Материалы вступительных экзаменов 2004 года

Московский государственный университет им.М.В.Ломоносова

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(механико-математический факультет, олимпиада «Абитуриент-2004», март)

1. Найдите сумму тангенсов всех $x \in (-\pi; \pi)$ таких, что

$$\sin 2x + 5\cos 2x = 3 .$$

2. Решите неравенство

$$3^{\log_x\left(3x^2+2x-1\right)} \le \left(x^2+x\right)^{\log_x 9} .$$

3. Найдите все возможные значения суммы убывающей арифметической прогрессии

$$a_1 = \frac{6m-m^2-9}{6m-m^2},\ a_2 = \frac{6m-m^2-12}{6m-m^2},\ \ldots,\ a_n = \frac{(-10)}{6m-m^2},$$

где m – некоторое целое число.

4. В выпуклом четырехугольнике $KLMN$ диагонали KM и LN перпендикулярны сторонам MN и KL соответственно, а длина стороны KN равна $4\sqrt{3}$. На стороне KN расположена точка A так, что $\angle LAK = \angle MAN$. Известно, что $\angle MKN - \angle KNL = 15°$. Найдите длину ломаной LAM и площадь четырехугольника $KLMN$, если $LA : AM = 1 : \sqrt{3}$.

5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\operatorname{arctg}\left((3a-1)\sin^2 x - \left(3a^3-a^2+3a-1\right)\sin x + \operatorname{tg}(ax-a\pi)\right) - ax + a\pi = 0$$

имеет ровно три решения.

6. Дана сфера радиуса 1 с центром в точке O. Из точки A, лежащей вне сферы, проведены четыре луча. Первый луч пересекает поверхность сферы последовательно в точках B_1 и C_1, второй – в точках B_2 и C_2, третий – в точках B_3 и C_3, четвертый – в точках B_4 и C_4. Прямые B_1B_2 и C_1C_2 пересекаются в точке E, прямые B_3B_4 и C_3C_4 – в точке F. Найдите объем пирамиды $OAEF$, если $AO = 2$, $EO = FO = 3$, а угол между гранями AOE и AOF равен 30°.

Вариант 2

(механико-математический факультет)

1. Решите неравенство

$$\frac{\log_4(2-x) - \log_6(2-x)}{\log_6 x - \log_9 x} \le \log_4 9 .$$

2. Решите неравенство

$$\frac{\left(x^2+x+1\right)^2 - 2\left|x^3+x^2+x\right| - 3x^2}{10x^2-17x-6} \ge 0 .$$

3. Выпуклый многогранник $ABCDFE$ имеет пять граней: CDF, ABE, $BCFE$, $ADFE$ и $ABCD$. Ребро AB параллельно ребру CD. Точки K и L расположены соответственно на ребрах AD и BC так, что отрезок KL делит площадь грани $ABCD$ пополам. Точка M является серединой ребра EF и вершиной пирамиды $MABCD$, объем которой равен 6. Найдите объем пирамиды $EKLF$, если известно, что объем многогранника $ABCDFE$ равен 19.

4. Решите уравнение

$$\sqrt{-3\sin 2x} = -2\sin 2x - \sin x + \cos x - 1 .$$

5. Дорога проходит последовательно через пункты A, B, C и D. Расстояние от A до B равно 24 км. Из A в D выехал с постоянной скоростью автомобиль. Одновременно с ним из B в D отправились с постоянными скоростями велосипедист и мотоциклист. Когда автомобиль догнал велосипедиста, мотоциклист обгонял их на 6 км. В пункте C автомобиль догнал мотоциклиста и, доехав до D, сразу поехал обратно в A, встретившись с велосипедистом во второй раз в C. Найдите расстояние между B и C, если известно, что время от начала движения до момента повторной встречи автомобиля и велосипедиста в два раза больше, чем время от начала движения до того момента, когда автомобиль впервые догнал мотоциклиста.

6. В остроугольном треугольнике ABC высоты пересекаются в точке H, а медианы в точке O. Биссектриса угла A проходит через середину отрезка OH. Найдите площадь треугольника ABC, если $BC = 2$, а разность углов B и C равна 30°.

Вариант 3

(факультет вычислительной математики и кибернетики, олимпиада «Абитуриент-2004», апрель)

1. Четыре числа a_1, a_2, a_3 и a_4 образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию. Если к ним прибавить 6, 7, 6 и 1 соответственно, то получатся числа, образующие в том же порядке арифметическую прогрессию. Найдите числа a_1, a_2, a_3 и a_4.

2. Решите неравенства

$$\frac{1}{x^2-5x+7} \le 5x - x^2 - 5 .$$

3. Найдите все целые n, при которых справедливо равенство

$$\frac{5n^2+4n+13}{n+1} = 11 - 8\sqrt{1-8n} .$$

4. Решите неравенство

$$9\log_2^2 x + 36 \le 4\left(-8\cos^2\frac{\pi(47-8x)}{45} + 8\cos\frac{\pi(47-8x)}{45} + 7\right)\log_2 x.$$

5. В параллелограмме $ABCD$ угол между диагоналями AC и BD равен 30°. Известно отношение $AC : BD = 2 : \sqrt{3}$. Точка B_1 симметрична вершине B относительно прямой AC, а точка C_1 симметрична вершине C относительно прямой BD. Найдите отношение площадей треугольника AB_1C_1 и параллелограмма $ABCD$.

6. При всех значениях параметра a решите уравнение

$$|x-3|-(1-2a)x^2+(3-4a)x+6a-4=$$
$$=\sin\left(|x-3|+6a-4\right)-\sin\left((1-2a)x^2-(3-4a)x\right).$$

Вариант 4

(факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. Решите уравнение

$$\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}-3\cos\left(\operatorname{arctg}\left(2\sqrt{2}\right)\right)+\frac{2}{\sqrt{3}+1}\right)x=2^{\log_{\sqrt{2}}3}-9\text{ .FF}$$

2. Решите неравенство

$$\frac{x^2-4}{\sqrt{15+2x-x^2}}\geq|x|-2.$$

3. Решите уравнение

$$2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-4x\right)-\sin\left(3x-\frac{5\pi}{16}\right)=-1.$$

4. Окружность с центром в точке M касается сторон угла AOB в точках A и B. Вторая окружность с центром в точке N касается отрезка OA, луча BA и продолжения стороны угла OB за точку O. Известно, что $ON : OM = 12 : 13$. Найдите отношение радиусов окружностей.

