свое положение на плоскости со временем. Введем его таким же путем, как вводится обычное понятие скорости. Сначала определим угловое положение движущейся прямой: под угловым положением прямой будем понимать угол между прямой и некоторой осью. Угол этот всегда отсчитывается от оси. В зависимости от того, как отсчитывается угол (против или по часовой стрелке), он может быть как положительным, так и отрицательным. Затем вводится угловое перемещение прямой в течение заданного промежутка времени как приращение угла между движущейся прямой и осью; потом – средняя угловая скорость прямой в течение заданного промежутка времени; наконец – мгновенная угловая скорость прямой, или просто ее угловая скорость.

После этого мы будем трактовать угол между прямыми как разность углов, которые эти прямые образуют с заданной осью. Ясно, что угол между прямыми может быть как положительным, так и отрицательным.

Переходим к определениям. Пусть движущаяся прямая l в момент времени t_1 занимает положение l_1, а в момент времени t_2 – положение l_2 (рис.2). На этих

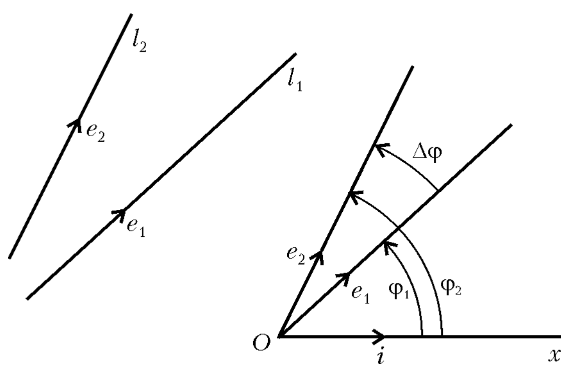

Рис. 2

прямых выберем направляющие единичные векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ соответственно. Выберем на плоскости ось x с направляющим единичным вектором $\vec{i}$ на этой оси. Отложим векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ от точки O на оси x. Угол $\varphi_1 = \angle(\vec{i}, \vec{e}_1)$ определяет угловое положение прямой l в момент t_1, а угол $\varphi_2 = \angle(\vec{i}, \vec{e}_2)$ определяет угловое положение прямой l в момент t_2. При этом, как мы уже договорились, угол $\varphi = \angle(\vec{i}, \vec{e})$ будем считать положительным, если поворот от вектора $\vec{i}$ до вектора $\vec{e}$ идет против часовой стрелки, и отрицательным, если этот поворот идет по часовой стрелке.

Приращение $\Delta\varphi$ угла φ в течение промежутка времени $\Delta t = t_2 - t_1$ есть разность $\varphi_2 - \varphi_1$. Отношение $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ назовем средней угловой скоростью за этот промежуток времени. Мгновенная угловая скорость прямой есть предел этого отношения при $\Delta t \to 0$, т.е. производная $\varphi'(t)$. Мы будем обозначать ее $\dot{\varphi}$, как принято в механике.

Пусть теперь на рисунке 2 через l_1 и l_2 обозначена не движущаяся прямая l в разные моменты времени, а две разные прямые в один и тот же момент времени. Тогда углы φ_1 и φ_2 есть углы этих прямых с осью x, а их разность и будет ориентированным углом между прямыми. При этом угол от первой до второй прямой обозначим как φ_{21}, а угол от второй прямой до первой обозначим как φ_{12}. Тогда $\varphi_{21} = \varphi_2 - \varphi_1$, а $\varphi_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$. Очевидно, что $\varphi_{21} = -\varphi_{12}$.

Продифференцировав равенство $\varphi_{21} = \varphi_2 - \varphi_1$ по времени, получим скорость изменения угла между прямыми: $\dot{\varphi}_{21} = \dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1$. Отсюда имеем: если угловые скорости данных прямых одинаковы, то $\dot{\varphi}_{21} = 0$. Но тогда угол между прямыми постоянный, не меняется со временем. Верно и обратное утверждение: если угол между прямыми со временем не меняется, то угловые скорости этих прямых равны.

Аналогичным соотношением $\Delta\varphi_{21} = \Delta\varphi_2 - \Delta\varphi_1$ связаны между собой угловые перемещения прямых $\Delta\varphi_2$, $\Delta\varphi_1$ и приращение угла между ними $\Delta\varphi_{21}$ за некоторый промежуток времени. Убедитесь в этом самостоятельно. В дальнейшем мы позволим себе записывать любое из равенств $\dot{\varphi}_{21} = \dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1$, $\Delta\varphi_{21} = \Delta\varphi_2 - \Delta\varphi_1$, коль скоро выполняется одно из них. Подробнее: если $\dot{\varphi}_{21} = \dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1$, то $\Delta\varphi_{21} = \Delta\varphi_2 - \Delta\varphi_1$, и обратно.

Еще одно. Пусть в плоскости движется многоугольник, причем ни длины его сторон, ни углы между сторонами не меняются. Тогда из только что сказанного следует, что угловые скорости его сторон одинаковы. И эти угловые скорости можно назвать угловой скоростью многоугольника.

