ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

КМШ

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №2)

1. Смогут переправиться. Можно поступить так: сначала переправляются два человека и стиральная машина, один человек остается на другом берегу реки, а второй (вместе со стиральной машиной) возвращается за третьим. Затем второй и третий переправляются вместе с машиной.

2. Из условия следует, что доктор признал симулянтами всех граждан, кроме одного (который умер вследствие удара). Поэтому мы можем записать следующее равенство-ребус:

$$abccc + 1 = aabbb.$$

При сложении из разряда единиц в разряд десятков была перенесена единица (иначе разряд десятков не изменился бы). Заметим, что разряд сотен также изменился, т.е. туда из разряда десятков была перенесена единица. Но в разряде десятков производилось сложение c и 1, т.е. $c + 1$ оказалось не меньше 10, откуда следует, что $c = 9$, $c + 1 = 10$, поэтому $b = 0$. Ребус приобрел вид $a0999 + 1 = aa000$. Так как $0999 + 1 = 1000$, то $a = 1$ (ибо это четвертая справа цифра суммы). Итак, $10999 + 1 = 11000$, т.е. доктор Баутце выловил 10999 симулянтов.

3. Это можно сделать не всегда. Если, например, 13 человек желают посещать первый кружок, а остальные – второй и третий кружки одновременно, то распределить школьников поровну по всем кружкам не удастся.

4. После разрезания восьмиугольника так, как показано на рисунках 1 или 2, восьмиугольник распадается на пары разноцветных, но равных геометрических фигур. Значит, площадь красного четырехугольника равна сумме площадей двух синих трапеций.

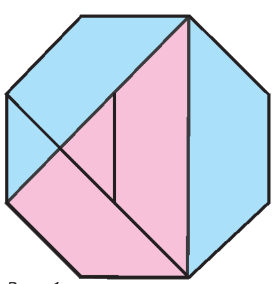

Рис. 1

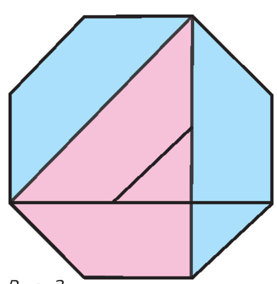

Рис. 2

5. Такой квадрат существует. Рассмотрим магический квадрат, приведенный в условии задачи. Каждое число таблицы поделим на произведение всех чисел таблицы. Тогда в клетках таблицы получим числа

$$\frac{8}{8\cdot1\cdot6\cdot3\cdot5\cdot7\cdot4\cdot9\cdot2}=\frac{1}{1\cdot6\cdot3\cdot5\cdot7\cdot4\cdot9\cdot2}=\frac{1}{45360},$$

$$\frac{1}{8\cdot1\cdot6\cdot3\cdot5\cdot7\cdot4\cdot9\cdot2}=\frac{1}{362880},$$

$$\frac{6}{8\cdot1\cdot6\cdot3\cdot5\cdot7\cdot4\cdot9\cdot2}=\frac{1}{8\cdot1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot4\cdot9\cdot2}=\frac{1}{60480}$$

и так далее, т.е. числа вида $\frac{1}{n}$. Заметим, что суммы этих дробей отличаются от сумм соответствующих им первоначальных чисел ровно в $8\cdot1\cdot6\cdot3\cdot5\cdot7\cdot4\cdot9\cdot2 = 362880$ раз, поэтому если первоначально суммы по столбцам, строкам и диагоналям были равны между собой, то новые суммы тоже будут равны между собой. Таким образом, мы снова получаем магический квадрат.

Примечание. Можно делить все числа исходного квадрата не только на их произведение, но и на любое общее кратное, в частности наименьшее.

КОНКУРС «МАТЕМАТИКА 6–8»

(см. «Квант» № 6 за 2006 г.)

11. При $n = 3$. Рассмотрим в случае $n = 2$ сумму чисел $\overline{\mathrm{ABC}}$ и $\overline{\mathrm{DEF}}$. Чтобы последняя цифра суммы стала меньше предпоследней, при сложении цифр C и F должен произойти перенос разряда, а при сложении цифр B и E – нет. Но тогда вторая цифра суммы будет больше первой. Значит, $n \ne 2$. При $n = 3$ указанная в условии ситуация возможна: $125 + 237 + 248 = 610$.

12. а) Несложно проверить, что исходному уравнению удовлетворяют все числа вида $x = 10k + \frac{1}{2}$, где k – любое натуральное число.

б) Предположим, что существует некоторое положительное рациональное число x такое, что $\{x\} + \{x^2\} = 0,5$. Пусть $t = [x]$, так что $t \le x < t + 1$, $t^2 \le x^2 < t^2 + 2t + 1$, $\{x^2\} = x^2 - t^2 - p$, где p – некоторое целое число из набора $\{0, 1, \ldots, 2t\}$. В этих обозначениях исходное уравнение запишется так: $x - t + x^2 - t^2 - p = 0,5$, или $x^2 + x - t^2 - t - p - 0,5 = 0$. По предположению, полученное квадратное уравнение относительно x должно иметь положительный рациональный корень. Это возможно лишь в том случае, если его дискриминант $D = 4t^2 + 4t + 4p + 3$ – квадрат целого числа. Поскольку D – число нечетное, то $D = (2m+1)^2$. Тогда $4t^2 + 4t + 4p + 3 = (2m+1)^2$, или, после преобразований, $t^2 + t - m^2 - m = -\frac{1}{2} - p$. Последнее равенство невозможно, поскольку в левой его части стоит целое число, а в правой – не целое. Полученное противоречие доказывает утверждение задачи.