5. Для каждого значения параметра a найдите число решений уравнений

$$\frac{2}{16^x}-\frac{1}{8^x}-\frac{a+8}{4^x}+\frac{4-2a}{2^x}-a^2+4a+5=0.$$

6. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит равнобокая трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$). Через точку B_1 проведена плоскость $\mathcal{P}$, пересекающая ребро AD в точке K, а ребро CD – в точке N. Прямые AA_1 и CC_1 эта плоскость пересекает в точках L и M соответственно. Известно, что $DN : DC = 3 : 4$, $BC = DK$ и $KN > DN$. Объем многогранника $ABCNKLB_1M$ относится к объему призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ как 49 : 144. Найдите отношение длины отрезка DK к длине отрезка AD.

Вариант 5

(физический факультет, олимпиада «Абитуриент-2004», март)

1. Решите уравнение

$$6\sin\left(x+\frac{\pi}{8}\right)\cos\frac{3\pi}{8}-3\cos x-1=0.$$

2. Решите систему неравенств

$$-2<\frac{2}{x^2-x-2}<-1.$$

3. Решите неравенство

$$\log_{32}\left(x^2+3x+2\right)^5+\log_2\left(x^2-3x+2\right)<2.$$

4. Окружность с центром O вписана в ΔABC, $AB = 4$, $BC = 5$, $AC = 6$. Прямые AO, BO и CO пересекают стороны BC, AC и AB в точках K, L и M соответственно. Найдите отношение площади ΔBMK к площади ΔCKL.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\left|2^x-2^y\right|+2^x+3\cdot 2^y=12\sqrt{2},\\ \left|2^x+2^{-y}\right|+2^x-33\cdot 2^{-y}=0.\end{cases}$$

6. В треугольнике ABC даны стороны $AB = 5$, $BC = 6$, $AC = 7$. Три окружности попарно касаются друг друга внешним образом в точках A, B и C. Найдите радиус наибольшей окружности.

7. Для каждого значения параметра a решите уравнение

$$\log_2^2\left(\frac{x-3a}{x}\right)+4\left(\log_4(x-3a)\right)\log_2 x-8\log_4^2 x=0.$$

8. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$) $AA_1 : AB = 4 : 3$. На боковых ребрах AA_1, BB_1 и CC_1 взяты точки K, L и M соответственно так, что $AK : KA_1 = 3 : 1$, $BL = LB_1$, $CM : MC_1 = 1 : 3$. Найдите двугранный угол между плоскостями KLM и ABC.

Вариант 6

(физический факультет)

1. Решите уравнение

$$\sin x\sin 4x+\sin 5x\sin 2x-\cos 3x=0.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{|x-1|}{1-\dfrac{6}{|x-1|}}<-1.$$

3. Решите неравенство

$$\log_2\left(\left(2-2x-x^2\right)(x+2)\right)-$$
$$-\log_8\left(\left(4+4x+x^2\right)(8x+16)\right)+1>0.$$

4. В окружности с радиусом 4 через точку D диаметра BC ($BD : DC = 5 : 3$) проведена хорда EF, перпендикулярная к этому диаметру. Найдите радиус окружности, касающейся отрезков BD, DF и дуги BF.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3\cdot 2^{x-2y}-\sqrt{2x-2y}=24-x,\\ 2^{x-2y}+2\sqrt{2x-2y}=2x+8.\end{cases}$$

6. В трапеции $BCDE$ ($CD \parallel BE$) $BC \perp BE$, $CD = 10$, $BE = 14$, LN – средняя линия (точка L – на стороне BC). Прямая, проходящая через точку B и перпендикулярная к стороне DE, пересекает отрезок LN в точке M, $LM : MN =$ $= 2 : 1$. Найдите площадь трапеции $BCDE$.

7. При каких значениях параметра a уравнение

$$\left(1+\sin(3ax)\right)\sqrt{5\pi x-x^2}=0$$

имеет ровно 5 различных корней?

8. В правильной треугольной пирамиде $SLMN$, с вершиной S, проведена медиана MP треугольника SMN и даны $LM = 2$, $SL = 6$. Через середину K ребра SM проведена прямая KE, параллельная ребру LN. Через точку L проведена прямая, пересекающая прямые MP и KE в точках A и B соответственно. Найдите длину отрезка AB.

Вариант 7

(вступительный экзамен для победителей III и IV этапов Всероссийской олимпиады; факультеты – химический, наук о материалах, биологический, фундаментальной медицины, биоинженерии и биоинформатики, почвоведения, географический)[1]

1. Решите уравнение

$$\sqrt{x-2}=x-2.$$

---

[1] *На каждом факультете предлагались какие-то 6 из 7 задач.*

2. Решите уравнение

$$\cos 4x + 2\cos^2 x = 1 .$$

3. Решите неравенство

$$\log_{\sqrt{3}}(x+1) - \log_{\sqrt{3}}(x-1) > \log_3 4 .$$

4. При каждом значении параметра a решите систему

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 8a^2, \\ xy = 2a^2. \end{cases}$$

5. Точка D лежит на окружности, описанной около правильного треугольника ABC. Длина отрезка BD равна 1, а длина отрезка AD равна 3. Найдите длину отрезка DC.

6. Найдите все пары натуральных чисел k и l, удовлетворяющих условиям:

1) k и l имеют общий целый делитель, больший 4;
2) $53 < k < l$;
3) $k + l \le 119$.

7. На боковых ребрах SA, SB и SC четырехугольной пирамиды $SABCD$, основание $ABCD$ которой есть квадрат, взяты соответственно точки A_1, B_1 и C_1 так, что $SA_1 : SA = 3:7$, $SB_1 : SB = 2:7$ и $SC_1 : SC = 4:9$. Плоскость, проходящая через точки A_1, B_1 и C_1, пересекает ребро SD в точке D_1. Найдите отношение $SD_1 : SD$ и отношение объема пирамиды $SA_1B_1C_1D_1$ к объему пирамиды $SABCD$.

Вариант 8

(химический факультет и факультет наук о материалах)

1. Решите неравенство

$$\frac{10 + 3x - x^2}{x^2 - 3x + 2} \le 1 .$$

2. Решите уравнение

$$\sqrt{1 + \sin x} = 1 - 2\sin x .$$

3. Решите неравенство

$$\sqrt{\log_5 x + 3} - \sqrt{\log_5 x - 2} < \sqrt{\log_5 x - 1} .$$

4. Известно, что трапеция $ABCD$ равнобедренная, $BC \parallel AD$ и $BC > AD$. Трапеция $ECDA$ также равнобедренная, причем $AE \parallel DC$ и $AE > DC$. Найдите BE, если известно, что косинус суммы углов CDE и BDA равен $1/3$, а $DE = 7$.