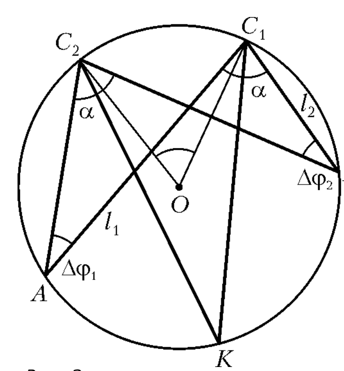

Рис. 3

Перейдем теперь к частному случаю, когда две прямые вращаются с одинаковыми угловыми скоростями, причем центры вращения неподвижны и лежат на этих прямых. Точнее: прямая l_1 вращается вокруг неподвижной точки A, лежащей на прямой l_1; прямая l_2 вращается вокруг неподвижной точки B, лежащей на прямой l_2 (рис.3). Пусть они в момент t_1 пересекались в точке C_1, а в момент t_2 пересекаются в точке C_2. Ясно, что при этом $\Delta\varphi_2 = \Delta\varphi_1$. Так как прямые l_1 и l_2 вращаются с одинаковыми скоростями, то угол φ_{21} (на рисунке 3 это углы AC_1B и AC_2B, равные α) остается постоянным. Из планиметрии известно, что тогда точка C пересечения данных прямых находится на дуге окружности, проходящей через точки A и B. Пусть точка O – центр этой окружности. Радиус OC этой окружности в процессе вращения перешел из положения OC_1 в положение OC_2. Обозначим угол C_2OC_1 как $\Delta\varphi_{OC}$: $\angle C_2OC_1 = \Delta\varphi_{OC}$. Очевидно выполнение равенства $\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_2 = \frac{1}{2}\Delta\varphi_{OC}$ (достаточно посмотреть на рисунок 3 и увидеть, что углы $\Delta\varphi_1, \Delta\varphi_2$ вписанные, а третий угол $\Delta\varphi_{OC}$ центральный, и все они опираются на одну и ту же дугу C_1C_2). Запишем это равенство чуть иначе:

$$\Delta\varphi_{AC} = \Delta\varphi_{BC} = \frac{1}{2}\Delta\varphi_{OC}. \quad (1)$$

Иллюстрация Е.Силиной

Но тогда

$$\dot{\varphi}_{AC} = \dot{\varphi}_{BC} = \frac{1}{2}\dot{\varphi}_{OC}. \qquad (2)$$

Эти два равенства будут справедливы не только для хорд AC и BC, но и для любой хорды, проведенной из произвольной неподвижной точки K данной окружности в движущуюся по этой окружности точку C:

$$\Delta\varphi_{KC} = \frac{1}{2}\Delta\varphi_{OC} \qquad (3)$$

и

$$\dot{\varphi}_{KC} = \frac{1}{2}\dot{\varphi}_{OC}. \qquad (4)$$

Иначе говоря, угловая скорость хорды в два раза меньше угловой скорости радиуса при условии, что хорда и радиус «упираются» в одну и ту же точку, движущуюся по данной окружности, а другой конец хорды неподвижен.

В дальнейшем нам понадобится некая чисто техническая договоренность. Чтобы избежать рассмотрения различных случаев, не отличающихся принципиально, мы будем считать одинаковыми углы между прямыми, которые отличаются на $n\pi$, где n – целое число. Кроме того, мы будем считать одинаковыми углы α и $\pi-\alpha$. (Обе эти договоренности фиксируют то обстоятельство, что взаимное положение двух прямых при этом одно и то же.)

Перейдем теперь к задачам (некоторые из них взяты у вышеупомянутых авторов).

Задача 1 (основная). *Пусть точка P лежит на окружности с центром O, описанной около треугольника ABC, и P_1, P_2, P_3 – проекции точки P на прямые BC, CA, AB (рис.4). Докажите, что точки P_1, P_2, P_3 лежат на одной прямой (иначе говоря, нужно доказать существование прямой Симсона, соответствующей точке P и треугольнику ABC).*

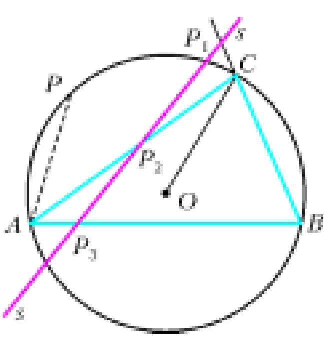

Рис. 4

Доказательство. Пусть точки A, B, P неподвижны, а точка C движется по окружности. Обозначим угловую скорость радиуса OC как $\dot{\varphi}_{OC}$, угловую скорость хорды AC как $\dot{\varphi}_{AC}$, угловую скорость хорды BC как $\dot{\varphi}_{BC}$. Тогда $\dot{\varphi}_{AC} = \dot{\varphi}_{BC} = \frac{1}{2}\dot{\varphi}_{OC}$.

Далее, так как углы AP_3P и AP_2P прямые, то точки A, P_3, P_2, P лежат на окружности с диаметром AP. Из неподвижности точек A, B, P и движения точки C следует, что точка P_3 неподвижна на окружности с диаметром AP, а точка P_2 движется по той же окружности. Тогда угловые скорости прямых AP_2, PP_2, P_3P_2 равны. Прямая AP_2 и прямая AC – одна и та же прямая. И так как $\dot{\varphi}_{AC} = \frac{1}{2}\dot{\varphi}_{OC}$, то $\dot{\varphi}_{P_3P_2} = \dot{\varphi}_{AP_2} = \dot{\varphi}_{AC} = \frac{1}{2}\dot{\varphi}_{OC}$.

