

значит, по лемме 2, найдется такая линейная функция $f(x)$, что $f(t_i) = P(t_i)$ для всех $i = 1, 2, \dots, n + 1$. Но отсюда следует, что многочлен $P(x) - f(x)$ степени n имеет $n + 1$ корней t_1, t_2, \dots, t_{n+1} – противоречие.

6 (Р.Девятков). В решении будет использовано понятие суммы Минковского двух выпуклых многоугольников и неравенство Брунна–Минковского (см., например, статью Н.Васильева «Сложение фигур» в «Кванте» № 4 за 1976 г.).

Пусть граница многоугольника P (при обходе против часовой стрелки) составлена из векторов $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n$. Допустим, что при проектировании на прямую l_1 , перпендикулярную \vec{p}_1 , многоугольник P перейдет в отрезок длины h_1 . Ясно, что h_1 равно полусумме длин проекций векторов $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n$ на прямую l_1 (рис.4) и $\frac{p_1 h_1}{2}$ – площадь, сопоставленная стороне p_1 .

Пусть P' – многоугольник, полученный из P центральной симметрией; его граница (при обходе против часовой стрелки) составлена из векторов $\vec{p}'_1 = -\vec{p}_1, \vec{p}'_2 = -\vec{p}_2, \dots, \vec{p}'_n = -\vec{p}_n$. Рассмотрим сумму Минковского Q многоугольников P и P' , т.е. многоугольник, граница которого составлена из векторов $\vec{p}_1, \vec{p}'_1, \vec{p}_2, \vec{p}'_2, \dots, \vec{p}_n, \vec{p}'_n$, взятых в таком порядке, чтобы Q оказался выпуклым. В многоугольнике Q стороне \vec{p}_1 (или стороне \vec{p}'_1) сопоставлена площадь $\frac{p_1 H_1}{2}$, где H_1 равно полусумме длин проекций векторов $\vec{p}_1, \vec{p}'_1, \vec{p}_2, \vec{p}'_2, \dots, \vec{p}_n, \vec{p}'_n$ на прямую l_1 , т.е. $H_1 = 2h_1$. Аналогично рассматривая все стороны, получаем, что сумма $A(P)$ площадей, соответствующих сторонам в многоугольнике P , четверо меньше, чем сумма $A(Q)$ площадей, соответствующих сторонам в многоугольнике Q :

$$A(Q) = \frac{p_1 H_1}{2} + \frac{p'_1 H_1}{2} + \frac{p_2 H_2}{2} + \frac{p'_2 H_2}{2} + \dots \\ \dots + \frac{p_n H_n}{2} + \frac{p'_n H_n}{2} = 2p_1 h_1 + 2p_2 h_2 + \dots + 2p_n h_n = 4A(P).$$

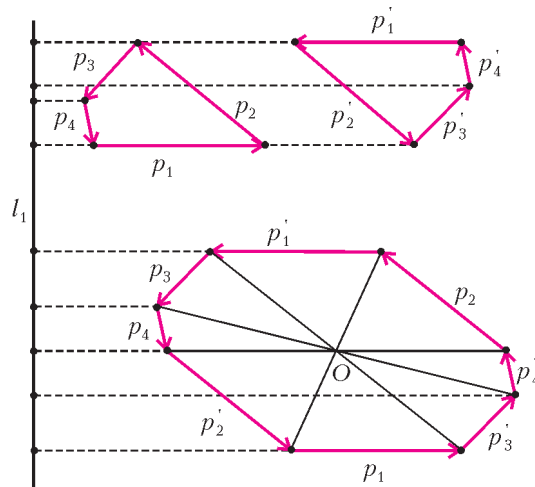


Рис. 4

Многоугольник Q имеет центр симметрии O . Соединив O с вершинами, разобьем Q на треугольники. Из симметрии следует, что высота в треугольнике, отвечающем стороне p_1 (или p'_1), равна $\frac{H_1}{2}$. Складывая площади всех треугольников, получаем, что площадь $S(Q)$ многоугольника Q равна

$$\frac{p_1 H_1}{2} + \frac{p'_1 H_1}{2} + \frac{p_2 H_2}{2} + \frac{p'_2 H_2}{2} + \dots + \frac{p_n H_n}{2} + \frac{p'_n H_n}{2} = \frac{A(Q)}{2}.$$

Для завершения решения достаточно установить, что $S(Q) \geq 4S(P)$. Но это неравенство получается из применения к P и P' неравенства Брунна–Минковского: если два выпуклых многоугольника имеют площади S_1 и S_2 , а их сумма Минковского имеет площадь S , то $\sqrt{S} \geq \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}$.