5. Дан куб $EFGHE_1F_1G_1H_1$ с длиной ребра, равной 2. На ребрах EH и HH_1 взяты точки A и B такие, что $EA/AH = 2$, $HB/BH_1 = 1/2$. Через точки A, B, G_1 проведена плоскость. Найдите расстояние от точки E до этой плоскости.

6. Найдите все значения параметров a и b, при которых среди корней уравнения

$$\cos^{1/2} x + \left(a^2 - ab + b^2 - 3\right)^2 - \left(4a^2 - 4 - b^2 + 2ab\right)(x+1)\cdot 2x = 0$$

есть два различных корня с равными абсолютными величинами.

Вариант 9

(биологический факультет, факультет фундаментальной медицины, факультет биоинженерии и биоинформатики)

1. Решите уравнение

$$\sqrt{x+2} = |x-1| .$$

2. Решите уравнение

$$\sin x \sin 3x = \cos 2x \cos 4x .$$

3. В равнобочной трапеции с основаниями 1 и 4 расположены две окружности, каждая из которых касается другой окружности, двух боковых сторон и одного из оснований. Найдите площадь трапеции.

4. Решите неравенство

$$\log_{\left(2^x-2\right)^2}\left(4^{x+1} - 5\cdot 2^{x+2} + 24\right) - \log_{\left(2^x-2\right)^{-2}}\left(2^{2x-2} - 7\cdot 2^{x-2} + \frac{5}{2}\right) \ge \frac{3}{2} .$$

5. В шар радиуса 4 вписана правильная шестиугольная пирамида с высотой 6, а в нее вписан второй шар. Найдите радиус второго шара.

Вариант 10

(факультет почвоведения)

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2x^2 - 3x$ при $x \in [-1; 3]$.

2. Решите уравнение

$$|5x+1| + 7x + 2 = 0 .$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{x^2 + 5x + 4} - \sqrt{x^2 - x - 6} = -\sqrt{2x^2 + 4x - 2} .$$

4. Решите неравенство

$$\log_{0,5}\left(2^{x+1} - 3\right) \ge x - 1 .$$

5. Найдите все значения x, удовлетворяющие неравенству $0 \le x \le \pi$ и являющиеся решениями уравнения

$$\sqrt{\operatorname{tg} 3x} = \sqrt{-\operatorname{tg} x} .$$

6. В окружность радиуса 5 вписан квадрат. На окружности отмечена точка, расстояние от которой до одной из вершин квадрата равно 6. Найдите расстояния от этой точки до трех других вершин квадрата.

7. Докажите, что график функции

$$y = 4x + \log_2\left(\frac{x^2 + 5x}{x^2 + 3x - 4}\right)$$

имеет центр симметрии, и найдите координаты (x, y) этого центра симметрии.

Вариант 11

(географический факультет)

1. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x^6 - 64}}{x - 3} \ge 0 .$$

2. Решите уравнение

$$\frac{\sin 3x}{\sin x + \sin 2x} = 0 .$$

3. Пункты A и B соединены двумя дорогами. Первая дорога разделена паромной переправой с одним паромом. На второй дороге препятствий нет. Переправа на пароме занимает $\frac{1}{2}$ часа. Паром работает без перерывов. Из пункта A по первой дороге выезжает автомобиль, скорость движения которого по дороге равна 60 км/ч. Одновременно с ним из пункта B по той же дороге выезжает трактор со скоростью 20 км/ч. Автомобиль без задержки переправляется паромом и встречает трактор, ожидающий паром. После прибытия в пункт B автомобиль без остановки возвращается по второй дороге и прибывает в пункт A на 15 минут раньше трактора, затратив на обратный путь на $\frac{1}{2}$ часа больше, чем на путь из A в B. Найдите:

а) разность между длинами второй и первой дорог, не учитывая длину переправы;

б) длину второй дороги, если известно, что, поехав обратно по первой дороге, автомобиль прибыл бы в пункт A одновременно с трактором.

4. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки K, L, M, N – середины сторон AB, BC, CD, DA соответственно. Отрезки KM и LN пересекаются в точке E. Площади четырехугольников $AKEN$, $BKEL$ и $DNEM$ равны 6, 6 и 12 соответственно. Найдите:

а) площадь четырехугольника $CMEL$;

б) отрезок CD, если $AB = \frac{1}{2}$.

5. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} |x-a| + |y-a| + |a+1-x| + |a+1-y| = 2, \\ y + 2|x-5| = 6 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

6. Сколько цифр содержится в десятичной записи 99991-го члена последовательности a_n, если $a_1 = 0$, $a_{n+1} = 2a_n + 1024$, $\lg 2 = 0{,}301029\ldots$?

Вариант 12

(геологический факультет)

1. Решите неравенство

$$\frac{x-2}{|x-2|} \le 4 - x^2.$$

2. Какие значения может принимать $\sin x$, если

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}?$$

3. Решите неравенство

$$\sqrt{441 - x^2} \le x + 21.$$

4. В треугольнике ABC угол B прямой, точка M лежит на стороне AC, причем $AM : MC = 1 : 3\sqrt{3}$. Величина угла ABM равна $\pi/6$, $BM = 6$. Найдите величину угла BAC и расстояние между центрами окружностей, описанных вокруг треугольников BCM и BAM.

5. Решите неравенство

$$\log_{3-x}\left(x^2 - 10x + 25\right) - 2\log_{3-x}\left(4x - x^2 + 5\right) + 2 \le 0.$$

6. Две группы геологов исследуют маршрут, проходящий от пункта A через пункт B до пункта C. Первая группа проходит весь маршрут за 2 дня, а вторая – за 3. Расстояние между A и B вдвое меньше расстояния между B и C. Скорости движения групп на участках AB и BC постоянны, но на участке AB скорости обеих групп в m раз меньше, чем их скорости на участке BC. Группы выходят одновременно из A и C навстречу друг другу. Если первая группа выходит из A, а вторая из C, то они встречаются в B. Если же первая выходит из C, а вторая из A, то они встречаются в пункте D. Какую часть от длины всего маршрута составляет расстояние между B и D? Чему равно значение m?

7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\sin x}{\cos(x+y)} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ \dfrac{\cos y}{\cos(x+y)} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

8. У пирамиды $SABC$ основанием является правильный треугольник ABC со стороной $2\sqrt{2}$. Ребра SB и SC равны, шар касается сторон основания, плоскости грани SBC, а также ребра SA. Чему равен радиус шара, если $SA = \frac{3\sqrt{2}}{2}$?

Вариант 13

(филологический факультет)

1. При каких значениях параметра a уравнение

$$x^2 + x + \frac{2a-1}{a+5} = 0$$

не имеет решений?

