противление будет представлять описанная выше система а) или б), если подключиться к паре ее наиболее удаленных вершин? Сколько разных значений сопротивления можно будет получить в случае а) и в случае б), если подключиться к всевозможным парам вершин этих многогранников?

Справка: грани икосаэдра – это 20 правильных треугольников, в каждой из 12 вершин сходятся по 5 треугольников; грани додекаэдра – это 12 правильных пятиугольников, в каждой из 20 вершин сходятся по 3 пятиугольника.

С.Кротов

Ф2057. Конденсатор емкостью C и две одинаковые катушки индуктивностью L каждая соединены параллельно и подключены к внешней цепи. В некоторый момент конденсатор не заряжен, а токи катушек равны I и $2I$. В этот момент очень быстро параллельно подключают еще пять таких же катушек, а внешнюю цепь отключают. Найдите максимальное значение заряда конденсатора и максимальное значение силы тока через катушку номер 7 (последняя из подключенных катушек). Элементы цепи считайте идеальными.

З.Рафаилов

Решения задач М2021–М2025, Ф2033–Ф2042

М2021. *В зале находится компания из n человек, среди которых есть пары знакомых. Известно, что если в зале останется 98 человек, то их всегда можно будет разбить на 49 пар знакомых. Какое наименьшее число пар знакомых могло быть в такой компании, если: а) $n = 99$; б) $n = 100$?*

Ответ: а) 99; б) 150.

Если для некоторого человека A в компании найдется 97 не знакомых с ним людей, то A и эти 97 человек образуют группу из 98 человек, которую нельзя разбить на 49 пар знакомых, – противоречие. Таким образом, у каждого человека в компании не более 96 не знакомых с ним людей, и следовательно, не менее $n-97$ знакомых. Поэтому количество пар знакомых не менее $n(n-97)/2$, что при $n = 99$ и $n = 100$ равно 99 и 150 соответственно.

Остается привести примеры. Рассадим людей по кругу на равном расстоянии друг от друга.

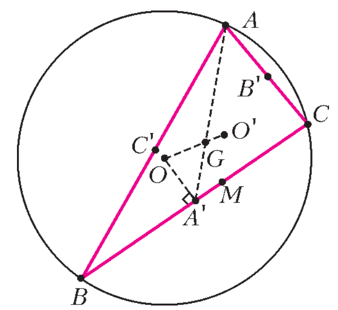
Для 99 человек пусть двое знакомы, если они соседи (т.е. сидят рядом за столом). Если зал покинул один человек, то оставшихся можно разбить на пары соседей.

Для 100 человек $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$ пусть знакомы сидящие рядом и кроме того пусть имеются пары «диаметрально противоположных» знакомых $A_1 - A_{51}, A_2 - A_{52}, \ldots, A_{50} - A_{100}$. Если зал покинули два человека с номерами разной четности, то оставшихся можно разбить на пары соседей. Пусть зал покинули два человека с номерами одной четности, для определенности A_1 и A_{2k+1}, где $k \le 25$. Тогда выберем пару знакомых $A_2 - A_{52}$, а оставшихся 96 человек можно разбить на пары соседей.

П.Кожевников

М2022. *Дана окружность, точка A на ней и точка M внутри нее. Рассматриваются хорды BC, проходящие через M. Докажите, что окружности, проходящие через середины сторон всевозможных треугольников ABC, касаются фиксированной окружности.*

Пусть O – центр данной окружности ω, O' – центр окружности ω', проходящей через середины A', B', C' сторон треугольника ABC, G – точка пересечения медиан треугольника ABC (см. рисунок). Обозначим через R и R' радиусы окружностей ω и ω' соответственно. Так как $OA' \perp BC$, то A' лежит на (фиксированной) окружности γ с диаметром OM. При гомотетии h с центром в A и коэффициентом $2/3$ точка A' переходит в G, поэтому G лежит на фиксированной окружности γ_1 – образе γ при гомотетии h.



Треугольник $A'B'C'$ получается из треугольника ABC гомотетией с центром G и коэффициентом $-1/2$, поэтому $R' = R/2$, а точка O' такова, что $\overrightarrow{OG} = 2\overrightarrow{GO'}$. Это означает, что при гомотетии h_1 с центром в O и коэффициентом $3/2$ точка G переходит в O', поэтому O' лежит на фиксированной окружности γ_2 – образе γ_1 при гомотетии h_1.

Итак, радиусы всевозможных окружностей ω' равны $R/2$, а их центры лежат на фиксированной окружности γ_2 с центром O_2 и радиусом r. Значит, окружности ω' касаются окружности с центром O_2 и радиусом $R/2 + r$ (а также при $R/2 \neq r$ касаются окружности с центром O_2 и радиусом $|R/2 - r|$).

П.Кожевников

М2023. *Пусть a, b, c – отличные от нуля целые числа, сумма которых равна нулю. Докажите, что:*
а) $(ab)^5+(bc)^5+(ca)^5$ делится на $(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2$;
б) $a^n+b^n+c^n$ делится на $a^4+b^4+c^4$ при любом натуральном n, дающем при делении на 3 остаток 1;
в) $(ab)^n+(bc)^n+(ca)^n$ делится на $(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2$ при любом натуральном n, дающем при делении на 3 остаток 2.

