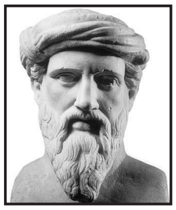
История

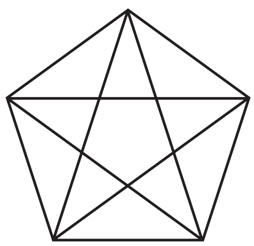
ПИФАГОР



Все есть число — эти слова приписывают великому древнегреческому математику Пифагору, который жил более двух с половиной тысяч лет тому назад.

Пифагор основал школу, в которой учили четырем предметам: арифметике, музыке, геометрии и астрономии. Символом школы была пентаграмма, пятиугольная звезда. По этому знаку ученики школы Пифагора узнавали друг друга.

Легенда рассказывает о пифагорейце, который находился вдали от дома и друзей. Однажды он попал в беду и не смог расплатиться с человеком, который ему помог. Тогда он попросил его нарисовать на своих воротах пентаграмму.



Через некоторое время другой пифагореец проходил мимо, увидел звезду и зашел в дом. Он расспросил хозяина и щедро расплатился с ним за услугу, оказанную его товарищу по пифагорейскому братству.

Имя Пифагора всем известно в связи с теоремой Пифагора, которую вы будете изучать в геометрии.

АЛЬ-ХОРЕЗМИ

Алгебра начинается с замечательного арабского математика Мухаммеда Аль-Хорезми, который жил в Хорезме (Хива) и Багдаде на границе VII и VIII веков. С его именем связаны два широко используемых термина: *алгебра* и *алгоритм*. Одно из главных сочинений Аль-Хорезми по-арабски озаглавлено так: «Китаб аль-джебр-аль-мукабала».

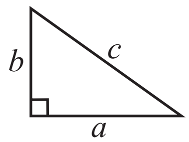
Аль-джебр и *аль-мукабала* — это названия двух операций, введенных Аль-Хорезми для решения уравнений (они соответствуют прибавлению к двум частям и вычитанию из двух частей уравнения одного и того же числа). Слово же *алгоритм* — это латинизированная запись имени самого математика.

Из сочинений Аль-Хорезми (изданных в Европе на латинском языке в XII веке) европейцы узнали о системе индийских цифр, употреблении нуля и позиционной записи числа (с тех пор эти цифры стали называться арабскими).

Аль-Хорезми предложил много способов решений различных уравнений (не забывайте, что до конца XIX века алгебра понималась как наука о решении уравнений).

Задачи

С именем Пифагора связывают много задач о целых числах a, b и c, связанных соотношением $a^2 + b^2 = c^2$. Этому соотношению удовлетворяют стороны прямоугольного треугольника (теорема Пифагора).



$$a^2 + b^2 = c^2$$

Тройки целых чисел (a, b, c), связанных равенством $a^2 + b^2 = c^2$, называют *пифагоровыми тройками*.

1. Проверьте, что следующие тройки чисел являются пифагоровыми:

(3; 4; 5) (8; 15; 17)

(5; 12; 13) (12; 35; 37)

(7; 24; 25) (20; 21; 29)

2. Докажите, что если (a, b, c) — пифагорова тройка, то при любом целом k тройка (ka, kb, kc) тоже пифагорова.

3. Проверьте, что при любых целых x и y тройка, составленная из чисел $(2xy, x^2 - y^2, x^2 + y^2)$ является пифагоровой. При вычислениях можно использовать формулу для квадрата суммы (разности), которую мы будем применять позже: $(x^2 \pm y^2)^2 = x^4 \pm 2x^2y^2 + y^4$.

4. Найдите, при каких значениях x и y из формул задачи 3 получаются тройки, указанные в задаче 1.

5. Решите подбором такую задачу Аль-Хорезми: «Я к трети числа прибавил единицу и к четверти числа прибавил единицу. Перемножив эти числа, получил 20. Какое число я взял»?

6. В «Алгебре» Аль-Хорезми встречается такое уравнение $\frac{10-x}{x} + \frac{x}{10-x} = \frac{13}{6}$. Найдите два его корня.

Рост степени

ЛЕГЕНДА О ШАХМАТНОЙ ДОСКЕ. Знаменитая индийская легенда рассказывает, что изобретатель шахмат попросил в награду выдать ему за первую клетку шахматной доски 1 зерно, за вторую — 2 зерна, за третью — $2^2 = 4$ зерна и т. д.

К изумлению индийского правителя, который сначала был обижен скромностью просьбы изобретателя, выдать такую награду оказалось не в его власти — масса просимого зерна превышала все мыслимые границы.

Количество просимых зерен оказалось равным числу

$2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615 \approx 1{,}8 \cdot 10^{19}$.

Вообще степени a^n числа $a > 1$ сначала являются небольшими числами, но затем растут с большой скоростью.

Для сравнения чисел удобно использовать десятичную шкалу, которая показывает, сколько цифр содержится в десятичной записи числа. Поэтому мы и записали приближенное значение числа 2^{64} в виде $1{,}8 \cdot 10^{19}$.

БАНКОВСКИЙ ВКЛАД. Другим примером роста степени является рост вклада в банке при начислении сложных процентов.

Будем считать, что банк в конце года добавляет к имеющейся на счету сумме 10 процентов. Это означает, что если в начале года на счету было A рублей, то к началу следующего года на счету окажется $1{,}1 \cdot A$ рублей. Можно сказать, что каждый год сумма вклада увеличивается в 1,1 раза. Если вначале было внесено A рублей, то через n лет вклад составит $1{,}1n \cdot A$ рублей.

Как меняются степени числа 1,1? Посмотрите на таблицу степеней этого числа, составленную с точностью до двух знаков после запятой.

n	$1{,}1^n$	n	$1{,}1^n$	n	$1{,}1^n$	n	$1{,}1^n$
1	1,1	5	1,61	9	2,38	13	3,45
2	1,21	6	1,77	10	2,59	14	3,80
3	1,33	7	1,95	11	2,85	15	4,18
4	1,46	8	2,14	12	3,14	16	4,60

Из этой таблицы видно, что через 8 лет вклад более, чем удвоится, а через 17 лет увеличится в 5 раз.

Задачи

1. Какое из написанных чисел самое большое, а какое самое маленькое?

$19^{99}, 99^{99}, 1^{999}, 199^{9}, 999^{1}$.

2. Поставьте один из знаков >, <, = так, чтобы получилось верное неравенство или равенство.

1) $2^4 \square 4^2$;

2) $5^3 \square 3^5$;

3) $\frac{1}{2^{10}} \square \frac{1}{10^3}$;

4) $10^{100} \square 100^{10}$;

5) $2^{300} \square 3^{200}$;

6) $31^{16} \square 17^{20}$;

7) $4^{53} \square 5^{45}$;

8) $\frac{100\,001}{1\,000\,001} \square \frac{1\,000\,001}{10\,000\,001}$;

9) $\frac{1}{1{,}0003} \square 0{,}9997$;

10) $3^{100} + 4^{100} \square 5^{100}$.

3. В серии из десяти вопросов на каждый вопрос можно отвечать *да* или *нет*. Докажите, что число возможных ответов на всю серию больше тысячи.

4. а) Сколько знаков после запятой будет в записи числа $\frac{1}{5^{64}}$ в виде конечной десятичной дроби?

б) Какова последняя цифра этого числа?

5. Найди правильный ответ.

а) Чему равно число $2^{n+2007} + 2^{n+2007}$?

б) Чему равно число $50^{50} : 25^{25}$?