2. Решите уравнение

$$4\cos^2 3x - 4\cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) - 1 = 0.$$

3. Решите уравнение

$$(x+4)\left(x^2+4\right) = 5 - 2^{x+4} - 16\left(\sqrt{2}\right)^x.$$

4. Из точки M на плоскость α опущен перпендикуляр MH длины $\sqrt{3}$ и проведены две наклонные, составляющие с перпендикуляром углы по 60°. Угол между наклонными равен 120°.

а) Найдите расстояние между основаниями A и B наклонных.

б) На отрезке AB как на катете в плоскости α построен прямоугольный треугольник ABC (угол A прямой). Найдите объем пирамиды $MABC$, зная, что $\cos\angle BMC = -\frac{1}{3}$.

5. Криптографическая лаборатория получила задание расшифровать три текста одинакового объема. Капитан Иванов на расшифровку первого и второго текстов в сумме затратил 40,5 минут, а на расшифровку второго и третьего – 37,5 минут. Оказалось также, что второй текст он расшифровывал с такой же скоростью, как в среднем первый и третий. За какое время капитан Иванов выполнил задание?

6. Дана система уравнений

$$\begin{cases} y = a|x - 3a|, \\ |x| = b - |y|. \end{cases}$$

а) При каких значениях параметров a и b эта система относительно неизвестных x и y имеет бесконечно много решений?

б) На плоскости Oxy изобразите множество точек, координаты которых таковы, что система относительно неизвестных a и b имеет ровно три решения.

Вариант 14

(экономический факультет, отделение экономики)

1. Вычислите произведение всех отрицательных корней уравнения

$$\frac{3x^3}{2\sin\frac{14\pi}{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}x} = 2\sqrt{5}x \operatorname{tg}\frac{13\pi}{4}.$$

2. Решите неравенство

$$1+2\sin^2 4\pi x\cdot\log_{\frac{1}{3}}\left(11x-4x^2-7\right)\le\cos 8\pi x.$$

3. Окружность, пересекающая боковые стороны AC и CB равнобедренного треугольника ACB в точках P и Q соответственно, является описанной около треугольника ABQ. Отрезки AQ и BP пересекаются в точке D так, что $AQ : AD = 4 : 3$. Найдите площадь треугольника DQB, если площадь треугольника PQC равна 3.

4. Решите неравенство

$$\log_{x+3}(2x+5)\log_{4x^2+20x+25}\left(x^2+2x+1\right)+\log_{\left(\frac{1}{3}-\frac{x}{3x+9}\right)}\left(x^2-x-2\right)\ge 0.$$

5. Паром грузоподъемностью 109 тонн перевозит джипы и грузовики. Количество перевозимых на пароме грузовиков не менее чем на 20% превосходит количество перевозимых джипов. Вес и стоимость перевозки одного джипа составляют 3 тонны и 600 рублей, грузовика – 5 тонн и 700 рублей соответственно. Определите наибольшую возможную суммарную стоимость перевозки всех джипов и грузовиков при данных условиях.

6. Найдите наибольшее значение параметра w, при котором имеет решение система

$$\begin{cases}4\sin^2 y-w=16\sin^2\dfrac{2x}{7}+9\operatorname{ctg}^2\dfrac{2x}{7},\\ \left(\pi^2\cos^2 3x-2\pi^2-72\right)y^2=\\ \qquad=2\pi^2\left(1+y^2\right)\sin 3x.\end{cases}$$

7. В правильную треугольную пирамиду с высотой $h=\dfrac{5}{4}$ и стороной основания $a=\sqrt{15}$ вложены пять шаров одинакового радиуса. Один из шаров касается основания пирамиды в его центре. Каждый из трех других шаров касается своей боковой грани пирамиды, причем точка касания лежит на апофеме и делит ее в отношении 1 : 2, считая от вершины. Пятый шар касается всех четырех шаров. Найдите радиус шаров.

Вариант 15

(Высшая школа бизнеса)

1. Решите неравенство

$$\frac{x+1}{|x-1|}\ge 1.$$

2. Решите уравнение

$$\log_3(3\sin x)+\log_{\frac{1}{3}}(\cos x)=1.$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{y-2}=1,\\ x+y-20=0.\end{cases}$$

4. Найдите периметр треугольника ABC, если известны координаты его вершин $A(-3;5)$, $B(3;-3)$ и точки $M(6;1)$, являющейся серединой стороны BC.

5. Сколько времени в течение суток на электронном табло вокзальных часов, которые показывают время в диапазоне от 00:00 до 23:59, присутствует хотя бы одна цифра 3?

6. Найдите все пары целых неотрицательных чисел $(k;m)$, являющихся решениями уравнения

$$2k^2+7k=2mk+3m+36.$$

7. Найдите наибольшее значение выражения $3x-2y$ на множестве переменных x, y, удовлетворяющих условию

$$4x^2+y^2=16.$$

8. Найдите все значения параметра $p\in[-4;4]$, при которых неравенство

$$(p-2)\left((x+1)(p-3)+2x\right)>0$$

выполняется при любых $x\ge 0$.

Вариант 16

(факультет психологии)

1. Решите уравнение

$$4^x-12\cdot 2^x-1=0.$$

2. Решите неравенство

$$\log_{\frac{x-2}{2x-10}}\left(\frac{x+2}{4}\right)\le 1.$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{15}\cos x\operatorname{ctg}x+\sqrt{5}\cos x+\sqrt{5}\operatorname{ctg}x=0$$

и найдите сумму его различных корней, принадлежащих отрезку $[-\pi;\pi]$.

4. Окружность радиуса 3 проходит через вершины A и B прямоугольного треугольника ABC с катетом $AB = 5$. Прямая CD касается этой окружности в точке D. Найдите величину угла ABD и длину второго катета AC, если луч DA делит угол CDB пополам.

5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left|x^2-5|x|\right|=a(x+4)$$

имеет ровно три различных корня.

Вариант 17

(Институт стран Азии и Африки)

1. Решите неравенство

$$(x+3)\sqrt{x^2-25}<0.$$

2. Решите уравнение

$$\sin^3 x-\cos^4 x=-1.$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}x^2+y^2=xyz,\\ y^2+z^2=xyz,\\ z^2+x^2=xyz.\end{cases}$$

4. Решите уравнение

$$\left(2\log_4\left(2^{2x}+1\right)-x\right)\left(\log_2\left(2^x+2^{-x}\right)-2\right)=8.$$

5. Две окружности радиусов $\sqrt{2}$ и 2 пересекаются друг с другом, расстояние между их центрами равно $\sqrt{3}+1$. Найдите отношение площади круга, вписанного в общую часть кругов, ограниченных этими окружностями, к площади общей части.

6. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $\dfrac{y^2}{25}+\dfrac{w^2}{144}$, если величины x, y, z, w удовлетворяют системе

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 4y - 20 = 0, \\ z^2 + w^2 - 2w - 143 = 0, \\ xw + yz - x + w + 2z - 61 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 18

(социологический факультет)

1. Решите неравенство

$$\frac{x^2 + 8x + 15}{x^2 + 7x + 14} \leq 0 .$$

2. Решите уравнение

$$4\sin^2 3x - 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) - 4\cos^2(x - \pi) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{7}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{7} .$$

3. Популярность продукта *А* за 2002 год выросла на 20%, в следующем году снизилась на 10%, а в конце 2004 года сравнялась с популярностью продукта *Б*. Популярность продукта *Б* в 2002 году снизилась на 20%, затем на протяжении одного года не изменялась, а за 2004 год выросла на 40%. Как изменилась популярность продукта *А* за 2004 год, если в начале 2002 года она составляла $2/3$ от популярности продукта *Б?*

4. В треугольнике ABC угол при вершине B равен $\pi/3$, а длины отрезков, соединяющих центр O вписанной окружности с вершинами A и C, равны 4 и 6 соответственно. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

5. Три числа, являющиеся длинами ребер прямоугольного параллелепипеда с диагональю 6, образуют арифметическую прогрессию. Кубы этих чисел тоже образуют арифметическую прогрессию. Найдите эти числа.

6. Для каждого положительного значения параметра c изобразите множество тех пар (b, a) , для каждой из которых уравнение

$$bx^2 + ax - \frac{b}{4} + c = 0$$

имеет два различных отрицательных корня, и укажите все значения параметра a, при каждом из которых множество соответствующих значений состоит из двух непересекающихся интервалов.

Вариант 19

(факультет государственного управления)

1. Тест, который должен пройти испытуемый, состоит из 26 вопросов. За каждый неверный ответ у испытуемого вычитается пять очков, а за каждый правильный – начисляется восемь очков. Испытуемый дал ответы на все вопросы. На сколько вопросов он ответил правильно, если в итоге сумма полученных им очков оказалась равной нулю?

2. Решите уравнение

$$\sin 2x - 2\cos 4x + \sin 6x = 2 .$$

3. Длины трех сторон четырехугольника, вписанного в окружность радиуса $2\sqrt{2}$, одинаковы и равны 2. Найдите длину четвертой стороны.

4. Компания предложила 350 своим служащим выполнить сверхурочную работу, причем каждому мужчине предлагалось в виде вознаграждения 20 долларов, а каждой женщине – 16 долларов 30 центов. Все женщины согласились с этим предложением, а часть мужчин отказалась. Общая сумма выплаченного вознаграждения составила 5705 долларов. Какова сумма вознаграждения, выплаченного всем женщинам?

5. Найдите все значениях x, удовлетворяющие неравенству

$$\min\left(\log_3(3x + 5), \sqrt{x^2 - x - 2}\right) < 2 .$$

6. Каково минимальное число гирь, необходимых для того, чтобы взвесить любой груз массой от 1 до 39 килограммов на рычажных (чашечных) весах, если известно, что этот груз может весить только целое число килограммов?

7. На плоскости Oxy найдите наибольшее расстояние между такими двумя точками с координатами (x, y) , что x и y являются целыми числами и удовлетворяют уравнению

$$4\frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{15}{xy} .$$

ФИЗИКА

Физический факультет

Задачи устного экзамена

1. По горизонтальной плоскости скользит квадратная пластина $ABCD$. В некоторый момент скорости вершин A и B оказались перпендикулярными друг другу, а скорость вершины C была равна v и составила с вектором $\overrightarrow{CD}$ угол, тангенс которого равен 0,5. Найдите скорость точки M, являющейся серединой отрезка AB, в этот момент времени.

2. Автомобиль массой m со всеми ведущими колесами, стоящий на прямолинейном горизонтальном участке дороги, начинает движение. При этом двигатель развивает постоянную мощность N. Коэффициент трения колес о дорогу μ . Пренебрегая силой сопротивления движению автомобиля, найдите зависимость его скорости v от времени.

3. На гладкой плоскости, образующей с горизонтом угол α , лежит длинная доска массой M, упирающаяся нижним торцом в легкую пружину, второй конец которой закреплен (рис.1). На доске находится кубик массой m, который с помощью параллельной доске нити медленно и равномерно перемещают вверх. Оси пружины и доски, нить и центр масс кубика находятся в одной вертикальной плоскости. При каком коэффициенте трения μ кубика о доску он будет совершать гармонические колебания после внезапного обрыва нити?

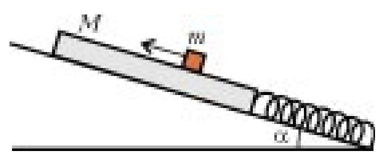

Рис. 1

4. Через кран, вмонтированный в дно цилиндра, ось которого горизонтальна, закачали некоторое количество гелия. При этом поршень в цилиндре перемещался, преодолевая действие внешнего атмосферного давления p_0 и силу сухого трения о стенки цилиндра. Затем кран закрыли, а температуру газа изменили так, что его объем установился равным V_0 . Какое количество теплоты Q нужно сообщить газу, чтобы расстояние между дном цилиндра и поршнем увеличилось на ΔL , если площадь сечения поршня S, а величина силы сухого трения скольжения $F_{тр}$?

5. Между дном цилиндра и гладким поршнем при температуре $T_1 = 111$ К содержится смесь гелия и криптона с относительной влажностью $\varphi = 0,5$. Плотность гелия в n = = 2 раза меньше плотности криптона. Ось цилиндра горизонтальна. Вне цилиндра давление равно нормальному атмосферному. Температура кипения криптона при нормальном атмосферном давлении равна $T_к \approx 121$ К . Молярные массы гелия и криптона равны $M_г = 4$ г/моль и $M_к = 84$ г/моль.

На сколько нужно понизить температуру смеси, чтобы на стенках цилиндра выпала роса? Считать, что давление насыщенных паров криптона линейно зависит от его абсолютной температуры.

6. На расстоянии $2R$ от центра закрепленного изолированного проводящего шара радиусом R удерживают положительный точечный заряд $2Q$. Заряд самого шара равен Q. Какую скорость v может приобрести электрон, начинающий свое движение из бесконечно удаленной от шара точки, к моменту попадания на шар?

