XLVI Международная математическая олимпиада

XLVI Международная математическая олимпиада (ММО) прошла с 8 по 19 июля 2005 года в Мексике, в городе Мерида. Место для проведения олимпиады было выбрано удачно: Мерида расположена на полуострове Юкатан — земле поселений майя, поэтому экскурсии в древние города Дзибилчалтун и Чичен-Ица стали для участников олимпиады лучшим знакомством с культурой и загадками с одной из древнейших цивилизаций Америки.

Олимпиада в Мексике стала особенно представительной — она собрала 513 школьников из 91 страны мира.

В команду России в этом году вошли одиннадцатиклассники

Василий Астахов — Саратов, ФТЛ 1,
Андрей Гаврилюк — Долгопрудный, ФМШ 5,
Никита Калинин — Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Павел Козлов — Ярославская обл., школа с. Шурскол Ростовского района

и десятиклассники

Алексей Катышев — Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Александр Магазинов — Ярославль, лицей 33.

Наша команда выступила очень достойно, завоевав четыре золотые и две серебряные медали. Так выглядят результаты российских участников олимпиады (традиционно, правильное решение каждой из 6 задач оценивалось в 7 баллов):

	1	2	3	4	5	6	Сумма баллов	Медаль
А.Гаврилюк	7	7	7	7	7	7	42	золотая
А.Магазинов	7	7	6	7	7	7	41	золотая
Н.Калинин	7	7	7	7	7	1	36	золотая
П.Козлов	7	7	0	7	7	7	35	золотая
А.Катышев	7	7	0	7	7	2	30	серебряная
В.Астахов	7	7	0	7	0	7	28	серебряная

В неофициальном командном зачете в который раз первенство праздновали китайцы. Россия стала третьей, отстав от команды США всего на балл. Справедливости ради отметим, что наши ребята не уступили американцам ни в количестве, ни в достоинстве завоеванных медалей и даже сумели превзойти их по количеству полностью решенных задач. Приводим результаты первых двадцати команд:

№	Страна	Золотая медаль	Серебряная медаль	Бронзовая медаль	Сумма баллов
1.	Китай	5	1	0	235
2.	США	4	2	0	213
3.	Россия	4	2	0	212
4.	Иран	2	4	0	201
5.	Корея	3	3	0	200
6.	Румыния	4	1	1	191
7.	Тайвань	3	2	1	190
8.	Япония	3	1	2	188
9.	Венгрия	2	3	1	181
10.	Украина	2	2	2	181
11.	Болгария	2	3	1	173
12.	Германия	1	3	2	163
13.	Великобритания	1	3	2	159
14.	Сингапур	0	4	2	145
15.	Вьетнам	0	3	3	143
16.	Чехия	1	3	1	139
17.	Гонконг	1	3	1	138
18.	Беларусь	1	3	1	136
19.	Канада	1	3	1	132
20.	Словакия	0	4	2	131

Благодарим всех, кто так или иначе содействовал подготовке сборной России. Особую благодарность адресуем преподавателям-тренерам А.Бадзяну, С.Берлову, И.Богданову, А.Гарберу, А.Глазырину, В.Дольникову, Р.Карасеву, Д.Карпову, М.Пратусевичу, Д.Флаассу, Г.Челнокову, работавшим с командой на последнем этапе подготовки — летних учебно-тренировочных сборах.

Мы также признательны Федеральному агентству по образованию, Стипендиальному фонду Владимира Потанина, компании «Спортмастер», поддерживающим работу по подготовке национальной команды России по математике.

В заключение приводим условия задач, а также решения, большинство из которых написаны школьниками на олимпиаде.

ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ

1. На сторонах равностороннего треугольника ABC выбраны шесть точек: A_1, A_2 на BC, B_1, B_2 на CA и C_1, C_2 на AB. Эти точки являются вершинами выпуклого шестиугольника $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$, стороны которого имеют равные длины. Докажите, что прямые A_1B_2, B_1C_2 и C_1A_2 пересекаются в одной точке.