Аналогично доказывается, что точки B, P_1, P, P_3 расположены на окружности с диаметром PB, причем точка P_1 движется по этой окружности. При этом выполняется равенство $\dot{\varphi}_{P_3P_1} = \dot{\varphi}_{BC} = \frac{1}{2}\dot{\varphi}_{OC}$.

Оказывается, что при движении точки C по исходной окружности отрезки P_3P_2 и P_3P_1 вращаются с одинаковыми угловыми скоростями, а тогда, как мы уже сказали выше, угол между ними не меняется.

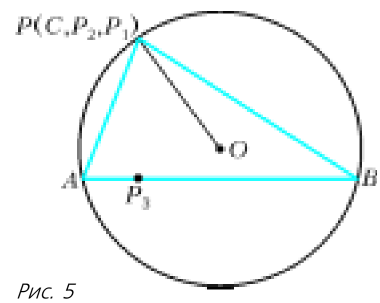

Рис. 5

Теперь – последний шаг доказательства. Пусть в какой-то момент времени точка C попала в точку P. Проследив за соответствующими перемещениями точек P_2 и P_1, мы увидим, что в этот же момент и они попадут в точку P (рис.5). Но тогда в этот момент угол между прямыми P_3P_2 и P_3P_1 окажется равен нулю. А так как угол между этими прямыми не меняется, то он всегда (в любой момент времени) равен нулю. Отсюда, учитывая, что эти прямые имеют общую точку P_3, следует, что точки P_1, P_2, P_3 лежат на одной прямой.

Попутно получен результат, который понадобится нам позже: угловая скорость прямой Симсона для треугольника ABC, вписанного в окружность с центром O, равна половине угловой скорости $\dot{\varphi}_{OC}$ радиуса OC, проведенного в движущуюся по этой окружности точку C. Обозначим прямую Симсона как s и запишем это соотношение так: $\dot{\varphi}_s = \frac{1}{2}\dot{\varphi}_{OC}$. Учитывая равенство (2), мы можем написать

$$\dot{\varphi}_s = \dot{\varphi}_{AC} = \dot{\varphi}_{BC} = \frac{1}{2}\dot{\varphi}_{OC}, \qquad (5)$$

и, соответственно,

$$\Delta\varphi_s = \Delta\varphi_{AC} = \Delta\varphi_{BC} = \frac{1}{2}\Delta\varphi_{OC}. \qquad (6)$$

Осмыслим полученный нами результат. У нас была дана окружность, вписанный в нее треугольник ABC, некоторая точка P на окружности, отличная от вершины этого треугольника. Для этой конфигурации было доказано существование прямой Симсона. Метод, который привел к этому результату, состоял в том, что мы начали перемещать по окружности одну из вершин данного треугольника (вершину C), оставив неподвижными две другие его вершины и выбранную точку P на окружности. Разумеется, так как вершины треугольника совершенно равноправны, то аналогичный результат мы получим, оставив неподвижными точку P и вершины A, C, но перемещая по этой же окружности вершину B: $\dot{\varphi}_s = \frac{1}{2}\dot{\varphi}_{OB}$, $\Delta\varphi_s = \frac{1}{2}\Delta\varphi_{OB}$. И, аналогично, $\dot{\varphi}_s = \frac{1}{2}\dot{\varphi}_{OA}$, $\Delta\varphi_s = \frac{1}{2}\Delta\varphi_{OA}$.

Если теперь последовательно перемещать вершины A, B, C треугольника ABC по окружности, оставляя точку P и другие две вершины неподвижными, то угловое перемещение прямой Симсона будет в итоге равно сумме последовательных перемещений:

$$\Delta\varphi_s = (\Delta\varphi_s)_A + (\Delta\varphi_s)_B + (\Delta\varphi_s)_C = \frac{1}{2}(\Delta\varphi_{OA} + \Delta\varphi_{OB} + \Delta\varphi_{OC}), \quad (7)$$

и, соответственно,

$$\dot\varphi_s = \frac{1}{2}(\dot\varphi_{OA} + \dot\varphi_{OB} + \dot\varphi_{OC}). \quad (8)$$

Теперь можно рассмотреть несколько вариантов.

1) Пусть точка P неподвижна.

а) Пусть при неподвижной точке P точка C неподвижна ($\Delta\varphi_{OC} = 0$) и сторона AB, не меняя своей длины, скользит своими концами A и B по окружности. Тогда угловые перемещения радиусов OA и OB одинаковы и равны угловому перемещению стороны AB, а также треугольника OAB: $\Delta\varphi_{OA} = \Delta\varphi_{OB} = \Delta\varphi_{AB}$. Из формулы (7) получаем, что $\Delta\varphi_s = \Delta\varphi_{OA} = \Delta\varphi_{OB} = \Delta\varphi_{AB}$. Поэтому $\dot\varphi_s = \dot\varphi_{OA} = \dot\varphi_{OB} = \dot\varphi_{AB}$.

б) Пусть при неподвижной точке P весь треугольник ABC (обозначим его как T) вращается вокруг центра описанной окружности. Тогда его угловое перемещение такое же, как и угловое перемещение радиусов данной окружности, проведенных в его вершины, а потому выполняется равенство $\Delta\varphi_T = \Delta\varphi_{OA} = \Delta\varphi_{OB} = \Delta\varphi_{OC}$. Из равенств (7) и (8) приходим к следующим соотношениям: $\Delta\varphi_s = \frac{3}{2}\Delta\varphi_T$, $\dot\varphi_s = \frac{3}{2}\dot\varphi_T$.

