LXVIII Московская математическая олимпиада

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ПРАЗДНИК

6 класс

1. Таракан Валентин объявил, что умеет бегать со скоростью 50 м/мин. Ему не поверили, и правильно: на самом деле Валентин все перепутал и думал, что в метре 60 сантиметров, а в минуте 100 секунд. С какой скоростью (в «нормальных» м/мин) бегает таракан Валентин?

А. Хачатурян

2. На автобусе ездил Андрей
На кружок и обратно домой,
Заплатив 115 рублей,
Покупал он себе проездной.

В январе он его не достал,
И поэтому несколько дней
У шофера билет покупал
Он себе за 15 рублей.

А в иной день кондуктор с него
Брал 11 только рублей.
Возвращаясь с кружка своего,
Всякий раз шел пешком наш Андрей.

За январь сколько денег ушло,
Посчитал бережливый Андрей:
С удивлением он получил
Аккурат 115 рублей!

Сосчитайте теперь поскорей,
Сколько раз был кружок в январе?

А. Блинков, Д. и М. Вельтищевы

3. Лиса и два медвежонка делят 100 конфет. Лиса раскладывает конфеты на три кучки; кому какая достанется – определяет жребий. Лиса знает, что если медвежатам достанется разное количество конфет, то они попросят ее уравнять их кучки, и тогда она заберет излишек себе. После этого все едят доставшиеся им конфеты.

а) Придумайте, как лисе разложить конфеты по кучкам так, чтобы съесть ровно 80 конфет (не больше и не меньше).

б) Может ли лиса сделать так, чтобы в итоге съесть ровно 65 конфет?

И. Раскина

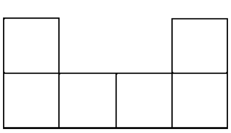

Рис. 1

4. Незнайка разместил без наложений в квадрате 10×10 только 13 фигур («скобок»), изображенных на рисунке 1. Попробуйте разместить больше.

А. Хачатурян

5. В числах МИХАЙЛО и ЛОМОНОСОВ каждая буква обозначает цифру (разным буквам соответствуют разные цифры). Известно, что у этих чисел произведения цифр равны. Могут ли оба числа быть нечетными?

А. Хачатурян

6. В Пустоземье живут три племени: эльфы, гоблины и хоббиты. Эльф всегда говорит только правду, гоблин всегда лжет, а хоббит через раз говорит то правду, то ложь. Однажды за круглым столом пировали несколько пустоземцев, и один из них сказал, указав на своего левого соседа: «Он – хоббит». Сосед сказал: «Мой правый сосед солгал». В точности ту же фразу затем повторил его левый сосед, потом ее же произнес следующий по кругу, и так они говорили «мой правый сосед солгал» много-много кругов, да и сейчас еще, возможно, говорят. Определите, из каких племен были пирующие, если известно, что за столом сидели а) девять; б) десять жителей Пустоземья.

А. Заславский, А. Хачатурян

7 класс

1. На рисунке 2 изображено, как изменялся курс тугрика в течение недели. У Пети было 30 рублей. В один из дней недели он обменял все свои рубли на тугрики. Потом он обменял все тугрики на рубли. Затем он еще раз обменял все вырученные рубли на тугрики и в конце концов обменял все тугрики обратно на рубли.

Напишите, в какие дни он совершал эти операции, если в воскресенье у него оказалось 54 рубля. (Достаточно привести пример.)

И. Ященко

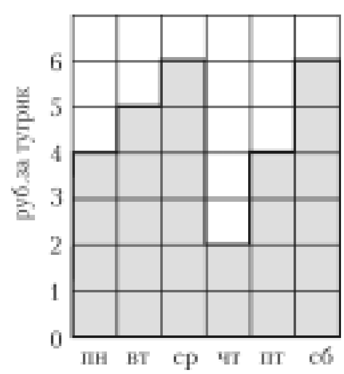

Рис. 2

2. Можно ли расставить числа а) от 1 до 7; б) от 1 до 9 по кругу так, чтобы любое из них делилось на разность своих соседей?

С.Токарев, А.Спивак

3. Зачеркните все шестнадцать точек, изображенных на рисунке 3, шестью отрезками, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя отрезков по линиям сетки.

А.Спивак

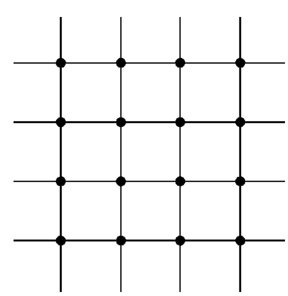

Рис. 3

4. Бумага расчерчена на клеточки со стороной 1. Ваня вырезал из нее по клеточкам прямоугольник и нашел его площадь и периметр. Таня отобрала у него ножницы и со словами «Смотри, фокус!» вырезала с краю прямоугольника по клеточкам квадратик, выкинула квадратик и объявила: «Теперь у оставшейся фигуры периметр такой же, какая была площадь прямоугольника, а площадь – как был периметр!» Ваня убедился, что Таня права.

а) Квадратик какого размера вырезала и выкинула Таня?

б) Приведите пример такого прямоугольника и такого квадрата.

в) Прямоугольник каких размеров мог вырезать Ваня?

А. Хачатурян

5. Решите ребус

$$250 \times ЛЕТ + МГУ = 2005 \times ГОД$$

(разными буквами обозначены разные цифры, а одинаковыми – одинаковые; при этом некоторыми буквами могут быть обозначены уже имеющиеся цифры 2, 5 и 0.)

а) Найдите хотя бы одно решение ребуса.