Введем обозначения: $A_n = a^n+b^n+c^n$, $B_n = (ab)^n + (bc)^n + (ca)^n$, $s_n = (x+y)^n + (-x)^n + (-y)^n$, где $n \in \boldsymbol{N}$.

Лемма 1. Многочлен s_n делится на x^2+xy+y^2 (делимость s_n на многочлен $P(x, y)$ здесь и ниже означает, что при любых $x, y \in \boldsymbol{Z}$ имеем $s_n = P(x, y)\,l(x, y)$, где $l \in \boldsymbol{Z}$) в точности если n не делится на 3.

Доказательство. Имеем $s_1 \vdots x^2+xy+y^2$, $s_2 \vdots x^2+xy+y^2$. Отсюда вследствие легко доказываемого тождества

$$s_{n+3} = \left(x^2+xy+y^2\right)s_{n+1} + xy(x+y)s_n, \text{ где } n \in \boldsymbol{N}, \qquad (*)$$

следует, что $s_n \vdots x^2+xy+y^2$ при любом n, не делящемся на 3.

Предположим, что существует такое n, что n делится на 3 и s_n делится на x^2+xy+y^2. Тогда вследствие ($*$) $s_3 = 3xy(x+y)$ делится на x^2+xy+y^2. Полагая $x = 1$, $y = 2$, получаем противоречие.

Лемма 2. Если n при делении на 3 дает в остатке единицу, то s_n делится на $\left(x^2+xy+y^2\right)^2$.

Доказательство проводится с помощью тождества ($*$) и леммы 1.

(Заметим, что лемма 2 дает точное условие. Это легко доказать с помощью производной и комплексных чисел. Таким же образом доказывается, что s_n делится на $\left(x^2+xy+y^2\right)^3$ лишь при $n = 1$.)

б) Положим в лемме 2 $x = a$, $y = b$. Так как $A_4 = \frac{A_2^2}{2}$, а $A_2^2 = 4\left(a^2+ab+b^2\right)^2$, то A_n делится на $\frac{A_4}{2}$. Обозначим $d = \text{НОД}(|a|,|b|,|c|) \equiv (|a|,|b|,|c|)$, и пусть число 2 входит в разложение d в степени α. Тогда в A_4 двойка входит в степени $4\alpha+1$, а в A_n при $n \ge 4$ – в степени $\beta \ge n\alpha+1 \ge 4\alpha+1$. Окончательно: A_n делится на A_4.

в) Из леммы 1 следует, что при любом $k \ge 0$ число A_{3k+2} делится на A_2, откуда $A_{3k+2}^2 = A_{6k+4} + 2B_{3k+2}$ делится на $A_2^2 = 2A_4$. Из пункта б) следует, что A_{6k+4} делится на A_4. Значит, $2B_{3k+2}$ делится на $A_4 = 2B_2$, откуда B_{3k+2} делится на B_2.

а) Дадим непосредственное доказательство этого частного случая утверждения пункта в). Имеем

$$\left((ab)^2+\ldots\right)\left((ab)^3+\ldots\right) = \left((ab)^5+\ldots\right) + a^2b^2c^2\left(a\left(b^3+c^3\right)+\ldots\right).$$

Далее,

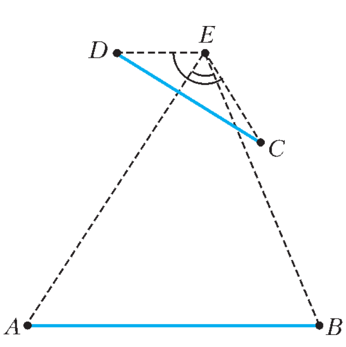
$$a\left(b^3+c^3\right)+\ldots = a(-a)\left(b^2-bc+c^2\right)+\ldots = \left(-a^2\left(b^2+c^2\right)-\ldots\right)+abc(a+\ldots).$$

Поскольку сумма в последних скобках равна нулю, делимость доказана.

Из этого простого рассуждения и родились постепенно все пункты задачи М2023.

В.Произволов, В.Сендеров

М2024. *Существует ли выпуклый многоугольник, в котором каждая сторона равна какой-то диагонали, а каждая диагональ равна какой-то стороне?*



Ответ: нет.

Предположим противное, и пусть AB – наибольшая сторона многоугольника, CD – наименьшая диагональ, E – такая вершина, что точка E и отрезок AB лежат по разные стороны от прямой CD (см. рисунок). Так как $AE \le AB$ и $BE \le AB$, то $\angle AEB \ge 60°$. С другой стороны, так как $DE \ge CD$ и $CE \ge CD$, то $\angle CED \le 60°$. Противоречие.

Б.Френкин

М2025*. *Натуральные числа a, b, c, d образуют возрастающую арифметическую прогрессию.*

а) Докажите, что для любого нечетного n произведение $abcd$ может оказаться n-й степенью натурального числа.

б) Докажите, что произведение $abcd$ не может быть квадратом натурального числа.