2) Пусть треугольник ABC, назовем его треугольником T, неподвижен, а точка P перемещается по окружности. Как будет при этом вести себя прямая Симсона для этого треугольника? Для ответа на этот вопрос поступим следующим образом.

Оставляя неподвижной точку P, повернем треугольник T на угол $\Delta\varphi_T$. Тогда его прямая Симсона повернется, как мы только что показали, на угол $(\Delta\varphi_s)_1 = \frac{3}{2}\Delta\varphi_T$. После этого повернем на угол $-\Delta\varphi_T$ все: и радиус OP, и треугольник T. Тогда треугольник T вернется в прежнее положение, радиус OP повернется на угол $-\Delta\varphi_T$, и получаем равенство $\Delta\varphi_{OP} = -\Delta\varphi_T$, откуда $\Delta\varphi_T = -\Delta\varphi_{OP}$. А что произойдет с прямой Симсона? В результате второго перемещения она повернется на угол $(\Delta\varphi_s)_2 = (-\Delta\varphi_T)$. В итоге двух последовательных перемещений $(\Delta\varphi_s)_1$ и $(\Delta\varphi_s)_2$ исходная прямая Симсона повернется на угол $\Delta\varphi_s = (\Delta\varphi_s)_1 + (\Delta\varphi_s)_2 = \frac{3}{2}\Delta\varphi_T + (-\Delta\varphi_T) = \frac{1}{2}\Delta\varphi_T$. И получаем такое равенство: $\Delta\varphi_s = -\frac{1}{2}\Delta\varphi_{OP}$.

Итак, при перемещении точки P по окружности таком, что радиус OP поворачивается на угол $\Delta\varphi_{OP}$, приходим к равенствам

$$\Delta\varphi_s = -\frac{1}{2}\Delta\varphi_{OP}, \quad (9)$$

и, соответственно,

$$\dot\varphi_s = -\frac{1}{2}\dot\varphi_{OP}. \quad (10)$$

Таким образом, мы нашли в данном случае угловую скорость прямой Симсона, когда известна угловая скорость радиуса OP.

Рассмотрим теперь следующую задачу.

Задача 2. *Углы треугольника ABC, вписанного в окружность с центром O, равны α, β, γ. Положение точки P на окружности задано углом $AOP = \delta$ (рис.6). Какие углы образует прямая Симсона этого треугольника с его сторонами?*

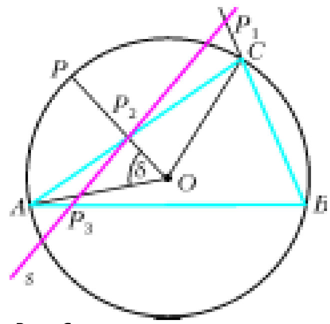

Рис. 6

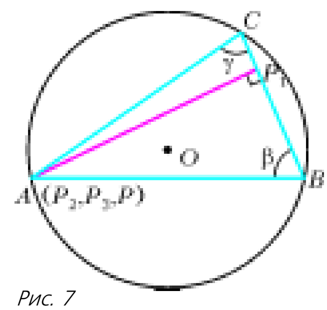

Рис. 7

Решение. Переместим точку P в вершину A и примем это положение как начальное. В этом положении треугольника ABC и точки P точки B, C остаются на своих местах, заданных условием (рис.7), а в точке A окажутся также точки P_3 и P_2. Прямой Симсона s будет прямая AP_1. Углы, которые она образует в этом начальном положении со сторонами треугольника (мы снабдим их дополнительным нулевым индексом), равны $(\varphi_{s,AB})_0 = 90° - \beta$, $(\varphi_{s,BC})_0 = 90°$, $(\varphi_{s,CA})_0 = -(90° - \gamma)$.

Вернем теперь точку P в заданное положение. Для этого повернем радиус OP на угол $\Delta\varphi_{OP} = -\delta$. Тогда прямая Симсона повернется на угол $\Delta\varphi_s = -\frac{1}{2}\Delta\varphi_{OP} = \frac{1}{2}\delta$. Поэтому углы, которые она образует в заданном условием задачи положении, равны $(\varphi_{s,AB}) = \frac{\delta}{2} + 90° - \beta$, $(\varphi_{s,BC}) = \frac{\delta}{2} + 90°$, $(\varphi_{s,CA}) = \frac{\delta}{2} - (90° - \gamma)$. Так как $90° = (\alpha + \beta + \gamma)/2$, можно этому результату придать более симпатичную форму:

$$(\varphi_{s,AB}) = \frac{\delta + \alpha - \beta + \gamma}{2}, \qquad (\varphi_{s,BC}) = \frac{\delta + \alpha + \beta + \gamma}{2},$$

$$(\varphi_{s,CA}) = \frac{\delta - \alpha - \beta + \gamma}{2}.$$

Задача 3. *Треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ вписаны в окружность с центром O. На этой окружности расположены точки P_1 и P_2. Известны углы, которые образуют с некоторой фиксированной осью радиусы данной окружности, проведенные в вершины обоих треугольников и в указанные точки. Требуется найти угол между прямыми*