13. Не могут. Для доказательства воспользуемся следующим вспомогательным фактом: если у двух треугольников ABC и $A'B'C'$ равны две стороны: $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ и угол НЕ между ними: $\angle A = \angle A'$, то либо эти треугольники равны, либо сумма двух других углов этих треугольников, лежащих НЕ между равными сторонами, равна 180°: $\angle C + \angle C' = 180°$ (с доказательством этого утверждения можно познакомиться, например, в статье А. Егорова «Четвертый признак равенства треугольников» – см. «Квант» №4 за 2004 г.).

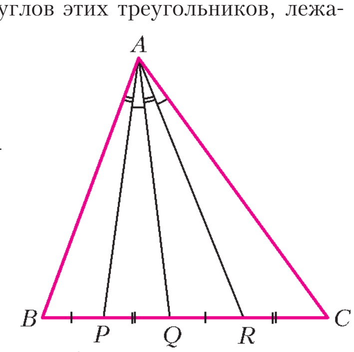

Рис. 3

Предположим, что описанная в условии задачи ситуация возможна. Тогда у треугольников AQB и AQC (рис. 3) имеются две равные стороны $QB = QC$, AQ – общая, и равные углы $\angle BAQ = \angle CAQ$. Из вспомогательного факта следует, что либо $\angle ABQ + \angle ACQ = 180°$ – в данном случае это невозможно, либо $\Delta ABQ = \Delta ACQ$. В последнем случае $\angle BQA = \angle CQA = 90°$. Рассмотрим этот вариант.

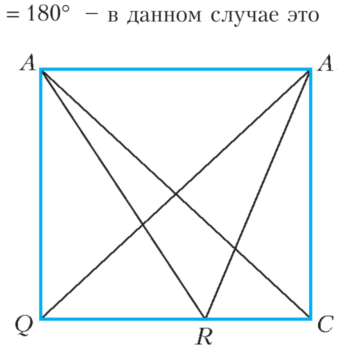

Рис. 4

Осуществим параллельный перенос треугольника BAQ так, чтобы точка B совместилась с точкой Q. При этом точка Q совместится с точкой C, точка P – с точкой R, точка A займет положение вершины A_1 прямоугольника AA_1CQ (рис.4). Отрезок RC виден из вершин A и A_1 под одним и тем же углом, значит, точки A, A_1, C, R лежат на одной окружности. По свойству четырехугольника, вписанного в окружность, $\angle AA_1C + \angle ARC = \angle RAA_1 + \angle RCA_1$, но это невозможно, так как углы A_1 и C прямоугольника прямые, а углы RAA_1 и ARC не равны друг другу.

14. Случай $n = 1$ тривиальный, в дальнейшем полагаем $n > 2$. Заметим, что любые n последовательных целых чисел дают полную систему остатков 0, 1, 2, …, $n - 1$, получающихся при делении этих чисел на n. Заменяя каждое из данных последовательных чисел его остатком, приходим к равносильному условию задачи утверждению: число $1^k + 2^k + \ldots + (n-1)^k$ делится на n. Для доказательства последнего утверждения разобьем слагаемые на пары (это возможно, поскольку число $n - 1$ четно) и заметим, что

$1^k + (n-1)^k$ делится на n,

$2^k + (n-2)^k$ делится на n,

....

$\left(\frac{n-1}{2}\right)^k + \left(\frac{n+1}{2}\right)^k$ делится на n.

Действительно, привлекая известную формулу

$$a^k + b^k = (a+b)\left(a^{k-1} - a^{k-2}b + \ldots - ab^{k-2} + b^{k-1}\right),$$

справедливую для всех нечетных показателей степеней k, при разложении каждой суммы на множители один из множителей получаем равным n.

15. Это можно сделать при любом n, кроме $n = 2$. Невозможность случая $n = 2$ проверяется непосредственно. Для $n \neq 2$ опишем способ расстановки чисел в таблице. Рассмотрим три случая (которые, очевидно, охватывают все возможности).

1) Пусть n – нечетное число, т.е. $n = 2m - 1$ (m – натуральное). Здесь мы имеем дело с числами от 1 до $(2m-1)^2 = 4m^2 - 4m + 1$, причем нечетных чисел имеется ровно $2m^2 - 2m + 1$. Расставим нечетные числа в таблице в виде «повернутого квадрата», как показано на рисунке 5 для случая $n = 7$ (клетки с нечетными числами обозначим буквами «Н»).

			Н			
		Н	Н	Н		
	Н	Н	Н	Н	Н	
Н	Н	Н	Н	Н	Н	Н
	Н	Н	Н	Н	Н	
		Н	Н	Н		
			Н			

Рис. 5

Во все остальные клетки запишем четные числа. Несложно убедиться, что при такой расстановке количество нечетных чисел равно в точности $2m^2 - 2m + 1$. Поскольку во всех вертикалях и горизонталях имеется нечетное количество нечетных чисел, сумма чисел в каждой горизонтали и вертикали будет нечетной. На каждой из двух диагоналей также расположено нечетное количество нечетных чисел (это следует из симметричности расположения нечетных чисел в таблице относительно центральной клетки). Поэтому и для диагоналей условие задачи тоже выполняется.

