Геометрические задачи на максимум и минимум

Э.ГОТМАН

Задачи на отыскание наибольших и наименьших значений геометрических величин еще в глубокой древности привлекали внимание крупнейших математиков. Так, Евклид, живший около 300 года до н.э., в VI книге своих знаменитых «Начал» показал, что из всех прямоугольников данного периметра наибольшую площадь имеет квадрат.

Задачи на максимум и минимум (или, короче, задачи на экстремум) часто возникают в повседневной жизни, в технике, экономике, естествознании. Для решения существуют различные элементарные приемы и методы. Некоторые планиметрические задачи изящно решаются с помощью геометрических преобразований: осевой симметрии, параллельного переноса, поворота вокруг точки; другие – решаются аналитически и сводятся к исследованию квадратной функции. Аппарат дифференциального исчисления дает общий, единообразный метод отыскания экстремальных значений функций, рассматриваемых в задачах. Тем не менее, при решении стереометрических задач иногда к цели можно прийти быстрее и более коротким путем, используя неравенства и тригонометрические функции.

Из школьного курса математики хорошо известно неравенство, связывающее среднее арифметическое и среднее геометрическое двух положительных чисел:

$$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}.$$

При решении ряда задач данной статьи может оказаться полезным неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим трех положительных чисел:

$$\sqrt[3]{abc} \le \frac{a+b+c}{3},$$

а также некоторые другие. Например, из очевидного неравенства

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \ge 0$$

вытекает цепочка неравенств:

$$ab + bc + ca \le \frac{1}{3}(a+b+c)^2 \le a^2 + b^2 + c^2,$$

где равенство достигается тогда и только тогда, когда $a = b = c$.

Чтобы убедится в справедливости неравенства

$$\sqrt[3]{abc} \le \frac{a+b+c}{3},$$

положим $a = x^3$, $b = y^3$, $c = z^3$. Тогда доказываемое неравенство приводится к виду

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \ge 0.$$

Многочлен, стоящий в левой части неравенства, разложим на множители:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y)^3 + z^3 - 3xy(x+y+z) =$$

$$= (x+y+z)\left(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx\right).$$

Из приведенного выше неравенства следует, что

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \ge 0.$$

Учитывая, что $x + y + z > 0$, получаем

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \ge 0.$$

Равенство здесь имеет место тогда и только тогда, когда $x = y = z$, что для исходного неравенства равносильно условию $a = b = c$.

Из неравенства $\sqrt[3]{abc} \le \frac{a+b+c}{3}$ следует, что если $a + b + c = k$, где k – постоянное число, то $abc \le \left(\frac{k}{3}\right)^3$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $a = b = c$. Другими словами, произведение нескольких (в приведенном случае – трех) положительных переменных сомножителей, сумма которых постоянна, имеет наибольшее значение при равенстве сомножителей.

Точно так же, сумма нескольких положительных переменных слагаемых, произведение которых постоянно, имеет наименьшее значение при равенстве слагаемых.

Пользуясь этими следствиями, можно получить экономные решения ряда геометрических задач на максимум и минимум.

Большинство стереометрических задач на отыскание наибольших и наименьших значений решаются аналитически. Обычно выбирают независимую переменную, обозначают ее через x, получают формулу, выражающую функцию, наибольшее или наименьшее значение которой требуется найти, и определяют границы изменения аргумента x. Полученная функция исследуется элементарными средствами или с помощью производной.

Приведем несколько примеров.

Задача 1. *Найдите длины сторон данного прямоугольника данного периметра 2p, при вращении которого вокруг одной из его сторон получится цилиндр наибольшего объема.*

Решение. Пусть прямоугольник $ABCD$ вращается вокруг стороны CD (рис.1). Согласно условию задачи, $AB + BC = p$. Введем независимую переменную $BC = x$. Тогда $AB = p - x$. Объем цилиндра, полученного при вращении прямоугольника вокруг стороны CD, выразится формулой

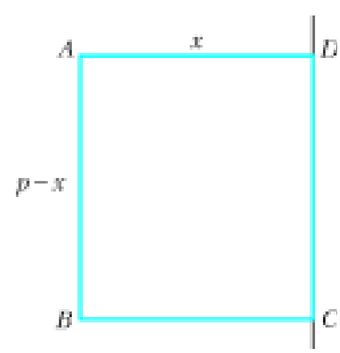

Рис. 1

$$V = \pi x^2 (p - x),\ 0 < x < p.$$

Наибольшее значение функции V можно найти без использования производной. Представим выражение V следующим образом:

$$V = \frac{1}{2}\pi x x (2p - 2x).$$

Так как сумма сомножителей, содержащих x, постоянна и равна $2p$, то из неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом вытекает, что их произведение будет наибольшим при $x = 2p - 2x$, т.е. при $x = \frac{2}{3}p$. Высота пирамиды при этом будет $\frac{1}{3}p$, а максимальный объем – $V = \frac{4\pi}{27}p^3$.

Задача 2. *В сферу радиуса R вписан конус. При какой высоте конуса его объем будет наибольшим?*

Решение. Обозначим через r и h соответственно радиус основания и высоту конуса. Осевое сечение конуса – равнобедренный треугольник ABN, вписанный в окружность, диаметр которой MN равен $2R$ (рис.2).

