Диэлектрики в электрическом поле

В.МОЖАЕВ

Пусть в пространстве имеется некоторое распределение зарядов. Если мы сохраним это распределение и заполним все пространство, где поле не равно нулю, диэлектриком, то напряженность электрического поля повсюду уменьшится в ε раз. Здесь ε – физическая характеристика диэлектрика, ее называют диэлектрической проницаемостью данного вещества. Это определение диэлектрической проницаемости среды не раскрывает механизма взаимодействия диэлектрика с внешним полем, но на школьном уровне этого вполне достаточно.

Типичным примером такой ситуации является заряженный конденсатор, например плоский, сферический или цилиндрический. Если мы сохраним распределение зарядов на его обкладках и полностью заполним его диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε, то напряженность поля в любой точке внутри конденсатора уменьшится в ε раз. Но если поле внутри конденсатора уменьшилось, а заряды на обкладках сохранились, то это означает, что должны появиться дополнительные заряды, которые создают поле, направленное навстречу полю наших зарядов. Так оно и происходит – на поверхностях диэлектрика, примыкающих к обкладкам конденсатора, появляются поляризационные заряды, причем их знаки противоположны знакам зарядов на обкладках, и результирующее поле внутри конденсатора уже создается всеми зарядами, включая и поляризационные.

А вот если мы будем поддерживать постоянной разность потенциалов между пластинами конденсатора, то после заполнения конденсатора диэлектриком поле внутри него не изменится. Сохранение величины поля означает рост свободных зарядов на обкладках конденсатора, и понятно, что заряд конденсатора возрастет именно в ε раз. Причем произойдет это благодаря источнику тока, присоединенного к конденсатору.

Еще одним фактором, влияющим на поле в диэлектрике, является конфигурация той части пространства, которая заполнена диэлектриком. Мы ограничимся наиболее простой формой диэлектрика: тонкая пластина или сферический слой.

А теперь перейдем к разбору конкретных примеров.

Задача 1. *Плоский воздушный конденсатор с квадратными пластинами частично заполнен диэлектриком, как это изображено на рисунке 1 для трех разных случаев. Определите напряженность электрического поля внутри диэлектрика, если заряд на обкладках конденсатора Q, площадь пластин S, диэлектрическая проницаемость среды* ε. *Размеры диэлектрика указаны на рисунке.*

Рассмотрим первый случай, когда конденсатор частично заполнен слоем диэлектрика толщиной h (см. рис.1,*а*). В отсутствие диэлектрика напряженность электрического поля в конденсаторе равна

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}. \qquad (1)$$

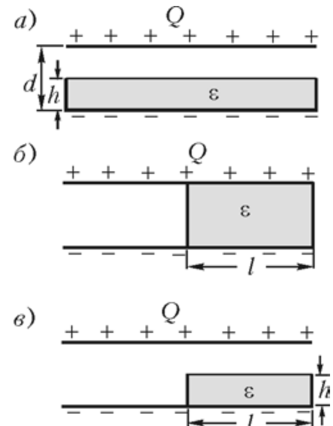

Рис. 1

При данном частичном заполнении пространства между обкладками диэлектриком мы можем рассматривать наш конденсатор как систему двух последовательно соединенных конденсаторов, один из которых воздушный емкостью

$$C_{\text{в}} = \frac{\varepsilon_0 S}{d-h},$$

а другой – полностью заполненный диэлектриком, емкость которого

$$C_{\text{д}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{h}.$$

На каждом из конденсаторов находится заряд Q, поэтому разность потенциалов на заполненной диэлектриком части конденсатора равна

$$U_{\text{д}} = \frac{Q}{C_{\text{д}}} = \frac{Qh}{\varepsilon_0 \varepsilon S},$$

а напряженность поля в диэлектрике составляет

$$E_{\text{д}} = \frac{U_{\text{д}}}{h} = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon S}. \qquad (2)$$

Сравнивая полученное выражение с напряженностью в отсутствие диэлектрика (1), мы видим, что напряженность поля в диэлектрике уменьшилась в ε раз и это ослабление поля не зависит от толщины слоя диэлектрика. При таком способе заполнения происходит максимальное ослабление поля в диэлектрике.