Публикацию подготовили
Н.Агаханов, П.Кожевников, Д.Терёшин

XXXVII Международная физическая олимпиада

Очередная международная олимпиада школьников по физике проходила в Сингапуре с 8 по 17 июля 2006 года. Основные события разворачивались на территории Наньянского университета, точнее сказать – целого комплекса университетов и колледжей, по площади соответствующего небольшому городу. В олимпиаде участвовали 388 школьников из 85 стран, и еще 3 страны прислали своих представителей.

В сборную России вошли:

Евгений Богер – Киров, ФМЛ (учителя физики: П.Е.Канин – Кировский ФМЛ и М.В.Гырдымов – Центр дополнительного образования «Одаренный школьник»),

Сергей Зоркин – Иркутск, лицей ИрГУ (учителя физики – Э.Г.Аман),

Павел Мостовых – Санкт-Петербург, школа 306 (учителя физики: И.А.Барыгин – ФТИ им. А.Ф.Иоффе и Е.М.Степаненко – школа 306),

Антон Попов – Челябинск, лицей 31 (учитель физики – И.А.Иоголевич),

Александр Киселев – Москва, школа 1189 им. И.В. Курчатова (учитель физики – С.В.Толоконников).

Команду России возглавили профессор МФТИ С.М.Козел и доцент МФТИ В.П.Слободянин. В качестве наблюдателя от России (прибывшего на олимпиаду за счет поддержки спонсоров) присутствовал учитель физики Челябинского лицея 31 И.А.Иоголевич. Как и в предыдущие годы, подготовка сборной команды России проводилась на базе Московского физико-технического института.

Состязавшимся на олимпиаде были предложены три теоретических задания, каждое из которых оценивалось в 10 баллов, и одно экспериментальное – 20 баллов. Как теоретические, так и экспериментальное задания были достаточно трудными и громоздкими.

По итогам соревнований золотые медали получили 37

участников, серебряные – 49 и бронзовые – 82 участника олимпиады.

Сравнительные результаты выступления на олимпиаде 14 лучших команд (по количеству и «качеству» медалей) приведены в таблице:

N	Страна	Золотых медалей	Серебряных медалей	Бронзовых медалей
1.	Китай	5		
2.	США	4	1	
3.	Индонезия	4	1	
4.	Корея	4	1	
5.	Россия	2	3	
6.	Венгрия	1	4	
7.	Иран	1	4	
8.	Таиланд	1	4	
9.	Тайвань	3	1	1
10.	Германия	2	1	2
11.	Индия	2		3
12.	Азербайджан	1	3	1
13.	Румыния	1	2	2
14.	Сингапур	1	1	3

Члены сборной команды России показали следующие результаты:

Участник	Теория (30 баллов)	Эксперимент (20 баллов)	Сумма баллов (50)	Медаль
Зоркин Сергей	22,90	15,25	38,15	золото
Киселев Александр	27,30	10,15	37,45	золото
Богер Евгений	23,60	10,40	34,00	серебро
Попов Антон	19,50	12,00	31,50	серебро
Мостовых Павел	20,80	9,80	30,60	серебро

Условия теоретических заданий олимпиады приведены ниже. Здесь же кратко расскажем об экспериментальном туре, на котором за 5 часов участникам предлагалось выполнить комплексное задание, состоящее из четырех частей, объединенных общей тематикой. Используя оборудование СВЧ диапазона радиоволн с длиной волны порядка 3 см, необходимо было выполнить следующие упражнения: измерить длину волны с помощью радиоинтерферометра, аналогичного оптическому интерферометру Майкельсона; определить показатель преломления диэлектрика для радиоволн, используя явление интерференции в толстой плоскопараллельной диэлектрической пластине; исследовать явление туннелирования радиоволн через узкий зазор между двумя парафиновыми призмами при полном внутреннем отражении; исследовать явление интерференционного отражения радиоволн от пространственной решетки, состоящей из системы металлических проволок, образующих двумерную решетку, и определить постоянную решетки.