2) Пусть n – четное число, не делящееся на 4, т.е. $n = 4m + 2$ (m – натуральное). Здесь четных и нечетных чисел поровну. Для необходимого размещения чисел предварительно разобьем таблицу на 4 равных квадрата $(2m+1)\times(2m+1)$. Затем возьмем два центрально-симметричных из них (скажем, левый верхний и правый нижний) и заполним их нечетными числами (а остальные клетки заполним четными числами). Очевидно, ровно половина клеток будет содержать нечетные числа, что и требуется. Пример заполнения для $n = 6$ показан на рисунке 6. В каждой горизонтали и каждой вертикали имеется по $2m + 1$ нечетных чисел, поэтому сумма чисел в каждой горизонтали и вертикали будет нечетной. Правда, в каждой диагонали содержится, наоборот, четное количество нечетных чисел (в одной $4m + 2$, в другой – ни одной), поэтому такая расстановка не может нас удовлетворить.

Н	Н	Н			
Н	Н	Н			
Н	Н	Н			
			Н	Н	Н
			Н	Н	Н
			Н	Н	Н

Рис. 6

	Н	Н	Н		
Н	Н	Н			
Н	Н	Н			
			Н	Н	Н
			Н	Н	Н
Н				Н	Н

Рис. 7

Давайте ее чуть «пошевелим», т.е. нечетное число из левой верхней клетки перенесем в $(2m + 1)$-ю клетку той же строки, зато нечетное число из $(2m + 1)$-й клетки самой нижней строки перенесем в 1-ю клетку той же строки (пример для $n = 6$ приведен на рисунке 7). Ясно, что от такой перестановки количества нечетных чисел в горизонталях и вертикалях не изменятся, а в диагоналях – изменятся: в одной это количество уменьшится на 1 и станет равным $4m + 1$, а в другой увеличится на 1 и станет равным 1. Поэтому и в каждой диагонали станет нечетное количество нечетных чисел, что и требуется.

3) Пусть n – четное число, делящееся на 4, т.е. $n = 4m$ (m – натуральное). См. решение задачи 21 в статье «Заключительный этап конкурса имени А.П.Савина «Математика 6–8» в «Кванте» № 2.

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Магнитный поток, пронизывающий кольцо, увеличивается по мере продвижения кольца к середине магнита, затем уменьшается. Соответственно, индукционный ток, уменьшаясь, достигает нуля при прохождении кольцом середины магнита, потом растет, поменяв направление.

2. Да, будет. При этом переменный ток проходит через электролит, не вызывая выделения вещества на электродах.

3. В случае короткого замыкания при любом заряде на пластинах конденсатора разность потенциалов между ними равна нулю, значит, равно нулю и емкостное сопротивление, что равносильно бесконечно большой емкости.

4. Постоянный ток.

5. Проводник будет колебаться с частотой переменного тока.

6. Для уменьшения электрического сопротивления, так как серебро – хороший проводник, а высокочастотные токи идут по поверхности проводников.

7. При малых частотах напряжение на катушке близко к нулю, а напряжение на конденсаторе почти равно ЭДС; при больших частотах – наоборот.

8. В случае а) накал первой лампы увеличится, второй уменьшится; в случае б) – наоборот.

9. На напряжение $430\sqrt{2}$ кВ ≈ 610 кВ.

10. Напряжение между точками A и B изменяется в пределах от 0 до $-2U_0$.

11. В медном листе возникнут индукционные токи Фуко, магнитное поле которых будет практически полностью экранировать поле катушки B. Показания вольтметра, на который замкнута катушка A, будут близки к нулю.

12. У трансформаторной обмотки велико только индуктивное сопротивление, которое после разматывания становится ничтожно малым.

13. Мала сила тока и мало активное сопротивление вторичной обмотки.
14. Замкнутый виток трансформатора – это фактически еще одна вторичная обмотка, работающая в режиме короткого замыкания. Поскольку ее сопротивление очень мало, в ней индуцируется очень большой ток, который может расплавить этот виток или разрушить изоляцию.
15. Трансформаторная сталь вибрирует при перемагничивании в местах неплотного соединения. Частота звука в два раза выше частоты тока, т.е. составляет 100 Гц.
16. а) Когда плоскость рамки параллельна полю; б) когда плоскость рамки перпендикулярна полю.

МИКРООПЫТ

Второй, поскольку при использовании дросселя практически нет потерь на тепло.

РАБОТА ГАЗА ПРИ ПЕРЕХОДЕ ИЗ НАЧАЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ В КОНЕЧНОЕ

1. $A_{23} = 2A$. **2.** 1) $T_1 = \frac{8}{9}\frac{Q}{\nu R}$; 2) $A = \frac{Q}{6}$.

3. $Q = A + \frac{3}{2}\nu R\Delta T$.

ФОРМУЛЫ ГЕОМЕТРИИ ПОМОГАЮТ АЛГЕБРЕ

1. $(1;4)$. **2.** $(3;5)$. **3.** $(4;0)$. **4.** $(3;6)$.

5. $(4;6)$. **6.** $-\frac{4}{5}$. **7.** $\frac{3}{5}$. **8.** $\left(0;\frac{3}{4}\right]$.