Перейдем ко второму случаю (см. рис.1,*б*). Теперь мы можем рассматривать наш конденсатор как систему двух параллельно соединенных конденсаторов с емкостями

$$C_{\text{в}} = \frac{\varepsilon_0 \sqrt{S}\left(\sqrt{S}-l\right)}{d} \text{ и } C_{\text{д}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon \sqrt{S} l}{d},$$

где $\sqrt{S}$ – линейный размер обкладок конденсатора. Общая емкость конденсатора составляет

$$C = C_{\text{в}} + C_{\text{д}} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}\left(1 + \frac{l(\varepsilon-1)}{\sqrt{S}}\right).$$

Разность потенциалов между обкладками нашего конденсатора равна

$$U = \frac{Q}{C} = \frac{Qd}{\varepsilon_0 S\left(1 + \frac{l(\varepsilon-1)}{\sqrt{S}}\right)},$$

а напряженность поля в диэлектрике –

$$E_{\text{д}} = \frac{U}{d} = \frac{Q}{\varepsilon_0 S\left(1 + \frac{l(\varepsilon-1)}{\sqrt{S}}\right)}. \qquad (3)$$

Проанализируем полученное выражение на зависимость от l. При стремлении l к $\sqrt{S}$ поле в диэлектрике уменьшается и стремится к значению

$$E_{\text{д}}\left(\sqrt{S}\right) = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon S},$$

а при стремлении l к нулю поле растет и при $l = 0$ становится равным

$$E_д(0)=\frac{Q}{\varepsilon_0 S}.$$

При произвольном значении l поле в диэлектрике заключено в пределах

$$\frac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon S}\le E_д(l)\le\frac{Q}{\varepsilon_0 S}.$$

В третьем случае (см. рис.1,*в*) мы можем рассматривать наш конденсатор как систему трех конденсаторов – соответствующая эквивалентная схема изображена на рисунке 2. Емкость первого, воздушного, конденсатора равна

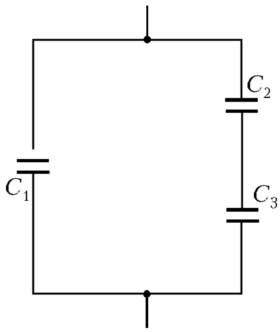

Рис. 2

$$C_1=\frac{\varepsilon_0\sqrt{S}\left(\sqrt{S}-l\right)}{d},$$

емкость второго, воздушного, конденсатора равна

$$C_2=\frac{\varepsilon_0\sqrt{S}l}{d-h},$$

а емкость третьего конденсатора, заполненного диэлектриком, равна

$$C_3=\frac{\varepsilon_0\varepsilon\sqrt{S}l}{h}.$$

Общая емкость двух последовательно соединенных конденсаторов (второго и третьего) составляет

$$C_{23}=\frac{C_2C_3}{C_2+C_3}=\frac{\varepsilon_0\varepsilon\sqrt{S}l}{h+\varepsilon(d-h)},$$

а общая емкость всех конденсаторов есть

$$C=C_1+C_{23}=\varepsilon_0\sqrt{S}\left(\frac{\sqrt{S}-l}{d}+\frac{\varepsilon l}{h+\varepsilon(d-h)}\right).$$

Разность потенциалов между обкладками нашего конденсатора равна

$$U=\frac{Q}{C},$$

заряд на последовательно соединенных конденсаторах равен

$$Q_{23}=UC_{23}=\frac{QC_{23}}{C},$$

разность потенциалов на третьем конденсаторе составляет

$$U_3=\frac{Q_{23}}{C_3}=\frac{QC_{23}}{C_3C},$$

а напряженность поля внутри диэлектрика есть

$$E_{др}=\frac{U_3}{h}=\frac{Q}{\varepsilon_0 S\left(\frac{h}{d}\left(1-\frac{l}{\sqrt{S}}\right)+\varepsilon\left(1-\frac{h}{d}+\frac{hl}{d\sqrt{S}}\right)\right)}.$$

Нетрудно убедиться, что полученное выражение при $l=\sqrt{S}$ переходит в выражение (2), а при $h=d$ – в выражение (3).