7. Тонкое проводящее кольцо радиусом r находится в горизонтальном однородном магнитном поле с индукцией B, перпендикулярной плоскости кольца (рис.2). Тонкий подвижный проводник OA, имеющий массу m и сопротивление R, одним концом шарнирно закреплен в центре кольца (точка O), а другим (точка A) скользит по кольцу. Найдите закон, по которому должна изменяться со временем ЭДС источника напряжения, подключенного к точке O и кольцу, чтобы проводник вращался с постоянной угловой скоростью ω. Сопротивлением кольца и контактов, индуктивностью контура, по которому протекает ток, и трением пренебречь. Направление вектора ускорения свободного падения $\vec{g}$ указано на рисунке.

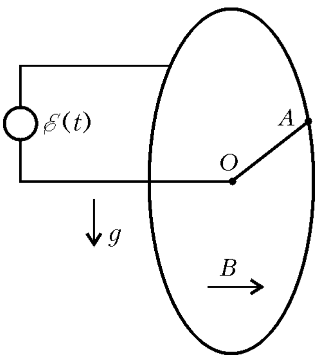

Рис. 2

8. Кольцо радиусом a из тонкой медной проволоки, имеющее сопротивление R, удерживают в однородном магнитном поле, линии индукции которого перпендикулярны плоскости кольца. Проекция B вектора индукции на ось кольца изменяется со временем с периодом T по закону, изображенному на рисунке 3. Пренебрегая индуктивностью кольца, найдите среднюю тепловую мощность, выделяющуюся в кольце.

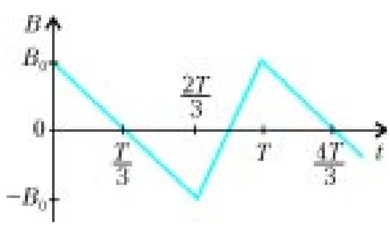

Рис. 3

9. Точечный источник света расположен на главной оптической оси на расстоянии $d = 30$ см от тонкой собирающей линзы, оптическая сила которой $D = 5$ дптр. Диаметр линзы $b = 1$ см. На какое расстояние Δx сместится изображение источника, если между ним и линзой перпендикулярно ее главной оптической оси поместить стеклянную пластинку толщиной $h = 15$ см с показателем преломления $n = 1{,}57$?

10. На горизонтальную поверхность стекла налит тонкий слой прозрачной жидкости с показателем преломления n. На жидкость сверху под углом α к вертикали падает параллельный пучок света с длиной волны λ. Жидкость медленно испаряется. В некоторый момент интенсивность отраженного света становится максимальной, а затем убывает и вновь становится максимальной через промежуток времени τ. Найдите скорость v, с которой уменьшается толщина слоя жидкости из-за испарения.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Задачи устного экзамена

1. Узнав о готовящемся нападении неприятеля, решетку ворот замка начали опускать с постоянной скоростью $u = 0{,}2$ м/с. Мальчик, игравший на расстоянии $l = 20$ м от ворот, в тот же момент бросился бежать к воротам. Сначала он двигался равноускоренно, а затем, набрав максимальную скорость $v_0 = 2{,}5$ м/с, – равномерно. С каким минимальным ускорением $a_{\min}$ мог разгоняться мальчик, чтобы успеть пробежать под решеткой ворот в полный рост, если в начальный момент нижний край решетки находился на расстоянии $H = 3$ м от поверхности земли? Рост мальчика $h = 1$ м.

2. При поливе садового участка наконечник водопроводного шланга расположили на высоте $h = 0{,}8$ м над поверхностью земли, направив струю воды вверх под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Найдите массу m воды, содержащейся в отрезке струи от наконечника шланга до поверхности земли. Скорость воды, бьющей из шланга, $v_0 = 6$ м/с, внутреннее сечение наконечника шланга $S = 3$ см^2, плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м^3. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.

3. На горизонтальной доске, имеющей прямоугольный уступ высотой $H = 10$ см, располагается вплотную к уступу однородный цилиндр радиусом $R = 25$ см (рис. 4). Доску начинают двигать с некоторым ускорением a, направленным вправо. Каково максимально возможное значение ускорения $a_{\max}$, при котором цилиндр не будет подниматься на уступ? Все поверхности гладкие. Ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2.

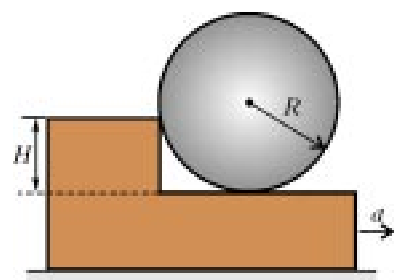

Рис. 4

4. Однородный стержень может вращаться без трения вокруг горизонтальной оси, проходящей через его конец (рис. 5). К другому концу стержня приложена сила (F), направленная горизонтально и перпендикулярная оси вращения стержня. Под действием этой силы стержень отклонен от вертикали на угол $\alpha = 45°$. Какой угол β составляет с вертикалью сила (R), действующая на стержень со стороны оси?

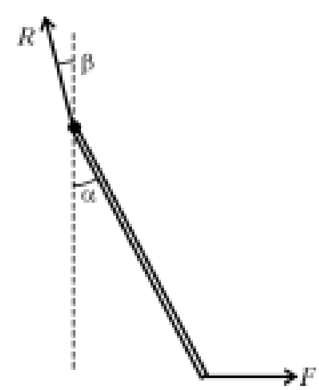

Рис. 5

5. Горизонтальная трубка сечением S, открытая с двух концов, закреплена неподвижно (рис. 6). В ней находятся два поршня, один из которых соединен пружиной жесткостью k с неподвижной стенкой. В исходном состоянии давление воздуха между поршнями равно атмосферному давлению p_0, пружина не деформирована и расстояние между поршнями равно l. Правый поршень медленно переместили вправо

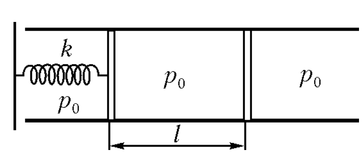

Рис. 6

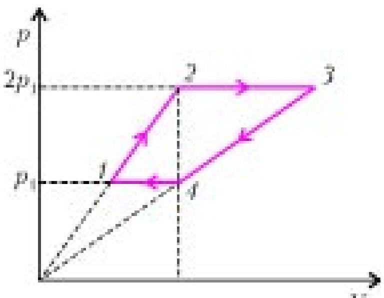

Рис. 7

на расстояние l. Какое давление воздуха p_1 установилось при этом между поршнями? Температуру воздуха считать постоянной, трением пренебречь.

