LXIX Московская математическая олимпиада

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ПРАЗДНИК

6 класс

1. Доктор Айболит раздал четырем заболевшим зверям 2006 чудодейственных таблеток. Носорог получил на одну больше, чем крокодил, бегемот – на одну больше, чем носорог, а слон – на одну больше, чем бегемот. Сколько таблеток придется съесть слону?

А.Хачатурян

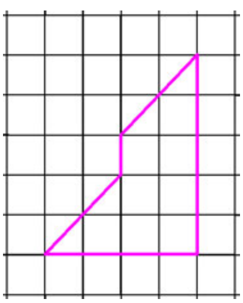

Рис. 1

2. Разрежьте фигуру, изображенную на рисунке 1, на две одинаковые (совпадающие при наложении) части.

С.Маркелов

3. Саша пригласил Петю в гости, сказав, что живет в 10-м подъезде в квартире 333, а этаж сказать забыл. Подойдя к дому, Петя обнаружил, что дом девятиэтажный. На какой этаж ему следует подняться? (На каждом этаже число квартир одинаково, номера квартир в доме начинаются с единицы.)

А.Ковальджи

4. Таня стоит на берегу речки. У нее есть два глиняных кувшина: один – на 5 литров, а про второй Таня помнит лишь то, что он вмещает то ли 3, то ли 4 литра. Помогите Тане определить емкость второго кувшина. (Заглядывая в кувшин, нельзя понять, сколько в нем воды.)

Т.Гейдер, А.Хачатурян

5. Дед звал внука к себе в деревню: «Вот посмотришь, какой я необыкновенный сад посадил! У меня там растут четыре груши, а еще есть яблони, причем они посажены так, что на расстоянии 10 метров от каждой яблони растут ровно две груши». «Ну и что тут интересного, – ответил внук. – У тебя всего две яблони». «А вот и не угадал, – улыбнулся дед. – Яблонь у меня в саду больше, чем груш». Нарисуйте, как могли расти яблони и груши в саду у деда. Постарайтесь разместить на рисунке как можно больше яблонь, не нарушая условий. Если вы думаете, что разместили максимально возможное число яблонь, попробуйте объяснить, почему это так.

А.Ковальджи, А.Хачатурян

6. Пять футбольных команд провели турнир – каждая команда сыграла с каждой по разу. За победу начислялось 3 очка, за ничью – 1 очко, за проигрыш очков не давалось. Четыре команды набрали 1, 2, 5 и 7 очков соответственно. А сколько очков набрала пятая команда?

А.Заславский

7 класс

1. Винни-Пух и Пятачок поделили между собой торт. Пятачок захныкал, что ему досталось мало. Тогда Пух отдал ему треть своей доли. От этого у Пятачка количество торта увеличилось втрое. Какая часть торта была вначале у Пуха и какая у Пятачка?

А.Ковальджи, И.Раскина

2. Разрежьте пятиугольник, изображенный на рисунке 2, на две одинаковые (совпадающие при наложении) части.

С.Маркелов

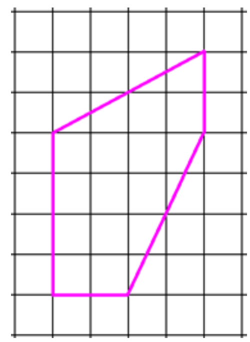

Рис. 2

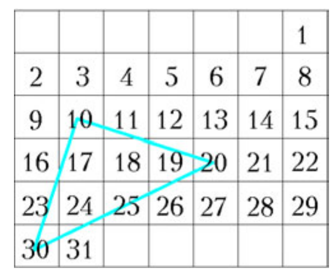

Рис. 3

3. Наташа сделала из листа клетчатой бумаги календарь на январь 2006 года (рис.3) и заметила, что центры клеток 10, 20 и 30 января образуют равнобедренный прямоугольный треугольник. Наташа предположила, что это будет верно и в любом другом году, за исключением тех лет, когда центры клеток 10, 20 и 30 лежат на одной прямой. Права ли Наташа?