а) Пусть t нечетно. Будем искать прогрессию в виде $1\cdot 2^x\cdot 3^y$, $2\cdot 2^x\cdot 3^y$, $3\cdot 2^x\cdot 3^y$, $4\cdot 2^x\cdot 3^y$. Найдем $y \ge 0$ такое, что $4y+1 \,\vdots\, t$. Для этого достаточно положить $y = \frac{1}{4}(t-1)$ при $t \equiv 1 \pmod 4$ и $y = \frac{1}{4}(3t-1)$ при $t \equiv 3 \pmod 4$.

Далее можно взять $x = 3y$.

б) Без ограничения общности будем считать, что члены прогрессии взаимно просты в совокупности: $\text{НОД}(a,b,c,d) \equiv (a,b,c,d) = 1$.

Нетрудно показать, что каждую арифметическую прогрессию, удовлетворяющую условиям пункта б), можно представить в одном из следующих видов:

÷ x^2, y^2, z^2, t^2

÷ $3x^2$, $2y^2$, z^2, $6t^2$

÷ $6x^2$, y^2, $2z^2$, $3t^2$,

где $x, y, z, t \in \boldsymbol{N}$.

Рассмотрим первый случай. Из системы

$$\begin{cases} 2y^2 = x^2+z^2, \\ 2z^2 = y^2+t^2 \end{cases}$$

имеем

$$2(yt)^2 - 2(xz)^2 = z^2t^2 - x^2y^2,$$

откуда

$$\left(2\left(u^2-v^2\right)\right)^2 + 4u^2v^2 = \left(z^2t^2+x^2y^2\right)^2,$$

где $u = yt$, $v = xz$. Получаем

$$u^4 - u^2v^2 + v^4 = B^2, \text{ где } u, v, B \in \boldsymbol{N},\ u \ne v. \qquad (1)$$

Рассмотрим второй случай. Из системы

$$\begin{cases} 3x^2+z^2 = 4y^2, \\ y^2+3t^2 = z^2 \end{cases}$$

имеем $x^2+t^2 = y^2$. Так как $(a,b,c,d) = 1$, то число x нечетно, $(x, y) = 1$. Отсюда

$$(y+t, y-t) = 1,\ y+t = u^2,\ y-t = v^2,$$

где $u, v \in \boldsymbol{N}$. Переписав второе равенство системы в виде

$$(y+t)^2 - (y+t)(y-t) + (y-t)^2 = z^2$$

и сделав замену, мы опять приходим к (1).

Третий случай аналогичен второму.

Докажем, что (1) невозможно.

Латинскими буквами мы будем обозначать в доказательстве натуральные числа.

Без ограничения общности будем считать $u > v$, $(u, v) = 1$. Перепишем (1) в виде

$$\left(u^2 - v^2\right)^2 + (uv)^2 = B^2 . \qquad (2)$$

Пусть u, v – нечетные числа. Поскольку $\left(u^2 - v^2, uv\right) = 1$, существуют m и n такие, что $(m, n) = 1$, m и n – разной четности, $u^2 - v^2 = 2mn$, $uv = m^2 - n^2$. Получаем

$$m^4 - m^2n^2 + n^4 = \left(m^2 - n^2\right)^2 + (mn)^2 =$$
$$= (uv)^2 + \frac{\left(u^2 - v^2\right)^2}{4} = \left(\frac{u^2 + v^2}{2}\right)^2 .$$

Мы получили равенство вида (2), в левой части которого стоят числа разной четности m и n.

Пусть u, v – числа разной четности. Будем считать, что u нечетно (случай нечетного v аналогичен). Существуют m и n такие, что $(m, n) = 1$, m и n – разной четности, $u^2 - v^2 = m^2 - n^2$, $uv = 2mn$. При этом m нечетно, поскольку в противном случае было бы $1 \equiv u^2 \equiv -n^2 \equiv -1 \pmod 4$. Обозначив $v_0 = \frac{v}{2}$, получаем $uv_0 = mn$. Из этого равенства легко вывести, что существуют a, b, c, d такие, что $u = ac$, $v_0 = bd$, $m = ad$, $n = bc$. Поскольку $(u, v_0) = 1$, то $(a, b) = (c, d) = 1$. Из нечетности чисел u, m следует, что a, c, d нечетны. Значит, вследствие четности n, число b четно. Подставляя $u = ac$, $v = 2v_0 = 2bd$, $m = ad$, $n = bc$ в равенство $u^2 - v^2 = m^2 - n^2$, получаем