6. Над идеальным одноатомным газом проводят процесс, изображенный на рисунке 7. Найдите работу A, совершаемую газом в этом процессе, если на участке *2 – 3* газ получает количество теплоты $Q_{23} = 200$ Дж. Объем газа в точках *2* и *4* один и тот же, давление газа в точке *2* в два раза больше давления газа в точке *1*.

7. На рисунке 8 изображены pV-диаграммы двух процессов, проводимых над одним и тем же идеальным одноатомным газом. Масса газа, участвующего в процессе *1 – 2*, в $k = 2$ раза больше, чем масса газа, с которым проводится процесс *3 – 4*. Температура в точке *1* равна температуре в точке *3*, а температура в точке *2* равна температуре в точке *4*. Найдите отношение n количеств теплоты, получаемых газом в процессах *1 – 2* и *3 – 4*.

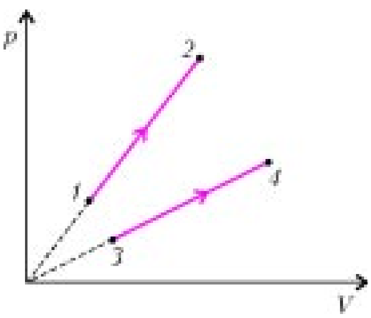

Рис. 8

8. В теплоизолированном цилиндрическом сосуде под поршнем массой m находится идеальный одноатомный газ. Расстояние между поршнем и дном сосуда x. На какое расстояние Δx опустится поршень, если сверху положить на него груз массой Δm? Считать, что $\Delta m \ll m$, начальное и конечное положения поршня являются положениями равновесия, трение поршня о стенки сосуда пренебрежимо мало. Атмосферное давление не учитывать.

9. Непроводящая трубка, открытая с обоих концов, расположена горизонтально. В трубке находятся два металлических поршня площадью S каждый, способные перемещаться без трения. Пространство между поршнями заполнено воздухом при атмосферном давлении, причем расстояние между поршнями мало по сравнению с их диаметром. Во сколько раз n уменьшится расстояние между поршнями, если зарядить их разноименными зарядами q и $-q$? Температура воздуха постоянна. Атмосферное давление p_0. Электрическое поле между поршнями считать однородным. Электрическая постоянная равна ε_0.

10. На горизонтальной непроводящей шероховатой поверхности закреплен маленький шарик, имеющий заряд q. Маленький брусок массой m, несущий такой же по знаку и величине заряд, помещают на эту поверхность на расстоянии l_0 от закрепленного заряженного шарика. Какой путь l пройдет брусок до остановки, если его отпустить без начальной скорости? Коэффициент трения между бруском и поверхностью μ, электрическая постоянная ε_0, ускорение свободного падения g.

11. Генератор постоянного тока соединен с потребителем (полезной нагрузкой) линией электропередачи, имеющей сопротивление $R = 10$ Ом. ЭДС генератора $\mathcal{E} = 500$ В, его мощность $P = 10$ кВт. Определите отношение η мощности, выделяемой в полезной нагрузке, к мощности генератора. Внутренним сопротивлением генератора пренебречь.

12. Маленький шарик массой m, несущей положительный заряд q, подвешен на нити длиной l и помещен в однородное магнитное поле с индукцией B, направленной горизонтально от нас (рис. 9). Сообщив шарику некоторую скорость, направление которой показано на рисунке, его приводят в движение по окружности в вертикальной плоскости, перпендикулярной магнитному полю и совпадающей с плоскостью рисунка. При какой минимальной скорости $v_{\min}$ шарика в нижней точке он сможет совершить полный оборот?

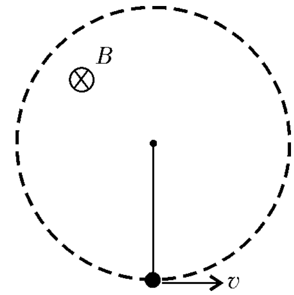

Рис. 9

13. На поверхность зеркального шара падают два параллельных луча света, лежащие в плоскости, проходящей через центр шара (рис. 10). Расстояние между лучами $a = 1$ см. Известно, что при отражении от поверхности шара один из лучей отклоняется от первоначального направления на угол $\alpha = 90°$, а другой – на угол $\beta = 60°$. Найдите радиус шара R.

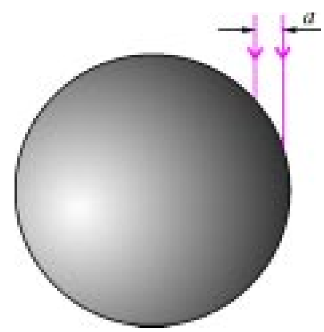

Рис. 10

14. В толще стекла с показателем преломления $n = 1{,}5$ имеется сферическая полость, заполненная воздухом (рис. 11). Луч света, распространяющийся в стекле, падает на полость на малом расстоянии a от оси OO', проходящей через центр полости параллельно лучу. На каком расстоянии b от этой оси находится точка выхода луча из полости? Углы падения и преломления считать малыми.

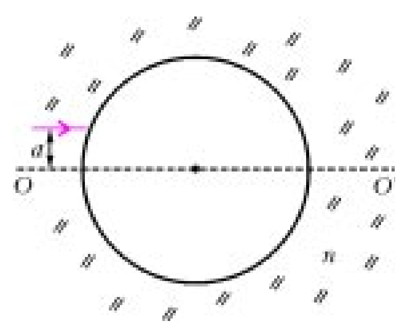

Рис. 11

15. Плоскопараллельная пластинка толщиной $d = 1$ мм изготовлена из прозрачной пластмассы с показателем преломления $n = 1{,}5$. Изгибая пластинку, ей придают форму, изображенную на рисунке 12, где показано поперечное сечение пластинки. Перпендикулярно торцу пластинки на него падает в плоскости рисунка параллельный пучок света. Определите минимально допустимый радиус кривизны $R_{\min}$ изгиба пластинки, при котором свет не будет выходить из пластинки через ее боковую поверхность. Радиус кривизны определяется по внешней (по отношению к направлению изгиба) поверхности пластинки.

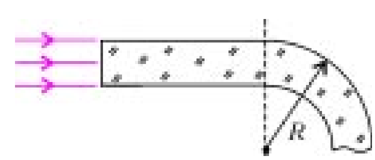

Рис. 12

16. Две параллельные друг другу металлические пластины, расстояние между которыми $d = 1$ см много меньше их размеров, подключены к источнику с напряжением $U = 12{,}5$ В (рис. 13). Сначала положительно заряженную пластину облучают светом частотой $\nu_1 = 7 \cdot 10^{14}$ Гц, а затем – светом частотой $\nu_2 = 4 \cdot 10^{14}$ Гц. На какую величину Δl

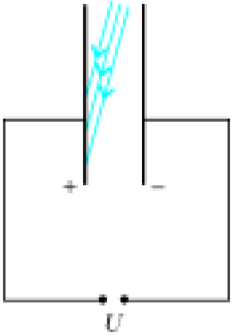

Рис. 13

изменяется минимальное расстояние, на которое фотоэлектроны могут приблизиться к поверхности отрицательно заряженной пластины, при изменении частоты света от ν_1 до ν_2? Частота света, соответствующая красной границе фотоэффекта, меньше частоты ν_2. Элементарный заряд $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, постоянная Планка $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с.