(Румыния)

2. Пусть $a_1, a_2 \ldots$ – последовательность целых чисел, в которой содержится бесконечно много как положительных, так и отрицательных членов. Известно, что для каждого натурального n все n остатков от деления чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ на n различны. Докажите, что каждое целое число встречается в этой последовательности ровно один раз.

(Нидерланды)

3. Пусть x, y и z – положительные числа такие, что $xyz \geq 1$. Докажите, что

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \geq 0 .$$

(Корея)

4. Последовательность $a_1, a_2 \ldots$ определена следующим образом:

$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1 \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Найдите все натуральные числа, которые взаимно просты с каждым членом этой последовательности.

(Польша)

5. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, стороны BC и AD которого равны, но не параллельны. Пусть E и F – внутренние точки отрезков BC и AD соответственно такие, что $BE = DF$. Прямые AC и BD пересекаются в точке P, прямые BD и EF пересекаются в точке Q, прямые EF и AC

пересекаются в точке R. Рассмотрим треугольники PQR, получаемые для всех таких точек E и F. Докажите, что окружности, описанные около всех этих треугольников, имеют общую точку, отличную от P.

(Польша)

6. На математической олимпиаде участникам были предложены 6 задач. Оказалось, что каждая пара задач была решена более чем $\frac{2}{5}$ от общего числа участников, но никто не решил все 6 задач. Докажите, что найдутся по крайней мере два участника, каждый из которых решил ровно 5 задач.

(Румыния)

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Запишем векторное равенство $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2B_1} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{B_2C_1} + \overrightarrow{C_1C_2} + \overrightarrow{C_2A_1} = \vec{0}$. Заметим, что сумма векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{B_1B_2}$, C_1C_2 равна $\vec{0}$, так как если последовательно отложить их от некоторой точки, получится равносторонний треугольник. Следовательно, сумма векторов $\overrightarrow{A_2B_1}$, $\overrightarrow{B_2C_1}$, $\overrightarrow{C_2A_1}$ равна $\vec{0}$. Если эти векторы последовательно отложить от некоторой точки, получится треугольник, причем равносторонний, так как длины векторов равны. Значит, прямые A_2B_1, B_2C_1, C_2A_1 образуют правильный треугольник, откуда легко вытекает подобие треугольников AC_1B_2, BA_1C_2 и CB_1A_2. Более того, эти треугольники равны, поскольку $A_2B_1 = B_2C_1 = C_2A_1$, и, значит, они совмещаются поворотом на угол 120° вокруг центра O треугольника ABC. Поскольку точки A_1, B_1, C_1 переходят друг в друга при повороте на 120° вокруг O, то треугольник $A_1B_1C_1$ – правильный и O – его центр. Так как $B_1A_1 = C_1A_1$ и $B_1B_2 = C_1B_2$, то A_1B_2 – серединный перпендикуляр к B_1C_1, поэтому A_1B_2 проходит через O. Аналогично, B_1C_2 и C_1A_2 проходят через O.

2 (А.Магазинов). Если для пары номеров $m < n$ выполнено $a_m = a_n$, то a_m и a_n дают равные остатки при делении на n – противоречие. Таким образом, в последовательности каждое целое число встречается не более одного раза.

Предположим, что целое число N не встретилось в последовательности. Так как среди членов последовательности бесконечно много положительных и отрицательных, то найдется такое t, что среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_t$ есть как большее N, так и меньшее N. Пусть X и Y – соответственно наименьшее и наибольшее среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_t$; $X < N < Y$. Среди $Y - X + 1$ целых чисел промежутка $[X;\ Y]$ есть не больше $Y - X$ членов последовательности, так как N не встречается в последовательности. Значит, среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{Y-X+1}$ найдется a_k, лежащее вне промежутка $[X;\ Y]$. Тогда либо $|a_k - X|$, либо $|a_k - Y|$ не меньше $Y - X + 1$. Пусть для определенности $s = |a_k - Y| \geq Y - X + 1$. Тогда среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_s$ нашлись два числа (a_k и Y), дающие равные остатки при делении на s, что противоречит условию.