XV МЕЖДУНАРОДНАЯ ОЛИМПИАДА «ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЙ МАРАФОН»

Письменный индивидуальный тур

Математика

1. Вместо $*$ нужно поставить 4. Заменим звездочку неизвестной нам пока цифрой a. Поскольку $\underbrace{99\ldots9}_{100} = 10^{100} - 1$, наше число равно

$$\left(10^{100} - 1\right)10^{102} + a\cdot 10^{101} + 9 = 10^{202} - (10 - a)10^{101} + 9.$$

Нетрудно видеть, что при $a = 4$ полученное выражение равно $\left(10^{101} - 3\right)^2$. А так как ближайшие к этому числу квадраты $\left(10^{n+1} - 7\right)^2$ и $\left(10^n + 3\right)^2$, оканчивающиеся цифрой 9, заведомо отличны от данного числа, то $a = 4$ – единственно возможная цифра.

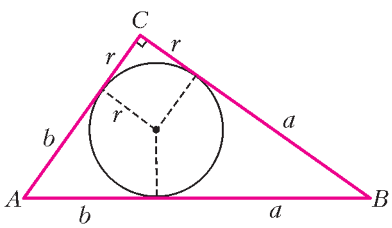

Рис. 8

2. ab. Пусть r – радиус окружности, вписанной в данный прямоугольный треугольник (рис.8). Тогда $AC = b + r$, $BC = a + r$ и по теореме Пифагора

$$(a+r)^2 + (b+r)^2 = (a+b)^2, \text{ откуда } r(a+b+r) = ab.$$

Однако произведение $r(a+b+r)$ равно площади треугольника ABC (по формуле $S = rp$).
3. 4. Заметим, что последняя цифра в десятичной записи числа $\left|11^k - 5^l\right|$ – это 4 или 6, значит, число $\left|11^k - 5^l\right|$ не меньше 4. При $k = 2$ и $l = 3$ получаем $\left|11^2 - 5^3\right| = 4$.

4. $\frac{mns}{4}$. Пусть в углах таблицы стоят числа a, b, c, d (рис.9). Просуммируем числа таблицы по строчкам. Сумма чисел первой строки равна $\frac{(a+b)n}{2}$, а последней $\frac{(c+d)n}{2}$. При этом сами суммы чисел по строкам образуют арифметическую прогрессию из m членов, так что их сумма (т.е. сумма всех чисел таблицы) равна

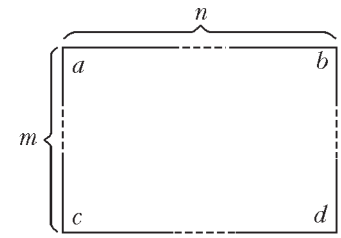

Рис. 9

$$\frac{m\left(\frac{a+b}{2}n + \frac{c+d}{2}n\right)}{2} = \frac{mn(a+b+c+d)}{4}.$$

5. 2α. Продлим отрезок KE до точки L так, чтобы $KL = KE$ (рис. 10). Четырехугольник $ECLB$ – параллелограмм,

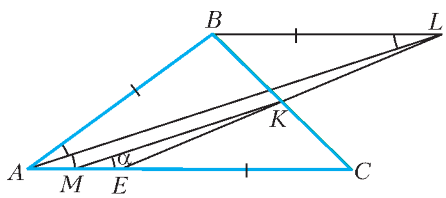

Рис. 10

поэтому $BL = EC = AB$. При этом MK – средняя линия треугольника ALE, так что $KM \parallel AL$. Следовательно, $\angle LAC = \angle KME = \angle ALB = \angle BAL = \alpha$, и $\angle BAC = 2\alpha$.
6. Число a больше. Пусть $f(x) = x^3 - x - 3$. Заметим сначала, что $a > \frac{5}{3}$ (это следует из того, что $f\left(\frac{5}{3}\right) = -\frac{1}{27} < 0$).

Число $a^5 = a^2\cdot a^3 = a^2(a+3) = a^3 + 3a^2 = 3a^2 + a + 3$. Поскольку $a > \frac{5}{3}$, имеем $a^5 > 3\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^2 + \frac{5}{3} + 3 = 13$, т.е. $a > \sqrt[5]{13}$.

7. Можно. *Первое решение.* Пусть N людей попарно незнакомы. Занумеруем их числами 1, 2, ..., N. Человека с номером k знакомим со всеми, номера которых l удовлетворяют неравенству $|k - l| \le \frac{N}{2}$. Тогда люди с номерами k и $N - k$ имеют по одинаковому числу знакомых, причем никакие 3 не имеют одинакового количества знакомых (убедитесь в этом).
Второе решение. Воспользуемся методом математической индукции. Начало индукции очевидно. Пусть N человек удовлетворяют условию. Если среди них все с кем-нибудь знакомы, то присоединяем $(N + 1)$-го человека и не знакомим его ни с кем. Если же среди N людей есть ни с кем не знакомый, то с $(N + 1)$-ым человеком знакомим всех N людей. В обоих случаях получаем группу из $N + 1$ человека, удовлетворяющую условию.
Замечание. При первом способе решения каждый оказывается знаком с довольно большим количеством людей. При втором способе допускаются люди, ни с кем не знакомые. Впрочем, в условии задачи нет требования, чтобы каждый был с кем-нибудь знаком.

Физика

1. $v = \sqrt{3gl}$. **2.** $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l} + \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 ma^2 l}}}$.

3. *Указание.* Луна обращается вокруг Земли, а система Земля – Луна обращается вокруг Солнца.