Физическое содержание предложенного эксперимента заслуживает самой высокой оценки, однако объем экспериментального задания оказался за пределами. Каждая из четырех частей эксперимента могла бы служить основой для хорошего самостоятельного экспериментального задания. В результате ни один участник олимпиады не смог выполнить эксперимент до конца.

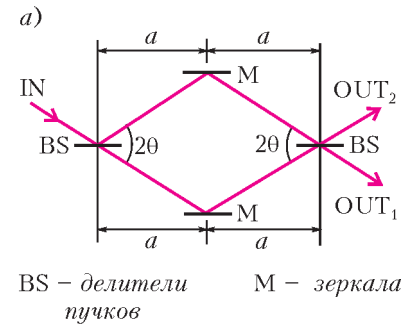
ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

Задача 1. Гравитация в нейтронном интерферометре

Описание явления. Мы рассматриваем известный эксперимент с нейтронным интерферометром в идеализированном

упрощенном варианте, в рамках которого обсужаются идеальные делители пучков нейтронов и нейтронные зеркала, расположенные внутри интерферометра. В этом эксперименте изучается влияние гравитации на волны де Бройля нейтронов.

Схема нейтронного интерферометра, который аналогичен оптическому интерферометру, показана на рисунке 1,а. Нейтроны попадают в интерферометр через вход «IN», следуют по двум возможным



BS – делители пучков M – зеркала

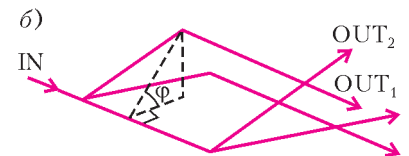


Рис. 1

путям и регистрируются в одном из двух выходных каналов «OUT₁» или «OUT₂». Два плеча интерферометра ограничивают область в форме ромба, площадь которого составляет несколько квадратных сантиметров.

Нейтронные волны де Бройля (с длиной волны порядка 10^{-10} м) интерферируют так, что при горизонтальном расположении интерферометра все нейтроны попадают в выходной канал «OUT₁». Интерферометр может поворачиваться на произвольный угол φ вокруг горизонтальной оси, совпадающей с направлением входного пучка (рис.1,б). При повороте интерферометра наблюдается перераспределение нейтронов между выходными каналами «OUT₁» и «OUT₂», которое периодически зависит от угла поворота φ .

Геометрия опыта. При $\varphi = 0$ плоскость интерферометра расположена горизонтально; при $\varphi = 90^\circ$ эта плоскость вертикальна, и выходы расположены над осью поворота.

1) Чему равна площадь ромба A , ограниченная плечами интерферометра? (1 балл)

2) Чему равна высота H выходного канала «OUT₁» над горизонтальной плоскостью, содержащей ось вращения? (1 б.)

Выразите A и H через величины a , θ и φ .

Относительная оптическая длина пути. Относительная оптическая длина пути $N_{\text{опт}}$ (число) определяется как отношение геометрической длины пути (расстояния) к длине волны λ . Если λ изменяется вдоль пути, то $N_{\text{опт}}$ получается интегрированием величины λ^{-1} по пути.

3) Найдите разность $\Delta N_{\text{опт}}$ относительных оптических длин путей плеч интерферометра при его повороте на угол φ . Выразите ответ через величины a , θ и φ , массу нейтрона M , де-бройлевскую длину волны нейтронов λ_0 , ускорение свободного падения g и постоянную Планка h . (3б.)

4) Введите объемный параметр $V = \frac{h^2}{gM^2}$ и выразите $\Delta N_{\text{опт}}$ через величины A , V , λ_0 и φ . Приведите численное значение параметра V при $M = 1,675 \cdot 10^{-27}$ кг, $g = 9,800$ м · с⁻² и $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ Дж · с. (1б.)

5) Сколько периодов изменения интенсивности потока нейтронов в выходном канале «OUT₁» – от максимальной до минимальной и обратно к максимальной – произойдет при изменении угла поворота φ от -90° до 90° ? (2б.)

Экспериментальные данные. В эксперименте использовался интерферометр со следующими параметрами: $a = 3,600$ см и $\theta = 22,10^\circ$, при этом наблюдалось 19,00 полных

периодов изменения интенсивности при изменении угла поворота в указанных выше пределах.