$$\left(a^2 + b^2\right)c^2 = \left(a^2 + 4b^2\right)d^2 .$$

Обозначим $l = \left(a^2 + b^2, a^2 + 4b^2\right)$. Поскольку $3a^2 \vdots l$, $3b^2 \vdots l$, $(a, b) = 1$, то $3 \vdots l$. При $l = 3$ было бы $a^2 + b^2 \vdots 3$, откуда $a \vdots 3$, $b \vdots 3$ – в противоречии с $(a, b) = 1$. Получили $l = 1$. Отсюда $d^2 \vdots a^2 + b^2$, $c^2 \vdots a^2 + 4b^2$. Далее, поскольку $(c, d) = 1$, то $a^2 + b^2 \vdots d^2$, $a^2 + 4b^2 \vdots c^2$. Следовательно, $a^2 + b^2 = d^2$, $a^2 + (2b)^2 = c^2$. Поскольку $(a, b) = 1$, a нечетно, то $(a, 2b) = 1$. Значит, существуют u_1 и v_1 такие, что $(u_1, v_1) = 1$, u_1 и v_1 – числа разной четности, $a = u_1^2 - v_1^2$, $b = u_1v_1$. Подставляя последние два равенства в $a^2 + b^2 = d^2$, получаем $u_1^4 - u_1^2v_1^2 + v_1^4 = d^2$. При этом $u_1v_1 = b < 2bd = v \le uv$, откуда $u_1v_1 < uv$.

Таким образом, утверждение доказано методом спуска.

Замечания

1. Ясно, что утверждение пункта б) справедливо и для прогрессий с рациональными (но уже не обязательно целыми) положительными членами. Однако на прогрессии с произвольными целыми (не обязательно положительными) членами это утверждение распространить нельзя. Это показывает пример прогрессий вида $-m$, $-n$, n, m, где $n \in \boldsymbol{N}$.

2. Результат пункта б) – обобщение теоремы Ферма, по которой *не существует четырех различных квадратов натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию.*

Рассмотрим вопрос о непостоянных арифметических прогрессиях вида a^2, b^2, c^2, где $a, b, c \in \boldsymbol{N}$, $(a, b, c) = 1$. Легко показать, что таких прогрессий (и даже прогрессий вида a^2, b^4, c^2) бесконечно много (оба утверждения доказываются почти одинаково). Бесконечно много и прогрессий вида a^4, b^2, c^2, уже в случае $a = 1$.

Существует и прогрессия a^4, b^4, c^2: при $a = 1$, $b = 13$, $c = 239$. Можно доказать, что и таких прогрессий бесконечно много (по этому поводу см., например, книгу В.Серпинского «О решении уравнений в целых числах», с.69–71, www.math.ru). Однако прогрессий вида a^4, b^2, c^4 не существует, это тоже доказывается методом спуска. В частности, не существует прогрессий a^4, b^4, c^4.

3. Рассмотрим арифметическую прогрессию a, b, c из различных натуральных чисел. Тем же способом, что и выше, легко доказать, что произведение abc может оказаться любой натуральной степенью, не кратной 3. Наметим доказательство того, что равенство $abc = e^3$ выполняться не может.

Пусть оно выполняется. Представим прогрессию в одном из трех видов:

$$\div \quad x^3, \quad y^3, \quad z^3$$
$$\div \quad 2x^3, \quad y^3, \quad 4z^3$$
$$\div \quad 4x^3, \quad y^3, \quad 2z^3,$$

где $x, y, z \in \boldsymbol{N}$.

В первом случае имеем $x^3 + z^3 = 2y^3$, во втором $x^3 + 2z^3 = y^3$ (третий случай аналогичен второму). Однако доказано, что первое равенство выполняется лишь при $x = y = z$, второе – выполняться вообще не может. Это утверждение эквивалентно следующему.

Теорема. $2 = 1^3 + 1^3$ – единственное представление числа 2 в виде суммы кубов двух рациональных чисел.

Из этого глубокого и важного предложения легко получаются такие утверждения.

Следствие 1. Уравнение $x^3 + 1 = y^2$ имеет в натуральных числах единственное решение: $(2, 3)$.

Следствие 2. Ни при каком $n > 1$ сумма $1^3 + \ldots + n^3$ не является кубом натурального числа.

Следствие 3. Ни при каком $n > 1$ сумма $1^2 + \ldots + n^2$ не является кубом натурального числа.

Легко показать, что следствия 1 и 2 эквивалентны, и вывести следствие 3 из следствия 2.

Утверждение следствия 1 было хорошо известно школьникам уже в математических кружках около полувека назад. Широко распространено убеждение, что это утверждение не имеет элементарного доказательства. (Это убеждение отразилось, например, в российском издании ценной и содержательной книги Чарльза Тригга «Задачи с изюминкой».) Однако в действительности даже приведенная выше теорема имеет абсолютно элементарное (хотя достаточно сложное и весьма длинное) доказательство.

Отметим, что справедливо гораздо более общее, нежели следствие 1,

Предложение. Система чисел (3, 2, 2, 3) – единственное решение уравнения $x^y - z^t = 1$ в натуральных числах, больших 1.

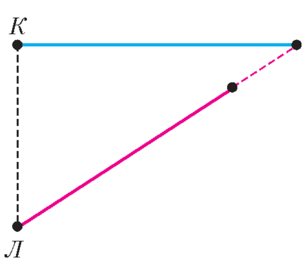
К обсуждению этой глубоко нетривиальной теоремы мы намерены вскоре вернуться в нашем журнале.

Возвращаясь к следствиям 2 и 3, отметим, что уравнение в натуральных числах $1^2 + \ldots + x^2 = y^2$ имеет ровно два решения: $(1, 1)$ и $(24, 70)$. Известны различные доказательства этого факта. Однако все они неэлементарны.