4. Несколько дней. **5.** $\beta \approx 1{,}1\cdot 10^{-4}$ град$^{-1}$.

6. $I(\theta) = 4I_0(\theta)\cos^2\left(\frac{\omega}{c}\frac{d\sin\theta}{2}\right)$;

$I_1(\theta) = 4I_0(\theta)\cos^2\left(\frac{\omega}{c}\left(d\sin\theta + \frac{l(n-1)}{2}\right)\right)$.

7. $\omega = \omega_0 \cdot \exp\left(-\frac{GM}{c^2 R}\right)$; наблюдатель должен двигаться навстречу звезде со скоростью $v \approx \frac{GM}{cR} \approx 1{,}5$ км/с.

Устный командный тур

Математика

1. 225 м; 15 м/с.
2. Пусть $ABCDEF$ – правильный шестиугольник со стороной 1 (рис. 11). Продлим стороны AB и CD до пересечения в точке M, проведем прямую FM. Отрезок FM равен $\sqrt{7}$.

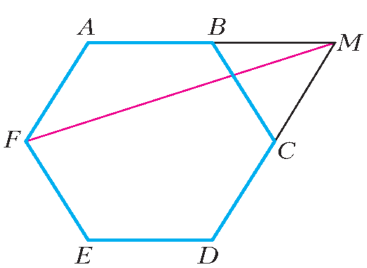

Рис. 11

3. Нельзя. При перестановке цифр любого числа не меняется остаток от деления этого числа на 9. Остаток от деления на 9 числа 2^{35} равен 5. Однако кубы целых чисел при делении на 9 такой остаток не дают (ибо $(3n\pm1)^3 = 27n^3 \pm 9n^2 + 9n \pm 1$).
4. Существует. Возьмем остроугольный треугольник ABD и проведем его высоты из вершин B и D (рис. 12). Пусть C – точка их пересечения. Четырехугольник $ABCD$ удовлетворяет условию.

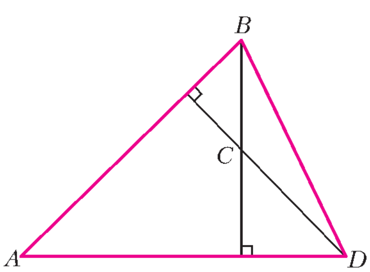

Рис. 12

5. $c < 0$. *Указание.* Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$. Тогда $a + 2b + 4c = 4f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$, т.е. $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$. Но это значит, что $f(x) < 0$ при всех x. Следовательно, $c = f(0) < 0$.
6. $\frac{OM}{ON} = \frac{1}{2}$. Площади треугольников AMN и DMN (рис. 13) равны. Поэтому равны и площади треугольников BAM и CDM. Но тогда равны расстояния от точек A и D до прямой BC, т.е. $AD \parallel BC$. Значит, $ABCD$ – трапеция. Из подобия треугольников BOC и AOD сразу следует, что $\frac{OM}{ON} = \frac{1}{2}$.

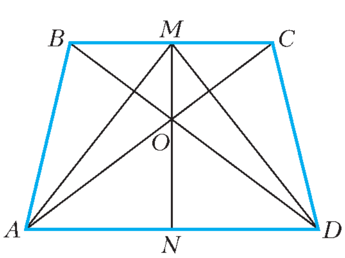

Рис. 13

Замечание. Точки M, O, N в трапеции всегда лежат на одной прямой. Но в нашем случае доказывать это даже не нужно, так как OM и ON – сходственные медианы в подобных треугольниках.
7. Выигрывает второй игрок. Будем считать, что лепестки ромашки расположены в вершинах правильного m-угольника. Если m – четно, то второй игрок отрывает лепестки симметричные оторванным первым игроком относительно центра m-угольника. При нечетном m если вначале первый игрок отрывает один лепесток, второй отрывает два лепестка, расположенные в концах стороны, противоположной этому лепестку. Если первый отрывает 2 лепестка, второй отрывает один лепесток в вершине, противоположной стороне, выбранной первым. Далее второй отрывает лепестки, симметричные оторванным первым игроком относительно оси симметрии многоугольника.
8. Есть. Пусть $k_1, k_2, \ldots, k_{2007}$ – количества знакомых с 1, 2, … …, 2007 учеником. Тогда $k_1 + k_2 + \ldots + k_{2007} = 2K$, где K – общее количество знакомств. Если все числа k_i нечетны, то и их сумма нечетна.
9. $n = 3k$, $k \ge 2$; $n = 3k + 2$, $k \in \mathbf{N}$. Поскольку сумма масс всех гирь равна $\frac{n(n+1)}{2}$, то либо n, либо $n + 1$ делится на 3, т.е. либо $n = 3k$, либо $n = 3k + 2$. Заметим, что 6 гирь с массами a, $a + 1$, …, $a + 5$, очевидно, можно разложить на 3 равные по массе кучки: $(a; a+5)$, $(a+1; a+4)$, $(a+2; a+3)$. Гири с массами 1, 2, 3, …, 9 тоже можно разложить на 3 равные по массе кучки, например: $(9, 1, 5)$, $(8, 3, 4)$, $(6, 7, 2)$. Иными словами, можно разложить на равные по массе кучки при $n = 6k$ и при $n = 6k + 9$, т.е. при $n = 3k$, где $k \ge 2$. Далее, 5 гирек тоже можно разложить на 3 кучки: (5), $(2; 3)$, $(1; 4)$, 8 гирек тоже можно: $(8; 4)$, $(7; 5)$, $(1, 2, 3, 6)$. Следовательно, можно разложить на 3 кучки равной массы и любые $3k + 2$ гирек при $k \in \mathbf{N}$.
10. $\sqrt{2}$. Справедливы неравенства $x \ge s$, $\frac{1}{y} \ge s$, $y + \frac{1}{x} \ge s$. Следовательно, $\frac{1}{x} \le \frac{1}{s}$, $y \le \frac{1}{s}$, но тогда $y + \frac{1}{x} \le \frac{2}{s}$, т.е. $\frac{2}{s} \ge s$, или $s \le \sqrt{2}$.
Значение $s = \sqrt{2}$ достигается при $x = \sqrt{2}$ и $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
11. Нет. Число $p - 1$ при делении на 3 дает остаток 2 и, следовательно, не является квадратом. Число $p + 1$ при делении на 4 дает остаток 3 и тоже квадратом не является.
12. Можно. Проекция окружности на сторону квадрата – отрезок, длина которого равна диаметру. Сумма длин диаметров равна $\frac{10}{\pi} > 3$. Однако если внутри отрезка длины 1 расположить несколько отрезков с суммой длин, большей 3, найдется точка, принадлежащая по крайней мере четырем отрезкам. Прямая, перпендикулярная стороне квадрата, пересекает не меньше четырех окружностей.