Следует отметить, что во втором и третьем случаях при сохранении заряда на обкладках конденсаторов происходит перераспределение этого заряда: поверхностная плотность зарядов на той части пластин, которые примыкают к диэлектрику, больше, чем на воздушной части пластин. Убедиться в этом мы предлагаем читателю в качестве упражнения.

Задача 2. *Проводящая заряженная сфера радиусом r_1 окружена сферическим слоем диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ε. Радиус внешней поверхности диэлектрика равен r_2. Определите поверхностную плотность поляризационных зарядов на внешней поверхности диэлектрика, если на сфере находится свободный заряд Q.*

Можно сразу сказать, что напряженность поля внутри диэлектрика будет в ε раз меньше по сравнению с полем без диэлектрика. Действительно, заряд на сфере сохраняется, сохраняется и его равномерное распределение по сфере (в силу сферической симметрии). Но диэлектрик заполняет только часть пространства, поэтому наше утверждение требует доказательства.

Заполним все пространство вне сферы ($r_1\le r\le\infty$) нашей диэлектрической средой. В этом случае напряженность электрического поля во всей этой области уменьшится в ε раз. Мысленно проведем сферу радиусом r_2 (рис.3). Пусть на поверхности сферы радиусом r_1 расположен свободный положительный заряд Q (черные крестики), тогда вблизи этой поверхности будет равномерно распределен связанный отрицательный заряд (красные черточки). Обозначим величину этого заряда через $q_{св}$. Вблизи сферической поверхности радиусом r_2 (с внутренней и внешней стороны) также будут расположены связанные заряды, равные по величине $q_{св}$ и противоположные по знаку. Связанные отрицательные заряды на сфере радиусом r_2 никакого влияния на поле в области $0\le r\le r_2$ не оказывают – результирующее поле, которое они создают в любой точке этой области, равно нулю. Поэтому мы можем убрать диэлектрик из области $r_2\le r\le\infty$, и ничего при этом не изменится в интересующей нас области.

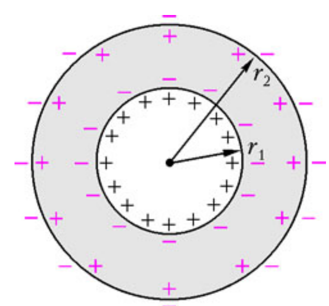

Рис. 3

Итак, напряженность электрического поля в области $r_1\le r\le r_2$ в отсутствие диэлектрика равна

$$E(r)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$

а при наличии диэлектрика –

$$E_д(r)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}.$$

С другой стороны, это же поле равно сумме полей, создаваемых зарядами Q и $q_{св}$, где $q_{св}$ – это отрицательные заряды у поверхности сферы радиусом r_1:

$$E_д(r)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}-\frac{q_{св}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}(Q-q_{св}).$$

Сравнивая два выражения для $E_д$, получим

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}=\frac{(Q-q_{св})}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Отсюда находим величину связанных зарядов:

$$q_{св}=\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}Q$$

и поверхностную плотность этих зарядов на сфере радиусом r_2:

$$\sigma_{св}(r_2)=\frac{q_{св}}{4\pi r_2^2}=\frac{(\varepsilon-1)Q}{4\pi\varepsilon r_2^2}.$$

Задача 3. *Плоский воздушный конденсатор с площадью пластин $S=150$ см^2 и расстоянием между пластинами $d=6$ мм подключен к батарее с ЭДС $\mathcal{E}=200$ В. Какую минимальную работу необходимо совершить, чтобы в область между пластинами конденсатора вставить слю-*

дяную пластинку толщиной h = 4 мм? Горизонтальные размеры всех пластин одинаковы, а диэлектрическая проницаемость слюды $\varepsilon = 7$.

Минимальную работу найдем по закону сохранения энергии.