Замечание. Из решения легко следует, что для каждого n множество первых n членов последовательности является множеством n последовательных целых чисел.

3 (Ю.Борейко (Молдова), решение удостоено спецприза ММО). Заметим, что

$$\frac{1}{x^5 + y^2 + z^2} - \frac{1}{x^3\left(x^2 + y^2 + z^2\right)} = \frac{\left(x^3 - 1\right)\left(y^2 + z^2\right)}{x^3\left(x^5 + y^2 + z^2\right)\left(x^2 + y^2 + z^2\right)},$$

поэтому

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} - \frac{x^5 - x^2}{x^3\left(x^2 + y^2 + z^2\right)} = \frac{x^2\left(x^3 - 1\right)^2\left(y^2 + z^2\right)}{x^3\left(x^5 + y^2 + z^2\right)\left(x^2 + y^2 + z^2\right)} \geq 0.$$

Значит,

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \geq$$

$$\geq \frac{x^5 - x^2}{x^3\left(x^2 + y^2 + z^2\right)} + \frac{y^5 - y^2}{y^3\left(x^2 + y^2 + z^2\right)} + \frac{z^5 - z^2}{z^3\left(x^2 + y^2 + z^2\right)} =$$

$$= \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}\left(x^2 - \frac{1}{x} + y^2 - \frac{1}{y} + z^2 - \frac{1}{z}\right).$$

Но так как $\frac{1}{x} \leq yz$, $\frac{1}{y} \leq zx$, $\frac{1}{z} \leq xy$, то

$$x^2 - \frac{1}{x} + y^2 - \frac{1}{y} + z^2 - \frac{1}{z} \geq x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx =$$

$$= \frac{1}{2}\left((x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2\right) \geq 0.$$

4 (Н.Калинин). *Ответ*: 1.

Достаточно показать, что для любого простого числа p найдется такой номер n, что a_n делится на p.

При $p = 2$ положим $n = 1$: $a_1 = 10$ – делится на 2; при $p = 3$ положим $n = 2$: $a_2 = 48$ – делится на 3. При $p > 3$ возьмем $n = p - 2$. Согласно малой теореме Ферма, если натуральное a не делится на p, то a^{p-1} дает остаток 1 при делении на p. Поэтому $6a_n = 6\left(2^{p-2} + 3^{p-2} + 6^{p-2} - 1\right) = 3 \cdot 2^{p-1} + 2 \cdot 3^{p-1} + 6^{p-1} - 6$ дает остаток $3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 - 6 = 0$ при делении на p. Итак, $6a_n$ делится на p, откуда a_n делится на p, так как p и 6 взаимно просты.

5 (А.Катышев). Допустим, что прямые AD и BC пересекаются в точке H; положим, для определенности, что H лежит на лучах DA и CB (рис.1). Пусть K – середина дуги описанной окружности треугольника BHD, не содержащей точку H; очевидно, $BK = DK$ (рис. 2). Четырехугольник $BHDK$ вписанный, поэтому $\angle KDA = \angle KBC$. Треугольники KDA и KBC равны по двум сторонам и углу между ними ($DA = BC$ по условию), поэтому $KA = KC$, $\angle AKD = \angle CKB$. Отсюда $\angle AKC = \angle AKB + \angle CKB = \angle AKB + \angle AKD = \angle BKD$.