Физика

1. Нет, не нагревается. **2.** $v_0 \approx \sqrt{2gR_З} \approx 11{,}2$ км/с.
3. $s \approx 65$ м. **4.** $x = \sqrt{\frac{e}{16\pi\varepsilon_0 E}}$.
5. Из-за большей атомной массы криптона по сравнению с воздухом тепловой поток через стеклопакет окажется примерно в 1,7 раза меньше.
6. $v_1 = \frac{mv_0}{m + \rho_0 LS}$; $t = \frac{L}{v_0} + \frac{\rho_0 L^2 S}{2m}$.
7. $t = \frac{\mu_1 t_2 + \mu_2(t_1 + t_2)}{\mu_1 + 2\mu_2} = 32$ °C.
8. Излучение энергии заряженной частицей, движущейся по круговой траектории, у электрона примерно в 200 раз больше, чем у протона.
9. $U_{34} = 2U_0$. **10.** Одинаково.

История научных идей и открытий

Математика

1. Это Леонард Эйлер. Школьникам могут быть известны прямая Эйлера, окружность Эйлера, формула Эйлера $d^2 = R^2 - 2Rr$, выражающая расстояние d между центрами вписанной и описанной окружностей треугольника через ра-

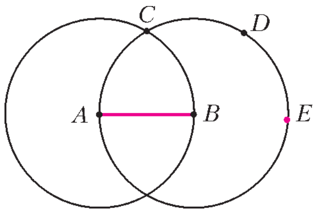

Рис. 14

диусы R и r этих окружностей, теорема Эйлера о многогранниках, задача о кенигсбергских мостах, теоремы Эйлера из теории чисел, функция Эйлера $\varphi(m)$ и т.д.

2. Проводим окружности с центрами в точках A и B и радиусом AB. Пусть C – одна из точек пересечения этих окружностей (рис.14). Далее тем же раствором циркуля на окружности с центром B откладываем дуги CD и DE. Тогда E – искомая точка.

3. 16 ikb 48. Пусть x – количество обезьян. Тогда

$$\left(\frac{x}{8}\right)^2 + 12 = x .$$

4. Да. Если $x_1^2 - 2y_1^2 = a$, а $x_2^2 - 2y_2^2 = b$, то

$$\left(x_1 - y_1\sqrt{2}\right)\left(x_1 + y_1\sqrt{2}\right) = a ,\quad \left(x_2 - y_2\sqrt{2}\right)\left(x_2 + y_2\sqrt{2}\right) = b .$$

Но тогда

$$\left(x_1 - y_1\sqrt{2}\right)\left(x_2 - y_2\sqrt{2}\right)\left(x_1 + y_1\sqrt{2}\right)\left(x_2 + y_2\sqrt{2}\right) = ab ,$$

и

$$\left(x_1x_2 + 2y_1y_2\right)^2 - 2\left(x_1y_2 + x_2y_1\right)^2 = ab .$$

5. За 35 дней. За 140 дней один человек выпивает 10 бочонков кваса, а вместе с женой – 14 бочонков. Следовательно, жена за 140 дней выпивает 4 бочонка.

Физика

1. а) Джон Джозеф Томсон и Джордж Паджет Томсон. б) Электрон. в) Кавендишская лаборатория; Э.Резерфорд. г) Дж.Дж.Томсон изучил особенности электрических разрядов в газах, предложил одну из первых моделей атома, сформулировал принцип действия масс-спектрометра. Дж.П.Томсон осуществил исследования по теории рассеяния, электрическим разрядам в газах, аэродинамике.

2. а) Планет Солнечной системы стало восемь, Плутон перешел в группу карликовых планет. б) Солнечная система стала более гармоничной. в) Ловелл, Томбо, Клайд, Койпер и другие.

3. а) Прохождение Венеры по диску Солнца. б) Наличие атмосферы на Венере. в) М.В.Ломоносов; Дж.Кук.