С суммами же $1^3 + \ldots + n^3$ дело обстоит по-другому. Легко доказать, что любая такая сумма – точный квадрат; несколько сложнее – что среди таких сумм бесконечно много четвертых степеней. Если же вы докажете, что при $n > 1$ восьмых степеней среди таких сумм нет, – значит, вы хорошо поняли решение этой задачи (по-видимому, самой трудной задачи в «Задачнике «Кванта» по математике в 2006 году).

В.Сендеров

Ф2033. *По прямой дороге бежит кролик, его скорость постоянна и равна v = 2 м/с. Кролика замечает лиса – она находится в этот момент на расстоянии L = 40 м от дороги (кролик в этот момент также находится на расстоянии L от лисы). Лиса бросается в погоню, ее скорость равна по величине скорости кролика. На каком минимальном расстоянии от кролика лиса сможет оказаться через время t = 40 с после начала погони? Считать лису и кролика материальными точками.*



Кролик за 40 секунд убежит на 80 метров, именно в эту точку и должна бежать лиса (см. рисунок). Найдем расстояние между участниками забега:

$$l = \sqrt{40^2 + 80^2}\ \text{м} - 80\ \text{м} \approx 9{,}44\ \text{м}.$$

Ясно, что если у лисы времени будет побольше, то она сможет подобраться к кролику сколь угодно близко...

З.Рафаилов

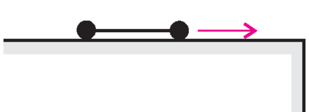


Рис. 1

Ф2034. *По гладкой горизонтальной поверхности подставки скользит маленькая гантелька, состоящая из очень тонкого легкого стерженька длиной 5 см и двух маленьких массивных шариков на концах (рис.1). Скорость гантельки направлена вдоль стержня и составляет 2 м/с. Соскользнув с края подставки, гантелька продолжает движение. Оцените число оборотов, которое она совершит, падая с высоты 30 м.*

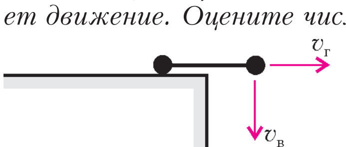


Рис. 2

«Передний» шарик гантельки проскочит край подставки и сразу начнет набирать вертикальную скорость, направленную вниз, под действием силы тяжести (рис.2). За то малое время, пока к краю подъедет второй шарик, гантелька не успеет заметно повернуться, поэтому

$$v_в = g\tau = g\frac{L}{v_г} = 10 \cdot \frac{0{,}05}{2}\ \text{м/с} = 0{,}25\ \text{м/с}$$

(кстати, можно оценить и угол поворота гантельки за это время: $\alpha = 0{,}5 v_в \left(L/v_г\right)/L = 1/16$ рад $\approx 4°$). Угловая скорость вращения далее не изменяется, она составляет $\omega = v_в/L$, и за время падения с высоты H = 30 м гантелька повернется на угол

$$\varphi = \omega t = \frac{v_в}{L}\sqrt{\frac{2H}{g}} \approx 12{,}3\ \text{рад}.$$

Это почти 2 полных оборота.

А.Повторов

Ф2035. *Проводится расчет броска камня через тонкую вертикальную стенку. Расчет показал, что при бросании под углом 30° к горизонту минимальная скорость составляет 100 м/с, а при броске под углом 60° достаточно 40 м/с. Какой скорости может хватить, если разрешено подойти к стенке поближе? Бросок производят с поверхности земли.*

Запишем уравнение траектории, проходящей через верхнюю точку стены:

$$H = L\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{gL^2}{2v_0^2\cos^2\alpha},$$

где H – высота стены, L – расстояние от точки броска до нижней точки стены, v_0 – начальная скорость камня, α – угол броска. Мы бросаем оба раза из одной точки, находящейся на уровне поверхности земли, скорости и углы для этих случаев даны в условии задачи. Подставляя заданные значения, получаем простую систему уравнений

$$H = L\,\mathrm{tg}\,30° - \frac{10L^2}{2 \cdot 100^2\cos^2 30°},$$
$$H = L\,\mathrm{tg}\,60° - \frac{10L^2}{2 \cdot 40^2\cos^2 60°}.$$

Отсюда легко найти высоту стены: $H \approx 45$ м. Для такой стены скорость «ближнего» броска составляет примерно 30 м/с. Нет смысла считать точнее – данные в условии явно округлены.

З.Простов

Ф2036. *На гладкой горизонтальной поверхности находится узкая коробка длиной L = 0,2 м и массой M = 100 г, посредине коробки покоится маленький шарик массой m = 10 г. Коробке ударом придают скорость v = 10 см/с параллельно ее длинной стороне. Шарик может двигаться только вдоль коробки, ударяясь абсолютно упруго о ее торцы. Сколько ударов произойдет за первую минуту после начала движения коробки? Найдите смещение коробки за это время.*

Первый удар произойдет через 1 секунду. Заметим, что при абсолютно упругом лобовом ударе двух тел остается неизменной их относительная скорость (это легко доказать, а знать этот факт полезно, многие задачи становятся проще…). Тогда каждый следующий удар будет происходить через 2 секунды после предыдущего. За оставшиеся 59 секунд произойдет 29 ударов, и еще секунду будет «безударное» движение.