Энергия и заряд конденсатора до введения пластинки равны соответственно

$$W_1 = \frac{C_1\mathscr{E}^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 S\mathscr{E}^2}{2d} \text{ и } Q_1 = \frac{\varepsilon_0 S\mathscr{E}}{d}.$$

Емкость конденсатора после введения пластинки стала (см. задачу 1)

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{h + \varepsilon(d-h)}.$$

Энергия конденсатора и заряд на нем после введения пластинки стали

$$W_2 = \frac{C_2\mathscr{E}^2}{2} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S\mathscr{E}^2}{2\left(h+\varepsilon(d-h)\right)} \text{ и } Q_2 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S\mathscr{E}}{h+\varepsilon(d-h)}.$$

Изменение энергии конденсатора равно

$$\Delta W = W_2 - W_1 = \frac{\varepsilon_0 S\mathscr{E}^2 h(\varepsilon-1)}{2d\left(h+\varepsilon(d-h)\right)}.$$

Работа батареи по переносу заряда $Q_2 - Q_1$ составляет

$$A_б = \mathscr{E}\left(Q_2 - Q_1\right) = \frac{\varepsilon_0 S\mathscr{E}^2 h(\varepsilon-1)}{d\left(h+\varepsilon(d-h)\right)}.$$

По закону сохранения энергии работа внешних сил равна

$$A = \Delta W - A_б = -\frac{\varepsilon_0 S\mathscr{E}^2 h(\varepsilon-1)}{2d\left(h+\varepsilon(d-h)\right)} = -5{,}9\cdot 10^{-7} \text{ Дж}.$$

Задача 4. *В плоский воздушный конденсатор вставлена стеклянная пластина с $\varepsilon = 9$ так, что остался воздушный зазор толщиной h = 1 мм. Расстояние между обкладками конденсатора d = 1 см. Конденсатор подключен к источнику постоянного напряжения $U_0 = 100$ В. Чему будет равно напряжение на конденсаторе, если после отключения его от источника убрать стеклянную пластину?*

Емкость пустого (воздушного) конденсатора равна

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d},$$

где S – площадь обкладок конденсатора. Емкость конденсатора со вставленной стеклянной пластиной равна емкости двух последовательно соединенных конденсаторов: воздушного толщиной h и стеклянного толщиной $d-h$ и составляет

$$C = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d + h(\varepsilon-1)}.$$

Заряд, оставшийся на конденсаторе емкостью C после его отключения от источника напряжения, равен

$$Q = CU_0 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S U_0}{d + h(\varepsilon-1)}.$$

После удаления стеклянной пластины заряд на обкладках конденсатора сохраняется, а емкость и напряжение изменяются. Новое напряжение составит

$$U = \frac{Q}{C_0} = \frac{\varepsilon U_0}{1 + \dfrac{h}{d}(\varepsilon-1)} = 500 \text{ В}.$$

Задача 5. *Плоский воздушный конденсатор с квадратными пластинами – расстояние между пластинами d и площадь пластин S – заряжен до разности потенциалов U и отсоединен от источника напряжения. После этого в конденсатор до его середины вдвигают широкую пластину из диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ε. Толщина пластины d. Определите силу, с которой пластина втягивается в конденсатор в данном положении.*

Емкость пустого (воздушного) конденсатора равна

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d}.$$

После отключения источника напряжения на конденсаторе остается заряд

$$Q_0 = C_0 U = \frac{\varepsilon_0 S U}{d}.$$

При вставленной пластине одна половина конденсатора заполнена диэлектриком, а другая остается пустой. Емкость такого конденсатора составляет