4. а) Джеймс Клерк Максвелл. б) Теория электромагнитного поля. в) Опыты Г.Герца по излучению и приему электромагнитных волн; опыт П.Н.Лебедева по измерению давления света. г) Статистическая физика – «демон Максвелла», распределение Максвелла; электродинамика – уравнения Максвелла.

5. а) Огюстен Френель. б) При дифракции света на круглом отверстии, при определенном расстоянии от отверстия до экрана, в центре экрана образуется темное тепло. в) С.Пуассон («пятно Пуассона»). г) Д.Араго.

ВСЕРОССИЙСКАЯ СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО ФИЗИКЕ

1. $\operatorname{ctg}\alpha = \left(1 - \frac{\gamma^2}{2}\right)\operatorname{ctg}57°$, где $\gamma = \frac{2\pi}{31}$.

2. $\varepsilon = \frac{2g}{R}\frac{\left(2 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi\right)\sin\varphi}{\left(\sin^2\varphi + 1\right)^2}$, где φ – угол между вертикалью и радиусом-вектором, проведенном из центра цилиндра к центру масс.

3. Да, возможен. **4.** $a = \text{const} = -\frac{2g\mu v_0}{\omega_0 R}$.

5. $\Delta S = Q\left(\frac{1}{(1-\eta)T_0} - \frac{1}{T_{\text{п}}}\right)$. **6.** $W = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{qAR}{2rQ}$.

7. $B_1 = \mu_0 nI\frac{r^2}{R^2}$, $B_2 = \mu_0 nI\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$. **8.** $P = \frac{U_0^2}{4R_1}$. **9.** $I = 0$.

ОКРУЖНОСТИ НА РЕШЕТКАХ

(см. «Квант» №6 за 2006 г.)

1. См. рис.15.

2. а) Окружность радиуса 5 с центром в центре единичной клетки, как нетрудно проверить непосредственно, содержит ровно 65 единичных клеток.

Плитки со стороной 10 можно уложить аналогичным образом, тогда все они будут расположены внутри окружности радиуса 50. Указанная окружность, следовательно, не является окружностью наименьшего радиуса, содержащей 64 плитки. Внутри круга радиуса 50 можно уложить 67 плиток со стороной 10 (рис.16).

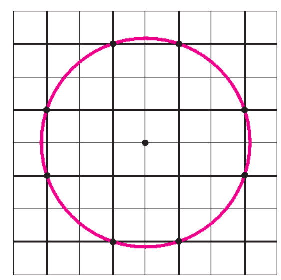

Рис. 15

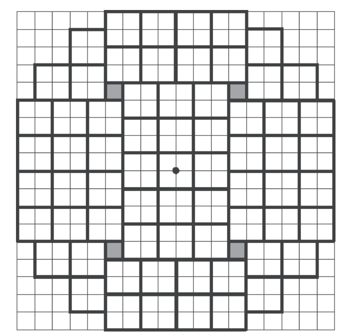

Рис. 16

б) 8; см. рисунок 17, на котором $AB = 10$ – диаметр окружности и $CD = 20\sqrt{6\sqrt{3} - 8} \approx 30{,}9$.

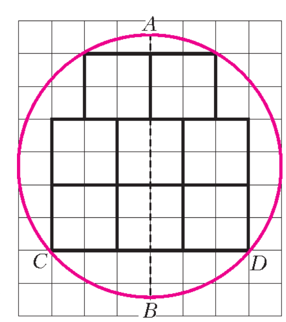

Рис. 17

3. *Указание.* Узел $(a;\ b)$ невидим тогда и только тогда, когда числа a и b взаимно просты. Кроме того, квадрат расстояния между любыми узлами решетки – целое число.

4. *Указание.* Сфера

$$\left(x - \sqrt{2}\right)^2 + \left(y - \sqrt{3}\right)^2 + \left(z - 1/3\right)^2 = R^2$$

не может содержать двух узлов ни при каком фиксированном $R > 0$. Это следует из того, что если $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ и $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ два различных узла на сфере, то из равенства

$$\left(x_0 - \sqrt{2}\right)^2 + \left(y_0 - \sqrt{3}\right)^2 + \left(z_0 - 1/3\right)^2 = $$

$$= \left(x_1 - \sqrt{2}\right)^2 + \left(y_1 - \sqrt{3}\right)^2 + \left(z_1 - 1/3\right)^2$$

после небольших упрощений мы получили бы, что $\sqrt{3/2}$ – рациональное число.

5. Заметим, что все n узлов данной окружности Шинцеля лежат на сфере, так как сама окружность на ней расположена (при $z = 0$ из уравнения сферы получаем уравнение окружности Шинцеля). Если $z \neq 0$ и $(x;\ y;\ z)$ – узел решетки на сфере, то из равенства $\left(x - x_0\right)^2 + y^2 - R^2 = z\left(2\sqrt{2} - z\right)$ следует, что $z = 2\sqrt{2}$, так как число $\left(x - x_0\right)^2 + y^2 - R^2$, как легко заметить, рационально. А это противоречит тому , что z – целое число.