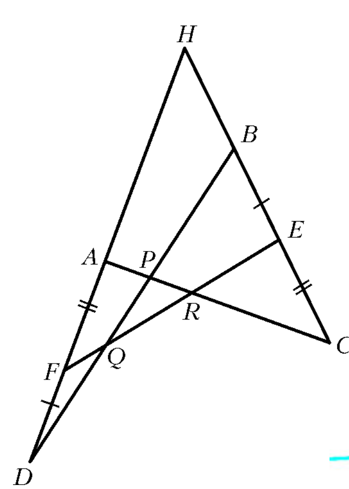

Рис. 1

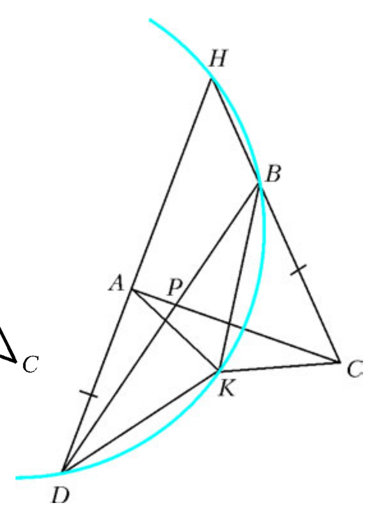

Рис. 2

В равнобедренных треугольниках AKC и BKD углы при вершинах равны, следовательно, и углы при основаниях равны, значит, $\angle KAP = \angle KDP$, и точки A, D, P, K лежат на одной окружности, откуда $\angle(KP, AP) = \angle(KD, AD)$. (Через $\angle(a, b)$ обозначен угол от прямой a до прямой b, отсчитываемый против часовой стрелки.)

Предыдущие рассуждения останутся без изменений, если точки A, C, P заменить на F, E, Q соответственно. Отсюда вытекает, что точки F, D, Q, K лежат на одной окружности и $\angle(KQ, FQ) = \angle(KD, FD)$. Получаем, что $\angle(KP, RP) = \angle(KP, AP) = \angle(KD, AD) = \angle(KD, FD) = \angle(KQ, FQ) = \angle(KQ, RQ)$, поэтому точки K, P, R, Q лежат на одной окружности. Итак, K – общая точка всевозможных окружностей, проходящих через точки P, Q, R.

Замечание 1. Из решения вытекает следующее описание искомой точки: точка K – центр поворота, переводящего точки A, F, D в точки C, E, B соответственно.

Замечание 2. Известно следующее утверждение. Пусть имеется четверка попарно непараллельных прямых. Тогда четыре окружности, описанные около треугольников, образованных тройками этих прямых, имеют общую точку. Эта точка называется точкой Микеля четверки прямых. Из решения следует, что K является точкой Микеля пяти прямых AD, BC, AC, BD, EF, т.е. лежит на описанной окружности треугольника, образованного любой тройкой из этих прямых.

6 (П.Козлов). Занумеруем всех участников олимпиады числами от 1 до n и представим результаты олимпиады в виде таблицы с n строками и шестью столбцами, в которой на пересечении i-й строки и j-го столбца стоит плюс, если i-й участник решил задачу номер j. По условию, нет строки с шестью плюсами. Для каждой из пар $(j,\ k)$ столбцов, $1 \le j < k \le 6$, определим параметр $b_{j,k}$, равный количеству строк, на пересечении которых с j-м и k-м столбцами стоят плюсы. По условию, $b_{j,k} > \frac{2}{5}n$, поэтому $b_{j,k} = \frac{2}{5}n + 1 - \left\{\frac{2}{5}n\right\} + a_{j,k}$, где $a_{j,k}$ – целое неотрицательное ($\{x\}$ обозначает дробную долю числа x). Предположим, утверждение задачи неверно, т.е. строк с пятью плюсами не более одной. Добавим, если возможно, в каждой строке плюсов так, чтобы в одной строке стало 5 плюсов (пусть, скажем, в этой строке нет плюса только в столбце номер q), а в остальных $n - 1$ строках – по 4 плюса. При этом условие задачи не нарушится.