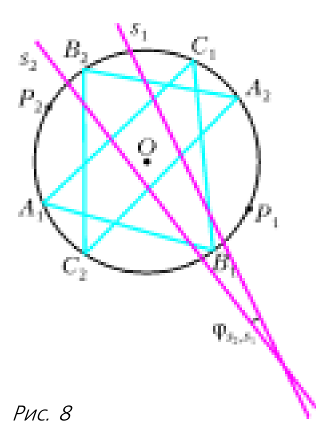

Рис. 8

Симсона двух конфигураций: (P_1, $A_1B_1C_1$) *и* (P_2, $A_2B_2C_2$) *(рис.8).*

Решение. Пусть α_1 – угол между OA_1 и осью, α_2 – угол между OA_2 и осью, β_1 – угол между OB_1 и осью, β_2 – угол между OB_2 и осью, γ_1 – угол между OC_1 и осью, γ_2 – угол между OC_2 и осью, δ_1 – угол между OP_1 и осью, δ_2 – угол между OP_2 и осью.

Переместим точки A_1, B_1, C_1 в точки A_2, B_2, C_2 соответственно и точку P_1 в точку P_2. Тогда радиусы, проведенные в эти точки, повернутся соответственно на углы $\alpha_2-\alpha_1$, $\beta_2-\beta_1$, $\gamma_2-\gamma_1$, $\delta_2-\delta_1$. При каждом из таких перемещений прямая Симсона, согласно (7) и (9), повернется на углы $0,5(\alpha_2-\alpha_1)$, $0,5(\beta_2-\beta_1)$, $0,5(\gamma_2-\gamma_1)$, $0,5(\delta_1-\delta_2)$. Вследствие таких перемещений прямая Симсона первой конфигурации (s_1) совместится с прямой Симсона второй конфигурации (s_2). Согласно формулам (7) и (9), угол между прямыми s_1 и s_2 находится по формуле

$$\varphi_{s_1,s_2} = 0,5\left(\left(\alpha_2+\beta_2+\gamma_2\right)-\left(\left(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1\right)+\left(\delta_1-\delta_2\right)\right)\right). \qquad (10)$$

Замечание. Полученный угол может оказаться больше 180° или меньше 0°. В таком случае, согласно нашей договоренности, мы можем прибавлять или вычитать по 180° из полученного результата, пока не придем к углу в промежутке от 0° до 180°.

Задача 4. *Хорда PQ описанной окружности треугольника ABC перпендикулярна стороне BC (рис.9). Докажите, что прямая Симсона s конфигурации (P, ABC) параллельна прямой AQ.*

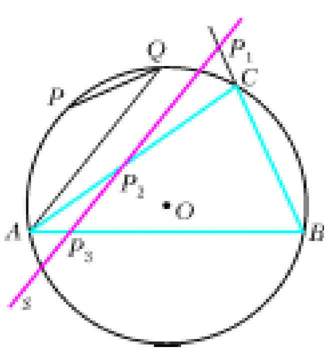

Рис. 9

Доказательство. Переместим вершину A в точку P и примем это положение как начальное. В этом положении треугольника ABC его вершина A совпадает с точкой P, а точки B, C, P_1, Q остаются на своих местах, заданных условием (рис.10). В этом случае в точке P окажутся также точки P_3 и P_2. Следовательно, прямая s совпадет с прямой AQ, иначе говоря, эти прямые образуют угол 0°. Будем теперь перемещать точку A по окружности; пусть угловая скорость радиуса OA равна $\dot\varphi_{OA}$. Тогда $\dot\varphi_s = \frac{1}{2}\dot\varphi_{OA}$. Но угловая скорость хорды QA, как было сказано раньше, также равна половине угловой скорости радиуса OA: $\dot\varphi_{QA} = \frac{1}{2}\dot\varphi_{OA}$. Поэтому прямая s и прямая AQ будут образовывать угол 0° при любом положении точки A, т.е. будут параллельны.

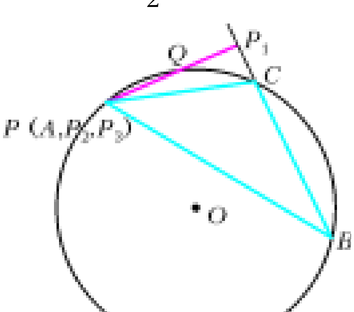

Рис. 10

Задача 5. *Четырехугольник ABCD вписан в окружность. На три его стороны AB, AD, BC из точки P этой окружности опущены перпендикуляры* PP_1, PP_2, PP_3 *соответственно. Найдите угол* $P_2P_1P_3$.

Решение. Рассмотрим два случая: 1) точка P находится на одной из дуг AD, DC, CB; 2) точка P находится на дуге AB (каждый раз дуги не содержат вершин четырехугольника).

Случай 1 (рис.11). Отрезок P_1P_2 – это отрезок прямой Симсона треугольника ABD, а отрезок P_1P_3 – отрезок прямой Симсона треугольника ABC. Первый треугольник получается из второго перемещением точки C по окружности до совпадения ее с точкой D, т.е. поворотом радиуса OC на угол $\Delta\varphi_{OC} = \angle DOC$. При таком повороте стороны второго треугольника AC и BC поворачиваются на одинаковые углы: $\angle DAC = \angle DBC = \alpha$. На такой же угол (согласно (6)) повернется и прямая Симсона. Следовательно, искомый угол $P_2P_1P_3$ также равен α.