Химический факультет

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Сформулируйте закон электролиза Фарадея.

2. Что такое «инерциальная система отсчета»?

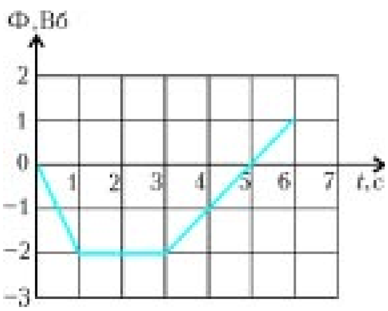

Рис. 14

3. Магнитный поток, пронизывающий проводящий контур, изменяется со временем так, как показано на рисунке 14. В каком промежутке времени сила тока в контуре максимальна?

4. Постройте изображение светящейся точки S в тонкой рассеивающей линзе (рис.15).

5. Во сколько раз изменилось бы (увеличилось или уменьшилось) давление идеального газа в данном объеме, если бы скорость каждой молекулы газа увеличилась в 2 раза?

6. Брусок массой $m = 2$ кг скользит по горизонтальной

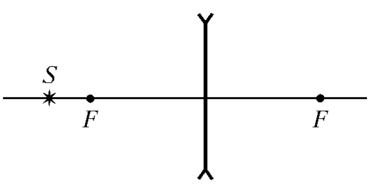

Рис. 15

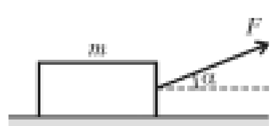

Рис. 16

поверхности под действием силы $F = 10$ Н, направленной под углом $\alpha = 45°$ к горизонту (рис.16). Найдите ускорение бруска. Коэффициент трения $\mu = 0{,}2$. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.

7. Найдите период обращения электронов в атоме гелия, считая, что два электрона движутся равномерно по окружности вокруг неподвижного ядра, находясь при этом на противоположных концах одного диаметра. Радиус окружности принять равным R. Заряд электрона e, его масса m.

8. Деревянный куб с ребром $a = 0{,}1$ м плавает так, что на две трети своего объема погружен в воду. Какую минимальную работу надо совершить, чтобы полностью погрузить куб в воду? Плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м^3, ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.

9. В процессе расширения объем идеального газа увеличивается от $V_1 = 2$ л до $V_2 = 3$ л, а давление линейно убывает от $p_1 = 600$ кПа до $p_2 = 400$ кПа. При этом газ получает от нагревателя количество теплоты $Q = 1$ кДж. Найдите изменение внутренней энергии газа.

10. Конденсатор емкостью $C = 3$ мкФ подсоединен к источнику постоянного тока с ЭДС $\mathcal{E} = 100$ В. Затем переключатель $П$ переводится с контакта *1* на контакт *2* (рис.17). Найдите количество теплоты, выделившееся в резисторе сопротивлением $R_1 = 200$ Ом в процессе полной разрядки конденсатора. Сопротивление $R_2 = 100$ Ом. Сопротивлением проводов пренебречь.

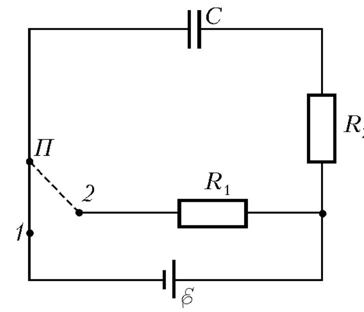

Рис. 17

Вариант 2

1. Сформулируйте третий закон Ньютона.

2. Дайте определение понятия «магнитный поток».

3. Сила тока, протекающего через резистор, имеющий сопротивление $R = 10$ Ом, меняется по гармоническому закону, представленному на рисунке 18. Какое количество теплоты выделяется в резисторе за один период изменений тока в этом случае?

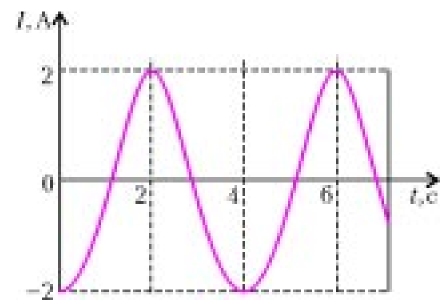

Рис. 18

4. Плоский конденсатор подключен к полюсам батареи с постоянной ЭДС. Во сколько раз изменится (увеличится или уменьшится) энергия электрического поля внутри конденсатора, если расстояние между обкладками конденсатора увеличить в 2 раза?

5. Состояние некоторого количества идеального газа изменялось в соответствии с VT-диаграммой, представленной на рисунке 19. Изобразите этот же процесс на pV-диаграмме.

6. Катод фотоэлемента облучается монохроматическим желтым светом с длиной волны $\lambda = 600$ нм. За некоторое время фотоэлемент поглотил энергию $W = 10^{-5}$ Дж. Найдите число поглощенных при этом фотонов. Постоянная Планка $h \approx 6{,}6 \times 10^{-34}$ Дж · с. Скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

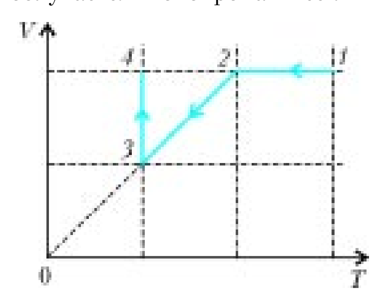

Рис. 19

7. Шарик падает с высоты $H = 10$ м без начальной скорости. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найдите среднюю скорость тела на второй половине пути. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.

8. Какое максимальное количество воды, взятой при температуре $t_1 = 35$ °C, может быть охлаждено до температуры $t = 10$ °C, если охлаждение производить погружением $m = 20$ г льда, охлажденного до $t_2 = -20$ °C? Потери тепла не учитывать. Удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}3 \cdot 10^5$ Дж/кг, удельная теплоемкость воды $c_1 = 4200$ Дж/(кг · К), удельная теплоемкость льда $c_2 = 2100$ Дж/(кг · К).