б) Докажите, что других решений нет.

Д. и М.Вельтищевы

6. На острове Невезения с населением 96 человек правительство решило провести пять реформ. Каждой реформой недовольна ровно половина всех граждан. Гражданин выходит на митинг, если он недоволен более чем половиной всех реформ. Какое максимальное число людей правительство может ожидать на митинге? (Приведите пример и докажите, что больше нельзя.)

Е.Корицкая

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ СТАРШИХ КЛАССОВ

1. Клетчатый бумажный квадрат 8×8 согнули несколько раз по линиям клеток так, что получился квадратик 1×1. Его разрезали по отрезку, соединяющему середины двух противоположных сторон квадратика. На сколько частей мог при этом распасться квадрат? (8)[1]

С.Зайцев

2. Высоты AA' и BB' треугольника ABC пересекаются в точке H. Точки X и Y – середины отрезков AB и CH соответственно. Докажите, что прямые XY и $A'B'$ перпендикулярны. (8)

А.Заславский

3. По кругу расставлены 2005 натуральных чисел. Докажите, что найдутся два соседних числа таких, что после их выкидывания оставшиеся числа нельзя разбить на две группы с равной суммой. (8)

Е.Куликов, С.Токарев

4. Разрежьте круг на несколько равных частей так, чтобы центр круга не лежал на границе хотя бы одной из них. (8)

С.Маркелов

5. Существуют ли 2005 различных натуральных чисел таких, что сумма любых 2004 из них делится на оставшееся число? (9)

Фольклор

6. Окружность ω_1 проходит через центр окружности ω_2. Из точки C, лежащей на ω_1, проведены касательные к ω_2, вторично пересекающие ω_1 в точках A и B. Докажите, что отрезок AB перпендикулярен прямой, проходящей через центры окружностей. (9)

А. Заславский

7. Верно ли, что любой треугольник можно разрезать на 1000 частей, из которых можно сложить квадрат? (9)

С. Маркелов

8. На окружности расставлено n цифр, ни одна из которых не 0. Сеня и Женя переписывают себе в тетрадки $n-1$ цифру, читая их по часовой стрелке. Оказалось, что хотя они начали с разных мест, записанные ими $(n-1)$-значные числа совпали. Докажите, что окружность можно разрезать на несколько дуг так, чтобы записанные на дугах цифры образовывали одинаковые числа. (9)

А.Канель-Белов

[1] *После условия каждой задачи в скобках указан класс, в котором она предлагалась.*

9. Существует ли плоский четырехугольник, у которого тангенсы всех внутренних углов равны? (10)

А.Заславский

10. На графике многочлена с целыми коэффициентами отмечены две точки с целыми координатами. Докажите, что если расстояние между точками – целое число, то соединяющий их отрезок параллелен оси абсцисс. (10)

Е. Горский

11. Конструктор состоит из набора прямоугольных параллелепипедов. Все их можно поместить в одну коробку, также имеющую форму прямоугольного параллелепипеда. В бракованном наборе одно из измерений каждого параллелепипеда оказалось меньше стандартного. Всегда ли у коробки, в которую укладывается набор, тоже можно уменьшить одно из измерений (параллелепипеды укладываются в коробку так, что их ребра параллельны ребрам коробки)? (10)

А.Шаповалов

12. В пространстве даны 200 точек. Каждые две из них соединены отрезком, причем отрезки не пересекаются друг с другом. Первый игрок красит каждый отрезок в один из k цветов, затем второй игрок красит в один из тех же цветов каждую точку. Если найдутся две точки и отрезок между ними, окрашенные в один цвет, выигрывает первый игрок, в противном случае – второй. Докажите, что первый может гарантировать себе выигрыш, если а) $k = 7$; б) $k = 10$. (10)

С.Конягин

13. Доска размером 2005×2005 разделена на квадратные клетки со стороной единица. Некоторые клетки доски в каком-то порядке занумерованы числами 1, 2, … так, что на расстоянии, меньшем 10, от любой незанумерованной клетки найдется занумерованная клетка. Докажите, что найдутся две клетки на расстоянии, меньшем 150, которые занумерованы числами, различающимися более чем на 23. Расстояние между клетками – это расстояние между их центрами. (11)

А.Скопенков, Д.Пермяков

14. С выпуклым четырехугольником $ABCD$ проделывают следующую операцию: одну из данных вершин меняют на точку, симметричную этой вершине относительно серединного перпендикуляра к диагонали (концом которой она не является), обозначив новую точку прежней буквой. Эту операцию последовательно применяют к вершинам A, B, C, D, A, B,… – всего n раз. Назовем четырехугольник допустимым, если его стороны попарно различны и после применения любого числа операций он остается выпуклым. Существует ли

а) допустимый четырехугольник, который после $n < 5$ операций становится равным исходному;

б) такое n_0, что любой допустимый четырехугольник после $n = n_0$ операций становится равным исходному? (11)

А.Устинов

15. На прямоугольном листе бумаги нарисован круг, внутри которого Миша мысленно выбирает n точек, а Коля пытается их разгадать. За одну попытку Коля указывает на листе (внутри или вне круга) одну точку, а Миша сообщает Коле расстояние от нее до ближайшей неразгаданной точки. Если оно оказывается нулевым, то после этого указанная точка считается разгаданной. Коля умеет отмечать на листе точки, откладывать расстояния и производить построения циркулем и линейкой. Может ли Коля наверняка разгадать все выбранные точки менее чем за $(n+1)^2$ попыток? (11)

О.Косухин

Публикацию подготовил Б.Френкин