Лабораторная работа «Линейное диофантово уравнение»

(Алгебра, 7 кл., глава 4, ЛР-04; компьютерная версия)

В этой лабораторной работе мы научим Excel находить частное (одно из многих) решение линейного диофантова уравнения, т.е. уравнения в целых числах вида $ax + by = c$. В п. 2 описания работы ЛР-04 в Рабочей тетради объяснятся, как, зная одно решение, получить и все остальные.

Решим уравнение $23x + 10y = 1$. Для этого рассмотрим вместе с ним уравнения с такими же коэффициентами и всевозможными правыми частями: $23x + 10y = c$. Зная решения каких-то из этих уравнений, можно находить решения других уравнений.

Задание 1. Пара чисел $(x; y) = (1; –2)$ является решением уравнения $23x + 10y = 3$. Найдите решения уравнений $23x + 10y = 6$; $23x + 10y = 9$.

Задание 2. Придумайте решение уравнения $23x + 10y = 10$. Пользуясь этим решением и решением уравнения $23x + 10y = 9$ (см. задание 1), найдите решение исходного уравнения $23x + 10y = 1$.

Если пары $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ – решения двух уравнений $23x + 10y = c_1$ и $23x + 10y = c_2$, то их разность $(x_1 - x_2; y_1 - y_2)$ – решение уравнения $23x + 10y = c_1 - c_2$; для суммы решений $(x_1 + x_2; y_1 + y_2)$ и произведения пары на число, $(kx_1; ky_1)$, верны аналогичные утверждения. Таким образом, если с помощью последовательности этих операций получить из правых частей данных уравнений некоторое число d, то те же операции, примененные к решениям этих уравнений, дадут решение уравнения $23x + 10y = d$. В частности, с помощью алгоритма Евклида можно получить решение для d = НОД$(c_1; c_2)$. Действительно, возьмем более простой вариант этого алгоритма – с вычитанием. Вспомним, что на каждом его шаге из большего из чисел c_1 и c_2 вычитается меньшее, пока они не станут равными. Более формально, если $c_1 > c_2$, то пара чисел $(c_1; c_2)$ переходит в $(c_1 - c_2; c_2)$; одновременно, пара $(x_1; y_1)$ (решение первого уравнения) заменяется парой $(x_1 - x_2; y_1 - y_2)$ (решением уравнения с новой правой частью $c_1 - c_2$); аналогичное преобразование происходит при $c_2 > c_1$; если же $c_1 = c_2$, то ничего не меняется. Наконец, в качестве исходных уравнений можно взять уравнения с решениями (1; 0) и (0; 1), т.е., в нашем примере, $23x + 10y = 23$ и $23x + 10y = 10$. Теперь все это можно перенести на рабочий лист задания в Excel.

Задание 3. Запишите во вторую строку значения коэффициентов уравнения $a = 23$ (ячейка A2), $b = 10$ (ячейка B2), исходные решения 1, 0, 0, 1 (ячейки C2, D2, E2, F2). В следующей, третьей строке запишите результат преобразования этих чисел после одного шага алгоритма: в столбцах A и B – формулы алгоритма Евклида (например, в A3 записывается формула «=ЕСЛИ(A2>B2;A2-B2;A2)»), в столбцах C, D, E, F – формулы преобразования решений (например, в C3 мы пишем «=ЕСЛИ(A2>B2;C2-E2;C2)»; остальные ячейки заполните самостоятельно). Выделите ячейки с A3 по F3 и «протяните» выделение вниз, пока не образуется строка, содержащая одинаковые значения в столбцах A и B (в данном случае 1). Проверьте, что пары чисел на пересечении этой строки со столбцами C, D и E, F являются решениями уравнения $23x + 10y = 1$.

Задание 4.

а) Найдите в полученной табличке решения уравнений $23x + 10y = c$ при $c = 2; 3; 4; 7$.

б) Как найти решение при $c = 5$, при $c = -2$?

в) Найдите решение уравнения $23x - 10y = 1$.

Задание 5. а) Пользуясь построенным алгоритмом, решите уравнения: $125x + 33y = 1$, $11y - 19x = 1$, $24x + 37y = -1$.

б) Решите уравнения $48x + 74y = 2$, $48x + 74y = 4$, $48x + 74y = 3$.

в) При каких c уравнение $48x + 74y = c$ разрешимо (в целых числах)?

Задание 6. Докажите, что если диофантово уравнение $ax + by = c$ имеет решение, то c делится на d = НОД(a, b). И обратно, если c кратно d, то решения есть.