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S(\varepsilon+1)}{2d},$$

а его энергия равна

$$W_1 = \frac{Q_0^2}{2C_1} = \frac{Q_0^2 d}{\varepsilon_0 S(\varepsilon+1)}.$$

Пусть на диэлектрическую пластину в этом положении действует со стороны электрического поля сила F, которая приложена в месте максимальной неоднородности поля и направлена в сторону незаполненной части конденсатора (рис.4). Приложим к диэлектрической пластине внешнюю силу, равную F и направленную в противоположную сторону. Выдвинем пластину на небольшую величину dx, совершив при этом работу

$$dA = F dx.$$

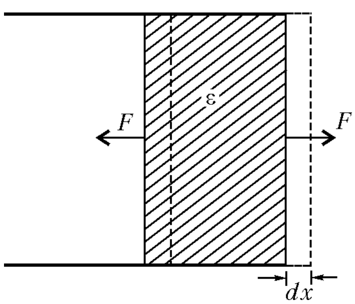

Рис. 4

Очевидно, что эта работа пойдет на изменение энергии конденсатора. Найдем новую емкость и новую энергию конденсатора после перемещения диэлектрической пластины:

$$C_2 = C_1\left(1 + \frac{2(1-\varepsilon)dx}{(1+\varepsilon)\sqrt{S}}\right) \text{ и } W_2 = \frac{Q_0^2}{2C_2}.$$

Изменение энергии конденсатора равно

$$dW = W_2 - W_1 = \frac{Q_0^2}{2}\left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_1}\right) = \frac{Q_0^2}{2}\frac{(C_1 - C_2)}{C_1 C_2}.$$

Поскольку емкость C_2 мало отличается от C_1, можно положить, что

$$C_1 C_2 \approx C_1^2.$$

В этом предположении

$$dW = \frac{2(\varepsilon-1)dQ_0^2 dx}{\varepsilon_0(\varepsilon+1)^2 S^{3/2}}.$$

Приравнивая работу dA к изменению энергии dW, найдем силу, с которой пластина втягивается в конденсатор:

$$F = \frac{2(\varepsilon-1)dQ_0^2}{\varepsilon_0(\varepsilon+1)^2 S^{3/2}}.$$

После подстановки в это соотношение выражения для заряда Q_0, окончательно получим

$$F = \frac{2\varepsilon_0(\varepsilon-1)\sqrt{S}U^2}{(\varepsilon+1)^2 d}.$$

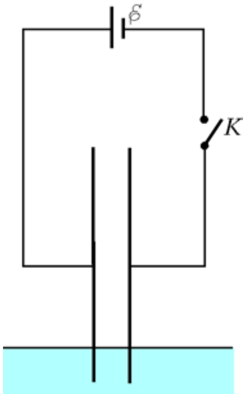

Рис. 5

Задача 6. *Плоский воздушный конденсатор с расстоянием между обкладками d частично погружен в жидкость с диэлектрической проницаемостью* ε *и плотностью* ρ *(рис.5). Через разомкнутый ключ K к пластинам конденсатора подведена батарея с ЭДС* $\mathscr{E}$. *Внутреннее сопротивление батареи мало. Пренебрегая вязкостью жидкости и капиллярными явлениями, определите максимальную высоту подъема жидкости в конденсаторе после замыкания ключа. На какой высоте установится жидкость при наличии тепловых потерь?*

Поскольку омическим сопротивлением в электрической цепи мы пренебрегаем, сразу после замыкания ключа и в последующее время напряжение на конденсаторе будет равно ЭДС батареи $\mathscr{E}$. Пусть после замыкания ключа жидкий диэлектрик поднимется на максимальную высоту h. Очевидно, что в этом случае работа, совершенная батареей, пойдет на изменение энергии конденсатора и на изменение потенциальной энергии жидкости в поле тяжести (изменение кинетической энергии жидкости равно нулю).

Обозначим начальную емкость пустого (воздушного) конденсатора через C_0. Тогда емкость конденсатора в момент подъема жидкости на высоту h равна

$$C_h = C_0 + \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)ah}{d},$$

где a – ширина пластин конденсатора. Изменение энергии конденсатора после подъема жидкости равно

$$\Delta W_{\text{к}} = (C_h - C_0)\frac{\mathscr{E}^2}{2} = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)ah\mathscr{E}^2}{2d}.$$

Изменение потенциальной энергии поднятой жидкости составляет

$$\Delta W_{\text{ж}} = \frac{\rho gah^2 d}{2}.$$

Работа, совершенная батареей, равна

$$\Delta A = (C_h - C_0)\mathscr{E}^2 = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)ah\mathscr{E}^2}{d}.$$