Найдем скорость коробки после первого удара, воспользовавшись законами сохранения импульса и энергии

$$mv = mu_1 + Mu_2 \text{ и } \frac{mv^2}{2} = \frac{mu_1^2}{2} + \frac{Mu_2^2}{2}.$$

Учтем, что $M = 10m$, тогда одно возможное значение скорости коробки будет $u_{21} = 2v/11$, второе – $u_{22} = 0$. После первого удара получается первое значение, после второго скорость должна измениться, но суммарные импульс и энергия системы остаются прежними, а возможные решения уравнений мы уже перечислили, поэтому коробка после второго удара остановится. Затем все снова повторится. За две секунды коробка проедет расстояние $u_2L/v = 2L/11 = 2/55$ м, следующие две секунды она не двигается. Тогда смещение коробки за минуту составит

$$l = \frac{2L}{11} \cdot 14 + \frac{L}{11} = \frac{29L}{11} \approx 0{,}5 \text{ м}.$$

А.Шариков

Ф2037. *В сосуде постоянного объема находится смесь гелия и кислорода. Смесь нагревают от 300 К до 400 К, при этом половина атомов гелия покидают сосуд через очень мелкие трещины в стенках, а давление газа остается прежним. Во сколько раз изменяется при этом плотность смеси? Моль кислорода имеет массу 32 г, моль гелия – 4 г.*

Это совсем простая задача. Пусть количества гелия и кислорода вначале равны ν_1 и ν_2 соответственно. Общее количество вещества в системе после нагрева должно составлять $0{,}5\nu_1 + \nu_2$. Поскольку давление газа не изменяется,

$$(\nu_1 + \nu_2)T_1 = (0{,}5\nu_1 + \nu_2)T_2,$$

откуда $\nu_1 = \nu_2$. Итак, количество атомов гелия вначале было равно количеству молекул кислорода. Объем смеси при нагревании не изменился, тогда отношение плотностей будет равно

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{0{,}5\mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_2}{\mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_2} = \frac{0{,}5 \cdot 4 + 32}{4 + 32} = \frac{17}{18}.$$

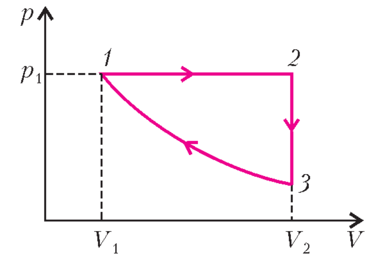
Г.Азов

Ф2038. *С порцией гелия производят циклический процесс – расширение газа при постоянном давлении, затем охлаждение газа при неизменном его объеме и, наконец, сжатие газа без подвода тепла снаружи до начального давления. Может ли термодинамический КПД такого цикла оказаться больше 50%?*

Работа в цикле равна (см. рисунок)

$$A = p_1(V_2 - V_1) - A_1,$$

где A_1 – работа газа при адиабатическом расширении от V_1 до V_2 (газ в данном процессе адиабатически сжимается, поэтому соответствующее слагаемое берется со знаком «минус»).



Тепло газ получает только на участке изобарического расширения. Гелий – одноатомный газ, поэтому полученное на изобаре количество теплоты составляет

$$Q = \nu C_p \Delta T = \frac{C_p p_1 \Delta V}{R} = 2{,}5p_1(V_2 - V_1),$$

где $C_p = 2{,}5R$ – молярная теплоемкость одноатомного газа при постоянном давлении.

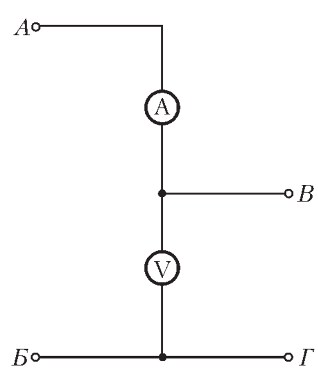
Термодинамический КПД данного цикла

$$\eta = \frac{A}{Q} = \frac{p_1(V_2 - V_1) - A_1}{2{,}5p_1(V_2 - V_1)} \le \frac{1}{2{,}5} = 0{,}4$$

и, тем более, меньше 50%.