6) Чему равнялась величина λ_0 в этом эксперименте? (16.)

7) В другом аналогичном эксперименте с использованием нейтронов с де-бройлевской длиной волны $\lambda_0 = 0,2000$ нм наблюдалось 30,00 полных периодов. Чему равнялась площадь ромба A в этом случае? (16.)

Подсказка: если $|\alpha x| \ll 1$, то $(1+x)^\alpha$ можно заменить на $1 + \alpha x$.

Задача 2. Наблюдение за движущимся стержнем

Физическая модель. Отверстие камеры-обскуры находится в точке $x = 0$ на расстоянии D от оси x (рис.2). С помощью этой камеры получается изображение стержня путем открытия отверстия на очень маленький промежуток времени. Вдоль оси x на одинаковых расстояниях друг от друга нанесены метки. По ним на снимках, полученных с помощью камеры-обскуры, можно определить кажущуюся (видимую на снимке) длину стержня. На снимке длина покоящегося стержня равна L . Однако стержень не покоится, а движется с постоянной скоростью v вдоль оси x .

Общие соотношения. Пусть на изображении, полученном с помощью камеры-обскуры, бесконечно малый отрезок стержня находится в точке \tilde{x} .

1) Каково *реальное положение* данного отрезка на оси x в момент получения снимка? Ответ необходимо выразить через \tilde{x} , D , L , v и скорость света $c = 3,00 \cdot 10^8$ м/с. Вос-

пользуйтесь обозначениями $\beta = \frac{v}{c}$ и $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, если это позволяет упростить окончательный результат. (0,6 балла)

2) Найдите также обратное соотношение, т.е. выразите \tilde{x} через x , D , L , v и c . (0,9 б.)

Примечание: реальное положение – это положение в системе отсчета, в которой камера покоится.

Кажущаяся длина стержня. Камера-обскура фиксирует изображение в момент, когда реальное положение середины стержня на оси x соответствует точке x_0 .

3) Выразите кажущуюся (видимую на снимке) длину стержня через заданные в условии величины. (1,5 б.)

4) Как зависит кажущаяся длина стержня от времени? (1,5 б.)

Симметричный снимок. На одном из снимков, полученных с помощью камеры-обскуры, оба конца стержня расположены на одном и том же расстоянии от отверстия камеры.

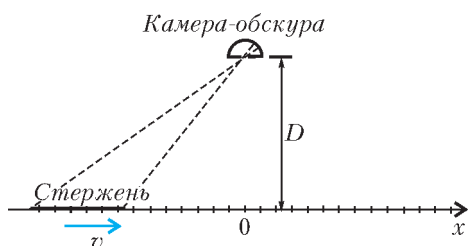


Рис. 2

5) Чему равна кажущаяся длина стержня на этом снимке? (0,8 б.)

6) Каково реальное положение середины стержня в момент, когда сделан этот снимок? (1 б.)

7) Где на этом снимке находится изображение середины стержня? (1,2 б.)

Очень ранний и очень поздний снимки. Один из снимков получен в ранний момент времени, когда стержень был очень далеко от камеры и приближался к ней. Второй снимок получен в поздний момент времени, когда стержень уже удалился на большое расстояние от камеры. На одном из

этих снимков длина стержня равна 1,00 м, на другом – 3,00 м.

8) Какая длина соответствует раннему и позднему снимкам? (0,5 б.)

9) Определите скорость стержня v . (1 б.)

10) Определите длину покоящегося стержня L . (0,6 б.)

11) Численно определите кажущуюся длину стержня на симметричном снимке (вопрос 5). (0,4 б.)

Задача 3

Это задание состоит из пяти независимых частей. Каждая из них требует не точного ответа, а только оценки по порядку величины.

Цифровая камера. Рассмотрим цифровую фотокамеру с квадратной матрицей со стороной $L = 35$ мм и разрешением $N_p = 5$ мегапикселей. Фокусное расстояние объектива камеры $f = 38$ мм. На объективе указывается одно из так называемых F -чисел (2; 2,8; 4; 5,6; 8; 11; 16; 22), которое обозначается $F_\#$ и определяется как отношение фокусного расстояния объектива к диаметру D его апертуры, т.е. $F_\# = f/D$.