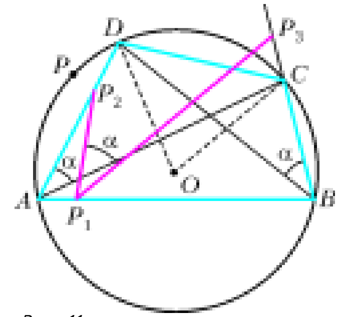

Рис. 11

Такой же результат получится, когда точка P лежит на дуге BC или на дуге CD.

Случай 2 (рис.12). В этом случае угол $P_2P_1P_3$ образован отрезками прямых Симсона треугольника ABD (отрезок P_1P_2) и треугольника BCD (отрезок P_1P_3). При перемещении точки C в точку D отрезок P_1P_3 (так же, как и в случае 1) поворачивается на угол α. При этом угол $P_2P_1P_3$ превращается в развернутый, и прямые Симсона опять же совпадают.

Искомый угол равен теперь разности развернутого угла и вписанного угла α, опирающегося на дугу CD. Как мы договорились, такой угол мы считаем одинаковым с углом α.

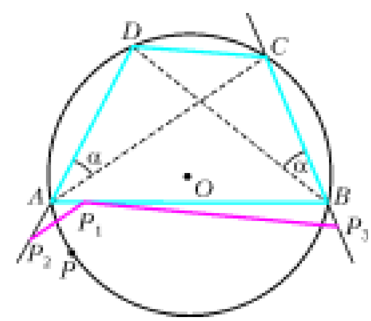

Рис. 12

Эту задачу можно сформулировать в несколько другом виде. Пусть длины сторон BC, CD, DA, AB вписанного четырехугольника $ABCD$ равны a_1, a_2, a_3, a_4 соответственно. Пусть, далее, точка P лежит на дуге, которую стягивает одна из сторон четырехугольника, скажем сторона DA. На стороны данного четырехугольника спроектируем точку P, и пусть P_1 – ее проекция на сторону DA, P_2 – на сторону AB, P_3 – на сторону BC, P_4 – на сторону

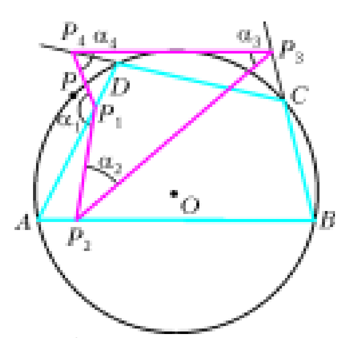

Рис. 13

CD (рис.13). Обозначим углы при вершинах четырехугольника $P_1P_2P_3P_4$ как α_1, α_2, α_3, α_4 соответственно. При этом угол α_1 дополняет угол P_1 этого четырехугольника до 360°, а другие углы α_i принадлежат ему. Тогда верна своеобразная «теорема синусов», а именно:

$$a_1/\sin\alpha_1 = a_2/\sin\alpha_2 = a_3/\sin\alpha_3 = a_4/\sin\alpha_4 = 2R,$$

где R – радиус данной окружности.

Задача 6. *Из точки P описанной около треугольника ABC окружности проведены наклонные PP_1, PP_2, PP_3 на его стороны под равными и одинаково ориентированными углами α (рис.14). Докажите, что точки P_1, P_2, P_3 лежат на одной прямой. Это обобщенная прямая Симсона. Назовем ее альфа-прямой Симсона и будем обозначать как s_α.*

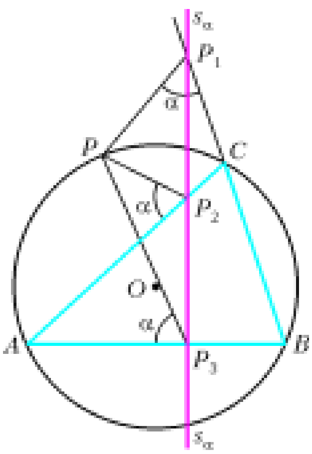

Рис. 14

Доказательство. При решении этой задачи будем действовать так же, как при решении задачи 1.

Точки A, P, P_3, P_2 лежат на одной окружности, поскольку углы AP_2P, AP_3P одинаковы. При перемещении точки C по данной окружности первые три точки неподвижны, а точка P_2 перемещается. Тогда, согласно формуле (2), при этом перемещении выполняется равенство $\dot\varphi_{P_3P_2} = \dot\varphi_{AP_2}$. Но прямая AP_2 та же самая, что и прямая AC. Поэтому можно записать так: $\dot\varphi_{P_3P_2} = \dot\varphi_{AP_2} = \dot\varphi_{AC}$.

Точно так же точки B, P, P_3, P_1 лежат на одной окружности, и при перемещении точки C выполняются равенства $\dot\varphi_{P_3P_1} = \dot\varphi_{BC} = \dot\varphi_{AC}$.

Из последних двух равенств следует, что угловые скорости отрезков P_3P_2 и P_3P_1 равны. В момент, когда точка C совпадает с точкой P, эти отрезки совпадают, более общо – лежат на одной прямой. Поэтому они лежат на одной прямой и при любом положении точки C.

Заметим, что прямая P_3P_2, как и прямая P_3P_1, – это и есть прямая s_α, поэтому мы можем написать такое равенство: $\dot\varphi_{s_\alpha} = \dot\varphi_{AC} = \dot\varphi_{BC}$. Отсюда следует, что при перемещении вершины C треугольника ABC по окружности угловая скорость прямой s_α не зависит от α.

