 \ \text{и}\ 3pV_2 = \nu RT_2.$$

Окончательно получим

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{3} \approx 1{,}67.$$

Если учесть, что нагревается и «внешний» газ, то повышение температуры окажется не таким большим, а следовательно, и отношение объемов будет ближе к ранее полученному значению. Аккуратный расчет довольно сложен — он должен учитывать и неодинаковость концентраций газа по обе стороны поршня, и различие скоростей движения частиц из-за разницы температур снаружи и внутри.

А.Газов

Ф2001. *Очень тонкий непроводящий стержень длиной L равномерно заряжен по длине полным зарядом Q. Маленькое проводящее кольцо радиусом R сделано из очень тонкой проволоки, его центр совпадает с одним из концов стержня, а плоскость кольца перпендикулярна стержню. Заряд кольца q. С какой силой стержень действует на кольцо?*

Посчитаем силу, действующую на стержень со стороны кольца, — она по величине такая же, как и искомая сила. Проблема в том, что в разных местах стержня напряженность поля кольца различна, можно посчитать интеграл, но он получается довольно громоздким. Попробуем по-другому.

Пусть в некотором месте стержня напряженность поля от зарядов кольца равна E, тогда на очень маленький кусочек стержня длиной Δx действует сила

$$\Delta F = E\Delta Q = \frac{EQ\Delta x}{L}.$$

Теперь нужно просуммировать силы, действующие на все кусочки стержня. Но такая же сумма (только без множителя Q/L) получается при вычислении разности потенциалов поля зарядов кольца между концами стержня, а ее можно найти совсем просто:

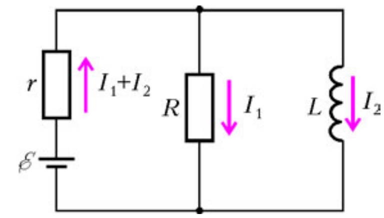
$$\Delta\varphi = \frac{kq}{R} - \frac{kQ}{\sqrt{R^2 + L^2}}.$$

Осталось умножить это выражение на Q/L. Итак,

$$F = \frac{kQq}{L}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + L^2}}\right).$$

З.Рафаилов

Ф2002. *К батарейке с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r подключают параллельно соединенные резистор сопротивлением R и катушку индуктивностью L. Какое количество теплоты выделится в резисторе за большое время?*



Для резистора и катушки можно записать (см. рисунок):

$$RI_1 = +LI_2'.$$

Для контура, содержащего батарейку и резистор, запишем:

$$r\left(I_1 + I_2\right) + RI_1 = \mathcal{E}.$$

Возьмем производную по времени от левой и правой частей последнего уравнения:

$$(r + R)I_1' + rI_2' = 0, \text{ или } I_2' = -\frac{r + R}{r}I_1'.$$

За малый интервал времени Δt в резисторе выделится количество теплоты

$$\Delta W = I_1^2 R\,\Delta t = I_1 R \cdot I_1 \Delta t =$$

$$= +LI_2' \cdot I_1\Delta t = -\frac{L(r + R)}{r}I_1' \cdot I_1\Delta t = -\frac{L(r + R)}{r} \cdot \Delta\left(\frac{I_1^2}{2}\right).$$

Ток через резистор меняется от начального значения $\mathcal{E}/(r + R)$ до нуля, поэтому суммарное количество теплоты будет равно

$$W = -\frac{L(r + R)}{r}\left(0 - \frac{\mathcal{E}^2}{2(r + R)^2}\right) = \frac{L\mathcal{E}^2}{2r(r + R)}.$$

А.Теплов

Деннис Габор

(Начало см. на с. 15)

достаточно использовать любой источник света. При наблюдении голографического изображения нужно смотреть на пленку – само изображение «появляется» в пространстве между пленкой и наблюдателем.

В настоящее время не существует технологий, допускающих фокусировку изображения в пустом пространстве. Для создания изображения нужен дым, туман, пленка или же вогнутое зеркало. Голографические изображения невозможно проецировать на удаленные объекты. Голограмма создает трехмерное изображение в пространстве только при просмотре через пленку или при отражении света от нее.

Габор не мог получить качественных голограмм по той причине, что имевшиеся в его распоряжении ртутные дуговые лампы не давали когерентного (монохроматического, или одноцветного) света. Сам термин «голограмма», предложенный Габором, имеет греческое происхождение и означает «всеобщая передача».

Первые голограммы с использованием лазера были получены Э.Лейтом и Ю.Упатниексом в Мичиганском университете в 1962 году. Для просмотра полученных ими голограмм тоже использовался лазер. В том же 1962 году Ю.Н.Денисюк в Государственном оптическом институте в Ленинграде, впервые объединив голографию Габора с принципами цветной фотографии Липмана, получил голограммы, просматриваемые при обычном освещении. С изобретением импульсных лазеров, которые дают мощный поток света в течение нескольких наносекунд, открылась возможность буквально останавливать мгновение и получать голограммы быстротекущих процессов (например, полет пули).

Голограммы можно получать с помощью не только лазеров, работающих в диапазоне видимого света, но и звуковых волн или других участков электромагнитного спектра. Так, голограммы, сделанные с использованием рентгеновских или ультрафиолетовых лучей, позволяют получать трехмерные изображения объектов с размерами, меньшими длины видимого света. Уникальная способность голограмм записывать и реконструировать объекты одновременно с помощью звуковых и световых волн открывает простор для многочисленных практических применений.