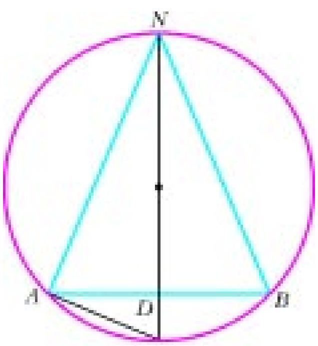

Рис. 2

Воспользуемся формулой объема конуса:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

За независимую переменную удобно принять высоту ND конуса. Пусть $DN = h$. Так как $\angle MAN = 90°$, то треугольник MAN прямоугольный, и в силу известной теоремы планиметрии сразу получаем

$$AD^2 = MD \cdot DN, \text{ или } r^2 = (2R - h)h.$$

Таким образом,

$$V = \frac{1}{3}\pi(2R - h)h^2, \quad 0 < h < 2R.$$

Рассмотрим произведение

$$(4R - 2h) \cdot h \cdot h.$$

Сумма положительных сомножителей постоянна и равна $4R$, значит, вследствие неравенства о средних, их произведение будет наибольшим при $h = 4R - 2h$, откуда $h = \frac{4}{3}R$.

Итак, при $h = \frac{4}{3}R$ объем конуса наибольший, причем, как легко подсчитать, он равен $V_{\max} = \frac{32}{27}\pi R^3$.

Задача 3. *Около шара радиуса r описан конус. При каком угле наклона его бокового ребра к плоскости основания боковая поверхность конуса будет наименьшей?*

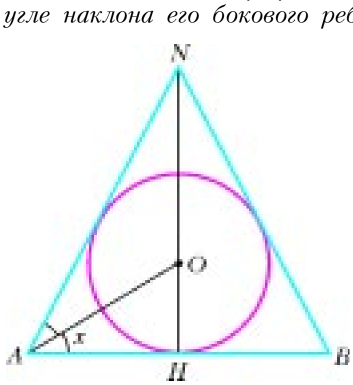

Рис. 3

Решение. Обозначим угол наклона образующей конуса к плоскости его основания через $2x$ (рис.3). Выразим площадь $S_б$ боковой поверхности через радиус шара r и x:

$$S_б = \frac{\pi r^2 \operatorname{ctg}^2 x}{\cos 2x}, \quad 0° < 2x < 90°.$$

Наименьшее значение функции $y = \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{\cos 2x}$ можно найти без применения производной. Выполнив несложные преобразования, получим

$$y = \frac{\cos^2 x}{\left(1 - \cos^2 x\right)\left(2\cos^2 x - 1\right)}.$$

Для краткости обозначим $\cos^2 x = z$, тогда выражение для y примет вид

$$y = \frac{1}{3 - \left(2z + \frac{1}{z}\right)}, \quad 0 < z < 1.$$

Применив теорему о среднем арифметическом и среднем геометрическом двух положительных чисел, получим

$$2z + \frac{1}{z} \geq 2\sqrt{2},$$

причем равенство имеет место только при $2z = \frac{1}{z}$, т.е. при $z = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Таким образом, $y_{\min} = \frac{1}{3 - 2\sqrt{2}} = 3 + 2\sqrt{2}$ при $z = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Следовательно, боковая поверхность конуса будет наименьшей при $2x = \arccos\left(\sqrt{2} - 1\right)$ и равной $\pi\left(3 + 2\sqrt{2}\right)r^2$.

При решении геометрических задач на экстремум независимую переменную часто можно выбрать разными способами. Но желательно это сделать так, чтобы более коротким путем получить выражение искомой функции и чтобы это выражение было по возможности более простым. Иногда в качестве независимого переменного удобно взять величину некоторого угла и для нахождения наибольшего или наименьшего значения функции пользоваться тригонометрическими формулами.

Задача 4. *В сферу радиуса R вписана правильная четырехугольная пирамида, плоский угол при вершине которой равен* γ. *Найдите площадь боковой поверхности пирамиды. При каком значении* γ *площадь будет наибольшей?*

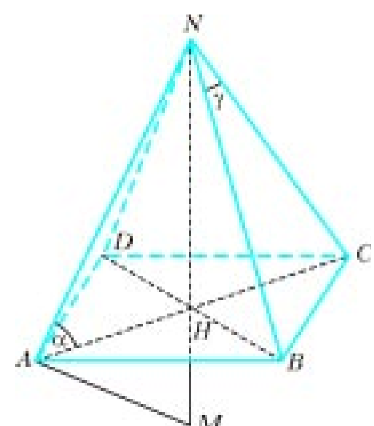

Рис. 4

Решение. Пусть $NABCD$ – правильная четырехугольная пирамида, вписанная в сферу (рис.4). Продолжим высоту NH пирамиды за точку H до встречи со сферой в точке M. Так как центр сферы лежит на прямой NH, то MN – диаметр сферы, $MN = 2R$ и $\angle MAN = 90°$.

Обозначим $AH = r$ и $\angle CAN = \alpha$. Тогда и $\angle AMN = \alpha$. Треугольник AMN прямоугольный и $AN = 2R\sin\alpha$, поэтому

$$S = 8R^2 \sin^2\alpha \sin\gamma.$$

Остается выразить $\sin\alpha$ через тригонометрическую функцию угла γ. Из прямоугольных треугольников BHN и KHN, где K – середина ребра BC, находим

$$BK = b\cos\alpha, \quad KH = b\sin\frac{\gamma}{2},$$

а так как $BH = \sqrt{2}KH$, то $\cos\alpha = \sqrt{2}\sin\frac{\gamma}{2}$.

Полученную выше формулу для S легко преобразовать следующим образом:

$$S = 8R^2\left(1 - \cos^2\alpha\right)\sin\gamma = 8R^2\left(1 - 2\sin^2\frac{\gamma}{2}\right)\sin\gamma = 8R^2\cos\gamma\sin\gamma,$$

и окончательно получим

$$S = 4R^2\sin 2\gamma.$$