Задача 7. *Для точки P и треугольника ABC построены две прямые Симсона: альфа-прямая s_α и бета-прямая s_β ($\alpha > \beta$). Докажите, что угол между этими прямыми равен $\alpha - \beta$.*

Доказательство. В предыдущей задаче было получено равенство $\dot\varphi_{s_\alpha} = \dot\varphi_{AC}$. Так как угловая скорость прямой Симсона не зависит от величины угла наклона, то можно написать и такое равенство: $\dot\varphi_{s_\beta} = \dot\varphi_{AC}$. Значит, $\dot\varphi_{s_\alpha} = \dot\varphi_{s_\beta}$. Так как угловые скорости прямых s_α и s_β равны, то угол между этими прямыми остается постоянным. Для его нахождения рассмотрим положение, при котором точка C совпадает с точкой P (рис.15).

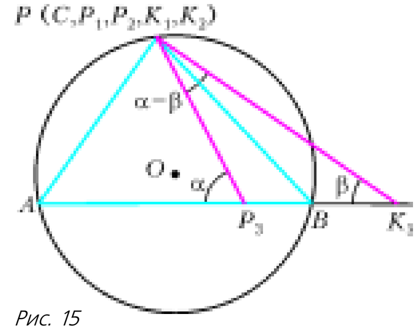

Рис. 15

В этой же точке окажутся также точки P_2 и P_1 – основания α-наклонных, проведенных из точки P на стороны AC, BC треугольника, и точки K_2 и K_1 – основания β-наклонных, проведенных из точки P на эти же стороны. Прямые s_α (PP_3) и s_β (PK_3) пересекаются в точке P. Из треугольника PK_3P_3 видно, что угол P_3PK_3 между прямыми s_α и s_β равен $\alpha - \beta$.

Задача 8. *Пусть точки P и Q лежат на окружности, описанной вокруг треугольника ABC. Докажите, что при перемещении точки C по данной окружности точка пересечения соответствующих прямых Симсона s_P и s_Q описывает окружность.*

Доказательство. Пусть точки P_3 и Q_3 – проекции точек P и Q на сторону AB соответственно, s_P и s_Q – прямые Симсона, соответствующие точкам P и Q (разумеется, эти прямые проходят через точки P_3 и Q_3 соответственно; рис. 16).

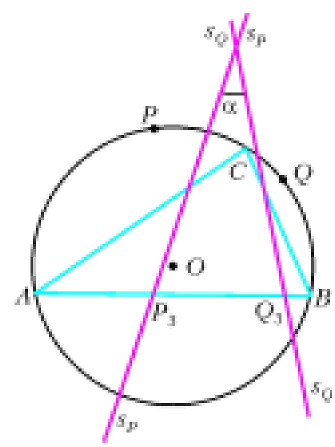

Рис. 16

Пусть, далее, угловая скорость радиуса OC равна $\dot\varphi_{OC}$. Тогда угловые скорости прямых s_P и s_Q равны $\frac{1}{2}\dot\varphi_{OC}$, поэтому угол α между ними не меняется. Поскольку точки P_3 и Q_3 прямых Симсона неподвижны при данном перемещении точки C, а угол α между ними не меняется, то точка пересечения прямых s_P и s_Q будет перемещаться по окружности, проходящей через точки P_3 и Q_3.

Задача 9. *Пусть в условии предыдущей задачи дополнительно сказано, что точки P и Q диаметрально противоположны. Докажите, что отрезок P_3Q_3 – диаметр окружности, по которой перемещается точка пересечения прямых Симсона s_P и s_Q.*

Решите эту задачу самостоятельно.

Задача 10. *Пусть задана конфигурация (P, ABC) и пусть P_1, P_2, P_3 – проекции точки P на прямые BC, AC, AB соответственно. Из точки P проведены также перпендикуляры PK_1, PK_2, PK_3 на касательные к данной окружности, проведенные соответственно через вершины A, B, C данного треугольника (на рисунке 17 эти перпендикуляры и перпендикуля-*

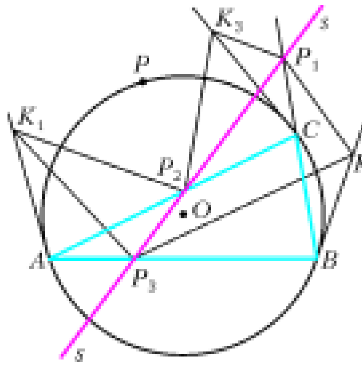

Рис. 17

ры PP_1, PP_2, PP_3 не показаны). Докажите подобие треугольников ABC, $K_1P_3P_2$, $K_2P_1P_3$, $K_3P_2P_1$.

Доказательство. Докажем, к примеру, подобие треугольников ABC и $K_3P_2P_1$ (см. рис.17). Переместим точку B в точку C, обозначив ее новое положение (для удобства) как B_1 (тем самым, точка B_1 и точка C – одна и та же). Тогда треугольник ABC вырождается в «треугольник» AB_1C, у которого две стороны AC и AB_1 совпадают, а «третья сторона» B_1C имеет нулевую длину (рис.18). Кроме того, прямая BC в предельном положении направлена по касательной CC_1.