1) Какое наилучшее пространственное разрешение Δx на матрице может быть достигнуто оптической системой данной камеры? Выразите ваш результат через длину волны света λ и число $F_\#$. Найдите числовое значение Δx для $\lambda = 500$ нм. (1 балл)

2) Для заданного размера матрицы найдите число мегапикселей матрицы, необходимое для достижения полученного значения наилучшего пространственного разрешения. (0,5 б.)

3) Иногда фотографы стараются использовать камеры с уменьшенным размером апертуры. Предположим, что мы располагаем камерой с $N_0 = 16$ мегапикселей и вышеуказанными размерами матрицы и фокусного расстояния объектива. Какое значение $F_\#$ следует выбрать, чтобы качество изображения не было ограничено оптикой камеры? (0,5 б.)

4) Известно, что человеческий глаз обладает угловым разрешением ϕ , приблизительно равным 2 угловым секундам, и что минимальное разрешение обычного принтера составляет 300 точек на дюйм. На каком минимальном расстоянии от глаза следует держать распечатанную на таком принтере фотографию, чтобы не различать отдельных точек? (0,5 б.)

Данные: 1 дюйм = 25,4 мм; 1 угловая секунда = $2,91 \cdot 10^{-4}$ рад.

Яйцо вкрутую. Яйцо, взятое непосредственно из холодильника при температуре $T_0 = 4$ °С, кладут в кастрюлю с кипящей водой с температурой T_1 . Температура воды все время поддерживается постоянной.

5) Какое количество энергии U необходимо затратить для того, чтобы яйцо сварилось? (0,5 б.)

6) Найдите поток тепла J , который протекает через поверхность яйца. (0,5 б.)

7) Найдите тепловую мощность P , передаваемую яйцу. (0,5 б.)

8) Как долго нужно варить яйцо для того, чтобы оно сварилось вкрутую? (0,5 б.)

Подсказка: вы можете использовать упрощенную форму закона Фурье: $J = \kappa \Delta T / \Delta r$, где ΔT – разность температур на расстоянии Δr , которое можно принять равным характерному линейному размеру в данной задаче; поток тепла J имеет размерность Вт · м⁻².

Данные: плотность $\rho = 10^3$ кг · м⁻³; удельная теплоемкость яйца $c = 4,2$ Дж · К⁻¹ · г⁻¹; радиус яйца $R = 2,5$ см; температура свертывания альбумена (яичного белка) $T_c = 65$ °С; коэффициент передачи тепла $\kappa = 0,64$ Вт · К⁻¹ · м⁻¹ (пред-

полагается одинаковым для жидкой и твердой фаз альбумина).

Молния. Предлагается рассмотреть простейшую модель молнии. Молния возникает за счет накопления электрических зарядов в облаках. При этом нижняя часть облака обычно заряжается положительно, а верхняя часть – отрицательно. Земля под облаком также заряжается отрицательно. Когда возникающее электрическое поле превышает значение, при котором происходит пробой воздуха, возникает

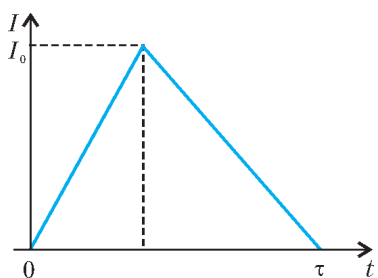


Рис. 3

электрический разряд, который и представляет собой молнию.

Ответьте на следующие вопросы, используя данную упрощенную зависимость силы тока I от времени t (рис.3; здесь $I_0 = 100$ кА, $\tau = 0,1$ мс). Расстояние между нижней частью облака и земной поверхностью $h = 1$ км; напряженность электрического поля, приводящая к пробую влажного воздуха, $E_0 = 300$ кВ · м⁻¹; полное число молний на Земле за год $32 \cdot 10^6$; население Земли $6,5 \cdot 10^9$ человек.

9) Какова величина полного заряда Q , протекающего при разряде молнии? (0,5 б.)

10) Какова средняя сила тока I , протекающего между нижней частью облака и земной поверхностью во время молнии? (0,5 б.)