А.Зильберман

Ф2039. *Стрелочные вольтметры высокого класса точности имеют, как правило, очень низкое сопротивление, и включать их в цепь для измерения напряжения во многих случаях просто недопустимо – слишком сильно при этом изменится режим схемы (напряжение между исследуемыми точками при подключенном вольтметре станет совсем другим). Для измерения напряжений порядка 5 В предлагается использовать схему, состоящую из точного вольтметра V – предел измерений 10 В, сопротивление прибора 1000 Ом, класс точности 0,2, т.е. погрешность не превосходит 0,2% от максимального значения шкалы, и микроамперметра A – ток полного отклонения 100 мкА, сопротивление прибора 1000 Ом, класс точности 2,5, т.е. погрешность не превышает 2,5% от максимального значения его шкалы. К точкам А и Б схемы (см. рисунок) подключают измеряемое напряжение, между точками В и Г включают регулируемый источник напряжения – лабораторный блок питания, напряжение которого можно очень плавно изменять в широких пределах. При измерении напряжение источника плавно изменяют, добиваясь минимального тока через микроамперметр. За результат принимают показание вольтметра при «нулевом» токе через микроамперметр. Будем считать, что минимальный ток, уверенно фиксируемый микроамперметром, составляет 2 мкА. Определите погрешность измерений получившегося «вольтметра» и его сопротивление.*

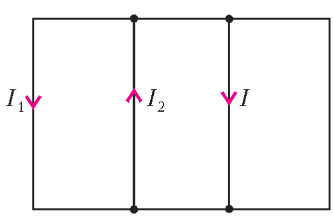


Погрешность измерения напряжения складывается из неточности вольтметра и неточности определения «балансa» напряжений. Первая погрешность составляет 0,2% от максимального значения шкалы вольтметра, т.е. 0,02 В, вторая равна произведению сопротивления микроамперметра и минимального тока через него, который мы можем зафиксировать, т.е. 10^3 Ом $\cdot 2 \cdot 10^{-6}$ А $= 0{,}002$ В, что на порядок меньше первого вклада в погрешность измерений. Погрешность микроамперметра на результат не влияет – микроамперметр вообще мог бы иметь только одно «нулевое» значение на шкале. Всего получается погрешность не более 0,022 В, что составляет примерно 0,2% от максимального значения шкалы прибора, – в результате мы практически реализуем класс точности нашего вольтметра, т.е. 0,2%. «Входной» ток нашего вольтметра не превышает 2 мкА, поэтому сопротивление получается равным $5\ \text{В}/\left(2\cdot 10^{-6}\ \text{А}\right) = 2{,}5\cdot 10^6$ Ом, что во много раз превышает сопротивление обычных «стрелочных» вольтметров на данное значение измеряемого напряжения! При таком способе измерений удается объединить точность прибора (вольтметра) и высокую чувствительность микроамперметра.

З.Хитров

Ф2040. *Параллельно включены катушки с индуктивностями 1 Гн и 2 Гн, резистор сопротивлением 100 Ом и конденсатор емкостью 100 мкФ. К цепи подключают внешний источник напряжения, и после нескольких переключений элементов в некоторый момент через катушки протекают равные по величине токи 0,2 А, а через резистор в этот момент течет ток 0,1 А. Затем внешний источник отключают, предоставляя параллельную цепь самой себе. Найдите полный заряд, который после этого протечет через резистор, а также полное количество теплоты, которое выделится в резисторе. Элементы цепи считать идеальными.*

Обозначим направления и величины токов на «скелете» цепи в начальный момент (см. рисунок): I_1 – через катушку индуктивностью $2L = 2$ Гн, I_2 – через катушку индуктивностью L и I – через резистор сопротивлением $R = 100$ Ом. Начиная с этого момента ЭДС индукции катушек все время одинаковы, а значит, и изменения магнитного потока катушек равны друг другу. Тогда при токе J через катушку индуктивностью $2L$ ток через катушку индуктивностью L будет равен (направления токов-стрелок оставим прежними) $2I_1 + I_2 - 2J$, и через большое время этот ток станет равным J (к этому времени конденсатор будет окончательно разряжен и ток через резистор упадет до нуля). Отсюда $J = (2I_1 + I_2)/3$.



В условии задачи не сказано, куда текут начальные токи. Очевидно, что нужно рассмотреть два случая – токи направлены в одну сторону $(I_1 = -I_2)$ и в разные стороны $(I_1 = I_2)$. При этом направление тока через резистор для нас несущественно. Тогда в первом случае $J = I_1/3$, во втором случае $J = I_1$, т.е. токи через катушки после длительных изменений вернутся к начальным значениям.

Теперь можно закончить решение задачи. В любой момент времени ЭДС индукции любой из катушек равна напряжению на резисторе, т.е.

$$2L\Delta I_1 = RI\Delta t = R\Delta q_R .$$

При суммировании получится в левой части $2L\left(J - I_1\right)$, в правой части Rq_R. Окончательно, для первого случая прошедший через резистор заряд будет равен

$$\left|q_R\right| = \frac{4LI_1}{3R} = 2{,}67\cdot 10^{-3}\ \text{Кл},$$

для второго случая заряд получится нулевым.