Н.Нетрусова

4. Год проведения нынешнего математического праздника делится на его номер: 2006 : 17 = 118. Назовите:

а) первый номер математического праздника, для которого это было выполнено;

б) последний номер математического праздника, для которого это тоже будет выполнено.

Фольклор

5. Дед звал внука к себе в деревню: «Вот посмотришь, какой я необыкновенный сад посадил! У меня там растут груши и яблони, причем яблони посажены так, что на расстоянии 10 метров от каждой яблони растут ровно две груши». «Ну и что тут интересного, – ответил внук. – У тебя, значит, яблонь вдвое меньше, чем груш». «А вот и не угадал, – улыбнулся дед. – Яблонь у меня в саду вдвое больше, чем груш». Нарисуйте, как могли расти яблони и груши в саду у деда.

А.Ковальджи, А.Хачатурян

6. Петя закрасил одну клетку прямоугольника. Саша может закрашивать другие клетки этого прямоугольника по следующему правилу: можно красить любую клетку, у которой нечетное число закрашенных соседей (по стороне). Сможет ли Саша закрасить все клетки прямоугольника (независимо от того, какую клетку выбрал Петя), если размеры прямоугольника: а) 8×9 клеток; б) 8×10 клеток?

И.Раскина

ЗАДАЧИ СТАРШИХ КЛАССОВ

8 класс

1. В олимпиаде участвовали 2006 школьников. Оказалось, что школьник Вася из всех шести задач решил только одну, а также что участников, решивших

- хотя бы 1 задачу, в 4 раза больше, чем решивших хотя бы 2;
- хотя бы 2 задачи, в 4 раза больше, чем решивших хотя бы 3;
- хотя бы 3 задачи, в 4 раза больше, чем решивших хотя бы 4;
- хотя бы 4 задачи, в 4 раза больше, чем решивших хотя бы 5;
- хотя бы 5 задач, в 4 раза больше, чем решивших все 6.

Сколько школьников не решили ни одной задачи?

А.Заславский

2. В клетках таблицы 3×3 расставлены числа так, что сумма чисел в каждом столбце и в каждой строке равна нулю. Какое наименьшее количество чисел, отличных от нуля, может быть в этой таблице, если известно, что оно нечетно?

И.Богданов

3. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ – равнобедренные прямоугольные (стороны AB и A_1B_1 – гипотенузы). Известно, что точка C_1 лежит на стороне BC, точка B_1 лежит на стороне AB, а точка A_1 лежит на стороне AC. Докажите, что $AA_1 = 2CC_1$.

А.Хачатурян

4. Девять одинаковых по виду монет расположены по кругу. Пять из них настоящие, а четыре – фальшивые. Никакие две фальшивые монеты не лежат рядом. Настоящие монеты весят одинаково и фальшивые – одинаково (фальшивая монета тяжелее настоящей). Как за два взвешивания на чашечных весах без гирь определить все фальшивые монеты?

Р.Женодаров

5. Сережа придумал фигуру, которую легко разрезать на две части и сложить из них квадрат (рис.4). Он утверждает,

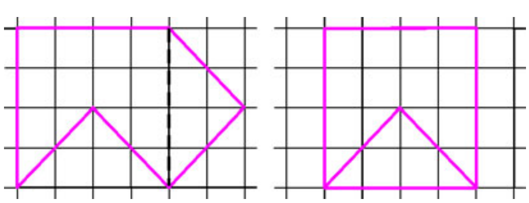

Рис. 4

что это можно сделать еще одним способом. Найдите этот способ.

С.Маркелов

6. Каждую неделю Ваня получает ровно одну оценку («3», «4» или «5») по каждому из семи предметов. Он считает неделю удачной, если количество предметов, по которым оценка улучшилась, превышает количество предметов, по которым оценка ухудшилась, хотя бы на два. Оказалось, что n недель подряд были удачными, и в последнюю из них оценка по каждому предмету в точности совпала с оценкой первой недели. Чему могло равняться число n? (Найдите все варианты.)