Записав закон сохранения энергии, получим уравнение для определения h:

$$\frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)ah\mathscr{E}^2}{d} = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)ah\mathscr{E}^2}{2d} + \frac{\rho gah^2 d}{2}.$$

Данное квадратное уравнение имеет два решения:

$$h_1 = 0 \text{ и } h_2 = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)\mathscr{E}^2}{\rho g d^2}.$$

Первое решение ($h_1 = 0$) соответствует начальному положению уровня жидкости, второе решение (h_2) отвечает максимальному подъему жидкости через некоторое время после замыкания ключа. А то положение уровня жидкости, которое установится после замыкания ключа при наличии тепловых потерь, должно соответствовать минимуму полной энергии нашей системы.

Обозначим установившуюся высоту подъема через z. Емкость конденсатора в этом случае равна

$$C_z = C_0 + \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)az}{d}.$$

Заряд на конденсаторе составляет

$$Q_z = C_z\mathscr{E} = \left(C_0 + \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)az}{d}\right)\mathscr{E}.$$

Энергия, запасенная в батарее, равна

$$W_{\text{б}} = W_0 - Q_z\mathscr{E} = W_0 - \left(C_0 + \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)az}{d}\right)\mathscr{E}^2,$$

где W_0 – начальная (до замыкания ключа) энергия в батарее. Энергия конденсатора составляет

$$W_{\text{к}} = \left(C_0 + \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)az}{d}\right)\frac{\mathscr{E}^2}{2}.$$

Потенциальная энергия поднятой жидкости есть

$$W_{\text{ж}} = \frac{\rho gadz^2}{2}.$$

Полная энергия нашей системы равна

$$W = W_{\text{б}} + W_{\text{к}} + W_{\text{ж}},$$

или

$$W = W_0 - \left(C_0 + \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)az}{d}\right)\frac{\mathscr{E}^2}{2} + \frac{\rho gadz^2}{2}.$$

Запишем условие минимума энергии и после дифференцирования получим уравнение

$$\rho gadz - \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)a\mathscr{E}^2}{2d} = 0.$$

Отсюда найдем

$$z = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)\mathscr{E}^2}{2\rho g d^2}.$$

Как видно из полученного выражения, высота, соответствующая устойчивому положению уровня жидкости, в два раза меньше максимальной высоты подъема. При отсутствии затухания жидкость колебалась бы около положения $h = z$ с амплитудой, равной z. При малых потерях энергии колебания будут затухать, и уровень жидкости установится на высоте z.

Упражнения

1. Плоский воздушный конденсатор с расстоянием между обкладками $d = 10$ мм частично заполнен плоскопараллельным слоем диэлектрика с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 7$. Толщина слоя диэлектрика $h = 6$ мм. Конденсатор подключен к батарее с ЭДС $\mathscr{E} = 100$ В. Чему равна напряженность электрического поля внутри диэлектрика?

2. Плоский конденсатор, полностью заполненный диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε, заряжают от батареи с ЭДС $\mathscr{E}$ и отключают. Определите поверхностную плотность поляризационных зарядов на границе проводник – диэлектрик, если расстояние между пластинами конденсатора d.

3. Плоский конденсатор, пластины которого имеют площадь S и расположены на расстоянии d, заполнен твердым диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε. Конденсатор подключен к батарее, ЭДС которой $\mathscr{E}$. Одну из пластин конденсатора отодвигают так, что образуется воздушный зазор. На какое расстояние отодвинули пластину, если при этом была совершена работа A?

4. Диэлектрическая пластина толщиной l_1 с диэлектрической проницаемостью ε введена между обкладками плоского воздушного конденсатора так, что между поверхностями пластины и обкладками конденсатора остались воздушные зазоры, суммарная толщина которых равна l_2. Определите силу притяжения между обкладками, если разность потенциалов между ними U, а площадь пластины и обкладок S. Как изменится выражение для силы в предельном случае при $l_2 \to 0$?