Сосчитаем теперь количество P пар плюсов, находящихся в каждой строке. Суммируя по строкам, получаем $P = 6(n-1) + 10 = 6n + 4$, так как в строке с четырьмя плюсами 6 пар плюсов, а в строке с пятью плюсами – 10 пар. Суммируя по всем парам столбцов, получаем, что

$$P = b_{1,2} + b_{1,3} + \ldots + b_{5,6} =$$

$$= 15\left(\frac{2}{5}n + 1 - \left\{\frac{2}{5}n\right\}\right) + a_{1,2} + a_{1,3} + \ldots + a_{5,6} =$$

$$= 6n + 15 - 15\left\{\frac{2}{5}n\right\} + a_{1,2} + a_{1,3} + \ldots + a_{5,6}.$$

Дробная доля $\left\{\frac{2}{5}n\right\}$ может принимать значения $0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$.

Если $\left\{\frac{2}{5}n\right\} \le \frac{3}{5}$, то $P \ge 6n + 15 - 15 \cdot \frac{3}{5} = 6n + 6 > 6n + 4 = P$ – противоречие. Если же $\left\{\frac{2}{5}n\right\} = \frac{4}{5}$, то n дает остаток 2 при делении на 5. Положим $n = 5l + 2$, тогда

$$P = 6n + 15 - 15 \cdot \frac{4}{5} + a_{1,2} + a_{1,3} + \ldots + a_{5,6} =$$

$$= 6n + 3 + a_{1,2} + a_{1,3} + \ldots + a_{5,6} = 6n + 4.$$

Значит, ровно одно из 15 чисел $a_{1,2}, a_{1,3}, \ldots, a_{5,6}$ равно 1, а остальные равны 0. Пусть для определенности $a_{1,2} = 1$, тогда $b_{1,2} = \frac{2}{5}n + 1 - \frac{4}{5} + 1 = 2l + 2$, а $b_{1,3} = b_{1,4} = \ldots = b_{5,6} = 2l + 1$. Пусть в i-м столбце s_i плюсов. Обозначим t_i количество пар плюсов, находящихся в одной строке, для которых один из плюсов содержится в i-м столбце. С одной стороны, t_i есть сумма тех пяти чисел $b_{j,k}$, для которых $i = j$ или $i = k$, т.е. $t_i = 5(2l+1) = 10l + 5$ при $i \ne 1, 2$ и $t_1 = t_2 = 10l + 6$. С другой стороны, суммируем t_i по строкам: каждая из s_i строк, имеющих плюс в i-м столбце, содержит 3 нужные пары, если всего в этой строке 4 плюса, и содержит 4 нужные пары, если всего в этой строке 5 плюсов. Таким образом, $t_q = 3s_q$ и $t_i = 3s_i + 1$ при $i \ne q$.

Итак, с одной стороны, среди чисел $t_1, t_2, \ldots, t_6$ два числа равны, а оставшиеся четыре числа на 1 меньше. С другой стороны, ровно одно из этих чисел делится на 3. Противоречие.

Публикацию подготовили
Н.Агаханов, П.Кожевников, Д.Терешин

XXXVI Международная физическая олимпиада

В первой половине июля 2005 года в Испании, в городе Саламанка, расположенном в 200 км от Мадрида, прошла очередная международная физическая олимпиада школьников. Саламанка была выбрана не случайно – здесь расположен один из старейших университетов Европы, основанный в 1218 году. В нем ежегодно десятки тысяч студентов обучаются разным наукам и проходят стажировки. Саламанка – один из центров образования, науки и культуры Испании.

На олимпиаду прибыли команды школьников из 73 стран. Общее число участников олимпиады составило 352 школьника.

В сборную России, по результатам выступления на двух последних всероссийских олимпиадах и рейтинга, полученного на трех сборах, были включены:

Гущин Иван – Ярославль, школа 33 (школьный учитель физики – Э.Е.Федосеева, преподаватель Регионального научно-образовательного центра «Логос» – С.В.Туруntаев),