6. а) Во-первых, заметим, что наша решетка состоит из точек с координатами $\left(\frac{t}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}t+\sqrt{3}s\right)$, $t,s\in\boldsymbol{Z}$. Поэтому нужно показать, что при любом n найдется окружность, содержащая n точек указанного вида. В основе доказательства лежит следующая **лемма**: уравнение $x^2+3y^2=7^k$ имеет $2(k+1)$ решений $(x;y)$ и таких, что у $2(k-1)$ из них оба числа делятся на 7 и у 4-х оба числа не делятся на 7.
Используя эту лемму (которая доказывается по аналогии с тем, как это делается при анализе аналогичной задачи на клетчатой бумаге), нетрудно показать, что окружность

$$\left(x-\frac{1}{6}\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{7^{\frac{3n-1}{2}}}{6}$$

содержит ровно n точек нужного вида.
б) Шестиугольная решетка состоит из точек с координатами $\left(\frac{t}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}t+\sqrt{3}s\right)$, $t,s\in\boldsymbol{Z}$ и t не делится на 3.
Здесь также используется отмеченная в пункте а) лемма.
При четном n нужная окружность имеет уравнение

$$x^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{7^{\frac{n-2}{4}}}{2}.$$

При $n=4k+1$ подходит окружность

$$\left(x-\frac{3}{10}\right)^2+y^2=\frac{7^{6k+1}}{10},$$

а при $n=4k+3$ – окружность

$$\left(x-\frac{3}{10}\right)^2+y^2=\frac{7^{6k+3}}{10}.$$

7. Если на некоторой окружности существуют три рациональные точки, то это означает, что обе координаты центра такой окружности есть рациональные числа. Это следует, например, из того, что центр окружности, описанной около треугольника (с вершинами в трех рациональных точках), лежит на пересечении двух серединных перпендикуляров к сторонам треугольника, коэффициентами уравнений которых являются рациональные числа.

8. а) Окружность $x^2+y^2=3$ не содержит ни одной рациональной точки. Действительно, если $(x;y)$ – рациональная точка на этой окружности, то ее координаты можно записать в виде дробей с наименьшим общим знаменателем $x=a/d$ и $y=b/d$ и тогда получим, что $a^2+b^2=3d^2$. Отсюда вытекает, что если бы числа a и b делились на 3, то правая часть делилась бы на 9, отсюда и m делилось бы на три, и наши дроби можно было бы сократить на 3, вопреки нашему предположению, что m – их наименьший общий знаменатель. Следовательно, по крайней мере одно из чисел a и b не делится на 3. Но, как известно, квадрат целого числа, не делящегося на 3, дает при делении на три остаток 1. Если и другое из чисел a и b не делится на 3, то сумма a^2+b^2 при делении на 3 дает в остатке 2, что невозможно, так как эта сумма равна $3d^2$ и поэтому делится на 3. Если же другое из чисел a и b делится на 3, то сумма a^2+b^2 при делении на 3 дала бы остаток 1, что тоже невозможно.
б) Легко проверить, что окружность $\left(x-\sqrt{2}\right)^2+\left(y-\sqrt{2}\right)^2=4$ содержит только одну рациональную точку с координатами (0; 0).
в) Нетрудно убедиться, что окружность $x^2+\left(y-\sqrt{2}\right)^2=3$ содержит ровно две точки с рациональными координатами: (1; 0), (–1; 0).
г) Это следует из того, что если a и b – рациональные числа такие, что $a^2+b^2=R^2$, то, как легко проверить, при всяком рациональном числе r точка $(x;y)$ с координатами

$$x=\frac{2ar+b\left(1-r^2\right)}{1+r^2}\quad\text{и}\quad y=\frac{a\left(1-r^2\right)-2br}{1+r^2}$$

будет рациональной и будет удовлетворять равенству

$$x^2+y^2=r^2.$$

9. Без ограничения общности можно считать, что центр окружности находится в начале координат. Если узел решетки $(x;y)$ лежит на окружности, но не на координатных осях и биссектрисах координатных углов, то вместе с таким узлом на окружности будут находиться еще 7 узлов: $(y;x)$, $(x;-y)$, $(-x;y)$, $(-y;x)$, $(y;-x)$, $(-y;-x)$, $(-x;-y)$.
Но при делении на 8 число 1988 дает в остатке 4, поэтому кроме узлов указанных типов должны быть 4 узла на осях или биссектрисах. В первом случае $0^2+x^2=R^2$ для некоторого целого x, поэтому R – целое число. Во втором случае для некоторого целого x имеем $x^2+x^2=R^2$ и, тем самым, $R=\sqrt{2}x$. Следовательно, $R\sqrt{2}$ – целое число.

10. *Указание.* Рассмотрим окружность

$$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+y^2=\frac{5^{n-1}}{9},\ \text{т.е.}\ (3x-1)^2+(3y)^2=5^{n-1}.$$

По теореме о представлении натурального числа в виде сумме двух квадратов заключаем, что уравнение $a^2+b^2=5^{n-1}$ имеет $4n$ решений. Если же число b делится на 3 и число a при делении на 3 дает в остатке 1, то это уравнение имеет только n решений.

Квант журнал ©

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ
А.А.Егоров, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ
Д.Н.Гришукова, В.В.Иванюк, А.Е.Пацхверия, З.М.Сурова, В.М.Хлебникова

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР
Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА
Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
Тел.: 930-56-48
E-mail: admin@kvant.info, math@kvant.info, phys@kvant.info

Отпечатано в ОАО ордена Трудового Красного Знамени «Чеховский полиграфический комбинат»
142300 г.Чехов Московской области,
Сайт: www.chpk.ru E-mail: marketing@chpk.ru
Факс: 8(49672) 6-25-36, факс: 8(499) 270-73-00
Отдел продаж услуг многоканальный: 8(499) 270-73-59