Т.Караваева

9 класс

1. Васе на 23 февраля подарили 777 конфет. Вася хочет съесть все конфеты за n дней, причем так, чтобы в каждый из этих дней (кроме первого, но включая последний) съедать на одну конфету больше, чем в предыдущий. Для какого наибольшего числа n это возможно?

Фольклор

2. На олимпиаде $m > 1$ школьников решали $n > 1$ задач. Все школьники решили разное количество задач. Все задачи решены разным количеством школьников. Докажите, что один из школьников решил ровно одну задачу.

Б.Френкин

3. Дан остроугольный треугольник ABC. На сторонах AB и BC во внешнюю сторону построены равные прямоугольники $ABMN$ и $LBCK$ так, что $AB = KC$. Докажите, что прямые AL, NK и MC пересекаются в одной точке.

А.Гаврилюк

4. В выражении $\left(x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 2\right)^{2006}$ раскрыли скобки и привели подобные слагаемые. Докажите, что при некоторой степени переменной x получился отрицательный коэффициент.

М.Малкин

5. Назовем *тропинкой* замкнутую траекторию на плоскости, состоящую из дуг окружностей и проходящую через каждую свою точку ровно один раз. Приведите пример тропинки и такой точки M на ней, что любая прямая, проходящая через M, *делит тропинку пополам*, т.е. сумма длин всех кусков тропинки в одной полуплоскости равна сумме длин всех кусков тропинки в другой полуплоскости.

С.Маркелов

6. Учитель заполнил клетчатую таблицу 5×5 различными целыми числами и выдал по одной ее копии Боре и Мише. Боря выбирает наибольшее число в таблице, затем вычеркивает строку и столбец, содержащие это число, затем выбирает наибольшее число из оставшихся, вычеркивает строку и столбец, содержащие это число, и так далее. Миша производит аналогичные операции, каждый раз выбирая наименьшие числа. Может ли учитель так заполнить таблицу, что сумма пяти чисел, выбранных Мишей, окажется больше суммы пяти чисел, выбранных Борей?

С.Токарев, А.Эвнин

10 класс

1. Один из двух приведенных квадратных трехчленов имеет два корня, меньших тысячи, другой – два корня, больших тысячи. Может ли сумма этих трехчленов иметь один корень, меньший тысячи, а другой – больший тысячи?

Б.Френкин

2. Может ли сумма тангенсов углов одного треугольника равняться сумме тангенсов углов другого, если один из этих треугольников остроугольный, а другой тупоугольный?

Б.Френкин

3. Можно ли замостить все пространство равными тетраэдрами, все грани которых – прямоугольные треугольники?

С.Маркелов

4. В коробке лежат карточки, занумерованные натуральными числами от 1 до 2006. На карточке с номером 2006 лежит карточка с номером 2005 и так далее до 1. Сколько пустых коробок нужно для того, чтобы переложить все карточки в другую коробку, если за ход разрешается взять одну верхнюю карточку (из любой коробки) и переложить ее либо на дно пустой коробки, либо на карточку с номером на единицу больше?

А.Канель-Белов

5. Натуральное число n таково, что числа $3n + 1$ и $10n + 1$ являются квадратами натуральных чисел. Докажите, что число $29n + 11$ составное.

Р.Женодаров

6. Дан треугольник ABC и точки P и Q, лежащие на его описанной окружности. Точку P отразили относительно прямой BC и получили точку P_a. Точку пересечения прямых QP_a и BC обозначим A'. Точки B' и C' строятся аналогично. Докажите, что точки A', B' и C' лежат на одной прямой.

А.Акопян

11 класс

1. Какие значения может принимать разность возрастающей арифметической прогрессии $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_5$, все члены которой принадлежат отрезку $[0; 3\pi/2]$, если числа $\cos\alpha_1$, $\cos\alpha_2$ и $\cos\alpha_3$, а также числа $\sin\alpha_3$, $\sin\alpha_4$ и $\sin\alpha_5$ в некотором порядке тоже образуют арифметические прогрессии?