11) Вообразим, что энергию всех молний, происходящих в год, можно накопить и равномерно распределить между всеми людьми, населяющими Землю. Сколько времени будет гореть лампочка мощностью 100 Вт, которую Вы включили, используя Вашу долю энергии? (1 б.)

12) Какова средняя сила тока I , протекающего между нижней частью облака и земной поверхностью во время молнии? (0,5 б.)

Капиллярные сосуды. Будем считать кровь несжимаемой вязкой жидкостью с плотностью ρ , близкой к плотности воды, и динамической вязкостью $\eta = 4,5$ г · м⁻¹ · с⁻¹. Смоделируем кровеносные сосуды прямыми цилиндрическими

трубками радиусом r и длиной L . Течение крови по сосудам описывается законом Пуазейля $\Delta p = RD$ – гидродинамическим аналогом закона Ома в электричестве. Здесь Δp – разность давлений на входе и на выходе кровеносного сосуда, $D = Sv$ – объем крови, протекающей за одну секунду через поперечное сечение кровеносного сосуда площадью S при скорости потока крови v , R – гидравлическое сопротивление, которое определяется формулой $R = \frac{8\eta L}{\pi r^4}$. Во время

соматической фазы циркуляции крови (от левого желудочка к правому предсердию) величина кровяного потока для спокойного состояния организма составляет $D \approx 100$ см³ · с⁻¹.

Ответьте на следующие вопросы, предполагая, что все капиллярные сосуды соединены параллельно, каждый из них имеет радиус $r = 4$ мкм и длину $L = 1$ мм, а приложенная разность давлений составляет $\Delta p = 1$ кПа.

12) Оцените количество капиллярных сосудов в теле человека. (1 б.)

13) С какой скоростью v кровь протекает через капилляры? (0,5 б.)

Небоскреб. У основания небоскреба высотой 1 км температура уличного воздуха равна $T_H = 30$ °С. Задача состоит в оценке температуры воздуха T_B у шпиля небоскреба. Рассмотрите тонкий слой воздуха (идеальный газ азот с показателем адиабаты $\gamma = 7/5$), который медленно поднимается до высоты z , где давление меньше, чем внизу. Предположите, что слой при подъеме расширяется адиабатически так, что его температура падает до температуры окружающего воздуха.

14) Как относительное изменение температуры dT/T зависит от относительного изменения давления dp/p ? (0,5 б.)

15) Выразите изменение давления dp через изменение высоты dz . (0,5 б.)

16) Какова температура у шпиля небоскреба? (1 б.)

Данные: постоянная Больцмана $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж · К⁻¹; масса молекулы азота $m = 4,65 \cdot 10^{-26}$ кг; ускорение свободного падения $g = 9,80$ м · с⁻².

Публикацию подготовили С.Козел, В.Слободянин

Московская городская олимпиада студентов по физике

II тур Всероссийской физической олимпиады среди студентов технических вузов прошел 21 мая 2006 года в Московском государственном техническом университете (МГТУ) им. Н.Э.Баумана.

По результатам соревнований первые пять команд приглашены для участия в III туре олимпиады. Это команда Московского института стали и сплавов (МИСиС), набравшая 80 баллов; команда МГТУ им. Н.Э.Баумана, набравшая 72 балла; команда Московского института электронной техники – 62 балла; команда Московского авиационного института – 51 балл; команда Российского университета нефти и газа им. И.М.Губкина – 50 баллов.

Победители в личном зачете: И.Ковтунов (МИСиС) – первое место; А.Бурцев (МГТУ им. Н.Э.Баумана) – второе место; А.Шатанов (МИСиС) – третье место.

ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ

1. Автомобиль движется змейкой вдоль оси x , при этом период змейки равен L , а амплитуда колебаний равна A . Определите максимальную среднюю скорость вдоль оси x , которую может достичь автомобиль, если коэффициент трения между дорогой и колесами автомобиля μ .

2. Цилиндрическое тело радиусом R и массой m стоит на гладкой горизонтальной поверхности, касаясь гладкой стенки таким образом, что ось цилиндра горизонтальна и параллельна стенке. В начальный момент времени центр тяжести тела, смещенный от оси цилиндра на расстояние $R/2$, находится в верхнем положении. Определите собственный момент инерции тела, если известно, что после потери равновесия и последующего абсолютно упругого удара о стенку тело начало двигаться строго поступательно.