Баланс энергий для первого случая дает количество теплоты

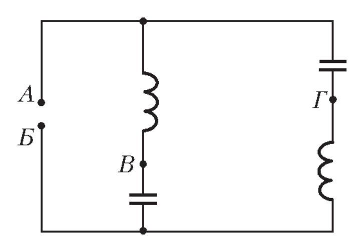
$$W_1 = \frac{4LI_1^2}{3} + \frac{CI^2R^2}{2} = 0{,}0583\ \text{Дж}.$$

Для второго случая энергии катушек в начальный момент и в конце одинаковы, остается только второе слагаемое, т.е.

$$W_2 = \frac{CI^2R^2}{2} = 0{,}005\ \text{Дж}.$$

А.Старов

Ф2041. *Источник переменного напряжения включен между точками А и Б цепи (см. рисунок). При какой частоте источника амплитуда напряжения, измеренного между точками В и Г, будет ровно в 10 раз больше амплитуды напряжения источника? Конденсаторы имеют емкости C = 10 мкФ, катушки – индуктивности L = 1 Гн.*



Токи через первую и вторую LC-цепочки одинаковы, напряжения конденсатора и катушки в каждой цепочке противофазны. Отсюда следует, что напряжение между точками $В$ и $Г$ равно сумме модулей напряжений катушки и конденсатора, а между точками $А$ и $Б$ – их разности. Тогда

$$U_1 + U_2 = 10\left(U_1 - U_2\right),\ \text{или}\ 9U_1 = 11U_2 .$$

Если напряжение на катушке больше, чем на конденсаторе, то

$$9\omega L = \frac{11}{\omega C},$$

и для частоты получаем

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{11}{9LC}} = 349{,}6\ \text{с}^{-1},\ \text{или}\ f_1 = \frac{\omega}{2\pi} = 55{,}6\ \text{Гц}.$$

Но есть и вторая возможность, когда напряжение конденсатора больше по величине, чем напряжение катушки. В этом случае частота равна

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{9}{11LC}} = 286\ \text{с}^{-1},\ \text{или}\ f_2 = 45{,}5\ \text{Гц}.$$

В первом случае частота выше резонансной частоты последовательного LC-контура (она равна примерно 50,3 Гц), во втором случае – ниже.

Ф.Азов

Ф2042. *На гладкой горизонтальной поверхности находится груз массой $M = 2$ кг, к его боковым стенкам приклеены две одинаковые пружины жесткостью $k = 100$ Н/м каждая (рис.1). Одна из пружин прикреплена концом к стене, конец другой пружины мы перемещаем по горизонтали. Координата точки A при этом изменяется по закону $x = 0{,}02\cos 20t$ (в этой формуле время t измеряется в секундах, координата x – в метрах). Найдите амплитуду колебаний груза на этой частоте.*

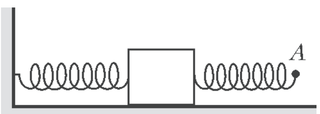


Рис. 1

Установившиеся колебания груза происходят с частотой вынуждающей силы $\omega = 20\ \text{с}^{-1}$, на груз действует сила $k(x - y) - ky$ (рис.2), ускорение груза определяется этой силой. Для упрощения вычислений полагаем длины пружин в недеформированном положении равными нулю – выражения получаются попроще, а дополнительные силы, постоянные по величине, на колебания с частотой ω влияния не оказывают. Координата груза $y(t)$ определяется из уравнения

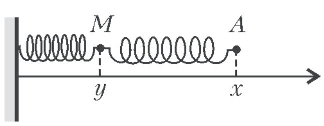


Рис. 2

$$My'' = -2ky + kx\,.$$

Если записать $y = A_0\cos(\omega t + \varphi)$, то получим

$$-MA_0\omega^2\cos(\omega t + \varphi) + 2kA_0\cos(\omega t + \varphi) = 0{,}02k\cos\omega t\,.$$

Для нахождения сдвига фаз – угла φ – рассмотрим момент времени t_1, для которого $\omega t_1 = \pi/2$. Если частота отлична от резонансной, то получаем $\sin\varphi = 0$. Возьмем $\varphi = 0$. Тогда амплитуда колебаний груза будет равна

$$A_0 = \frac{0{,}02k}{2k - M\omega^2} = -0{,}0033\ \text{м}\,.$$

Амплитуда на данной частоте получилась отрицательной – колебания груза противофазны колебаниям точки A. Можно получить «нормальную», положительную амплитуду колебаний, если немного вернуться назад и взять значение $\varphi = \pi$. Для меньшей частоты (ниже резонансной) колебания груза будут происходить в фазе с вынуждающими колебаниями конца пружины.

М.Учителев

Победители конкурса

«Задачник «Кванта»

2006 года

Первое место заняли

по математике

Нижибицкий Евгений – г. Краснодар, школа 73;

по физике

Пех Павел – г. Красноярск, школа 145,

Пастухов Владимир –

п. Красное-на-Волге Костромской обл., школа.

Второе место заняли

по математике

Балай Евгений – Киргизия, г. Бишкек, ФМЛ;

по физике

Фея Олег – Украина, г. Днепродзержинск, лицей 1,

Абдрахманов Владимир – г. Волгоград, лицей 3.

Третье место заняли

по математике

Есин Алексей – ст. Старонижестеблиевская Краснодарского кр., школа 55,

Каровски Сергей – Старый Оскол, школа 22;

по физике

Василевич Владимир – г. Армавир, школа 9,

Трегубов Илья – г. Армавир, школа 9.

Победители, занявшие первые места по математике и физике, награждаются комплектами журнала "Квант" за второе полугодие 2007 года.