По мотивам А.Канунникова

2. Найдите все несократимые дроби $a : b$, представимые в виде $\overline{b,a}$ (запятая разделяет десятичные записи натуральных чисел b и a).

И.Сергеев

3. Можно ли намотать нерастяжимую ленту на бесконечный конус так, чтобы сделать вокруг его оси бесконечно много оборотов? Ленту нельзя наматывать на вершину конуса, а также разрезать и перекручивать. При необходимости можно считать, что лента бесконечна, а угол между осью и образующей конуса достаточно мал.

И.Сергеев

4. Алиса и Базилио играют в следующую игру: из мешка, первоначально содержащего 1331 монету, они по очереди берут монеты, причем первый ход делает Алиса и берет 1 монету, а далее при каждом следующем ходе игрок берет (по своему усмотрению) либо столько же монет, сколько взял другой игрок последним ходом, либо на одну больше. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход по правилам. Кто из игроков может обеспечить себе выигрыш независимо от ходов другого?

О.Косухин

5. На биссектрисе данного угла фиксирована точка. Рассматриваются всевозможные равнобедренные треугольники, у которых вершина находится в этой точке, а концы оснований лежат на разных сторонах этого угла. Найдите геометрическое место середин оснований таких треугольников.

В.Алексеев

6. Все имеющиеся на складе конфеты разных сортов разложены по n коробкам, на которые установлены цены в 1, 2, …, n у.е. соответственно. Требуется купить такие k из этих коробок наименьшей суммарной стоимости, которые содержат заведомо не менее k/n массы всех конфет при одном лишь условии, что масса конфет в любой коробке не превосходит массы конфет в любой более дорогой коробке.

а) Какие коробки следует купить при $n = 10$ и $k = 3$?

б) Тот же вопрос для произвольных натуральных $n \geq k$.

И.Сергеев

Публикацию подготовил Б.Френкин

Избранные задачи Московской физической олимпиады

ПЕРВЫЙ ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

7 класс

1. Найдите примерную величину давления в центре Земли, считая, что средняя плотность ее вещества $\rho = 5000$ кг/м^3. Радиус Земли $R_З = 6400$ км, ускорение свободного падения на поверхности Земли $g = 10$ м/с^2.

С.Варламов

2. Школьники побывали в музее-имении Л.Н.Толстого «Ясная поляна» и возвращались в Рязань на автобусах, которые ехали со скоростью $v_1 = 70$ км/ч. Пошел дождь, и водители снизили скорость до $v_2 = 60$ км/ч. Когда дождь кончился, до Рязани оставалось проехать $s = 40$ км. Автобусы поехали со скоростью $v_3 = 75$ км/ч и въехали в Рязань в точно запланированное время. Сколько времени шел дождь? Чему равна средняя скорость автобуса? Для упрощения считайте, что автобусы в пути не останавливались.

М.Ромашка

3. Во льдах Арктики в центре небольшой плоской льдины площадью $S = 70$ м^2 стоит белый медведь массой $m = 700$ кг. При этом надводная часть льдины выступает над поверхностью воды на высоту $h = 10$ см. На какой глубине под водой находится нижняя поверхность льдины? Плотность воды $\rho_в = 1000$ кг/м^3, плотность льда $\rho_л = 900$ кг/м^3.

М.Ромашка

4. Провода над железной дорогой, питающие током электропоезда, натягиваются с помощью системы, показанной на рисунке 1. Она крепится к столбу и состоит из тросов, блоков с изоляторами и стального груза квадратного сечения со сто-

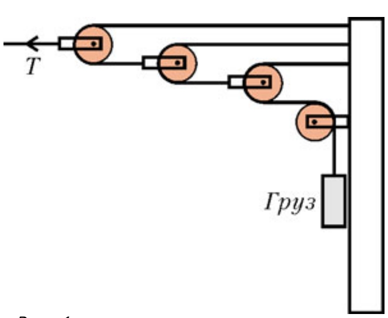

Рис. 1