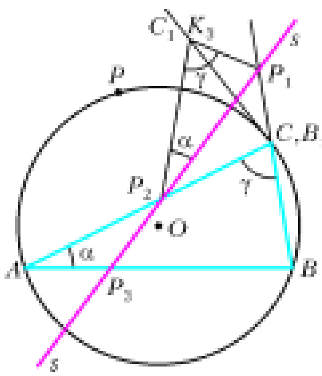

Рис. 18

Отрезок P_2K_3 лежит на прямой Симсона «треугольника» AB_1C. Угол CAB равен углу между касательной CK_3 и прямой BC (и равен α). Поэтому можно считать, что «треугольник» AB_1C получился из треугольника ABC поворотом сторон AB и CB на угол α. Но тогда и угол между прямыми Симсона P_2P_1 и P_2K_3 для треугольника ABC и «треугольника» AB_1C соответственно равен α: $\angle K_3P_2P_1 = \alpha$.

Теперь переместим точку A в точку B. Тогда «треугольник» CAB_1 обратится в «треугольник» CBB_1. При этом стороны CA и B_1A повернутся на угол γ. На этот же угол повернется и прямая Симсона P_2K_3 «треугольника» CAB_1, т.е. $\angle P_1K_3P_2 = \gamma$.

Но тогда треугольники ABC и $P_2P_3P_1$ подобны по двум углам α и γ.

Аналогично доказывается подобие треугольников $K_1P_3P_2$ и $K_2P_1P_3$ треугольнику ABC.

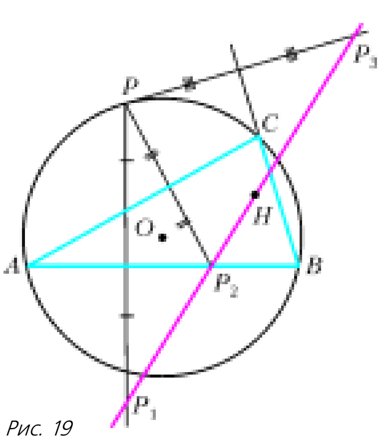

Рис. 19

Для самостоятельного решения мы предлагаем вам такие задачи.

Упражнения

1. Пусть точка P лежит на окружности, описанной вокруг треугольника ABC, и P_1, P_2, P_3 – точки, симметричные точке P относительно сторон AB, AC, BC треугольника ABC соответственно. Докажите, что точки P_1, P_2, P_3 лежат на одной прямой, проходящей через ортоцентр H треугольника ABC (рис.19).

2. У треугольников AB_1C_1 и AB_2C_2, вписанных в данную окружность, стороны B_1C_1 и B_2C_2 параллельны. Для точки P на этой окружности построены прямые Симсона этих треугольников. Докажите, что они параллельны.

3. В данную окружность вписаны два треугольника: A_1BC и A_2BC. На этой же окружности взяты точки P_1 и P_2. При этом дуги A_1P_1 и A_2P_2 равны. Докажите, что прямые Симсона двух конфигураций (P_1, A_1BC) и (P_2, A_2BC) параллельны.

4. Где должна быть расположена точка P, лежащая на окружности, описанной около треугольника ABC, чтобы прямая Симсона конфигурации (P, ABC) содержала сторону AB?

5. Четырехугольник $A_1A_2A_3A_4$ вписан в окружность с центром O и построены четыре прямые Симсона s_1, s_2, s_3, s_4 (прямая s_1 это прямая Симсона для конфигурации (A_1, $A_2A_3A_4$); аналогично задаются прямые s_2, s_3, s_4). Докажите, что угол между двумя любыми прямыми из этих четырех равен углу между радиусами, проведенными в соответствующие вершины, т.е. $\varphi_{s_i,s_j} = \varphi_{OA_j,OA_i}$.

6. Пятиугольная звезда $A_1A_2A_3A_4A_5$ вписана в окружность. Точки P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 – проекции точки P этой окружности на стороны звезды A_3A_4, A_4A_5, A_5A_1, A_1A_2, A_2A_3 соответственно. Найдите углы при вершинах пятиугольника $P_1P_2P_3P_4P_5$.

Любопытно заметить, что авторы наблюдали за поведением прямой Симсона на компьютере с помощью программного пакета Geometer Sketchpad. Мы смогли воочию убедиться в некоторых результатах, полученных на бумаге. Например:

1) когда по окружности движется точка P, то прямая Симсона вращается в сторону, противоположную вращению радиуса OP;

2) в случае, когда вращается весь треугольник, прямая Симсона вращается в ту же сторону, обгоняя его.

Но мы увидели и то, что нам не приходило в голову при «бумажной» работе. Один из таких примеров – при вращении одной из сторон треугольника (и при неподвижных третьей вершине треугольника и точке P) прямая Симсона может выходить за пределы данной окружности и находиться там довольно долго. Поэтому возникла такая задача.

Упражнение 7. а) При каком условии прямая Симсона является касательной к данной окружности? (Авторы знают ответ только в частных случаях.) б) Сколько раз за один поворот стороны прямая Симсона окажется касательной к данной окружности? в) Какое положение по отношению к данной окружности (пересекается, не имеет общих точек) имеет прямая Симсона в промежутке между двумя последовательными моментами касания?

Мы предлагаем вам задуматься и над таким парадоксом. При движении точки P по окружности с центром O и неподвижном треугольнике ABC, вписанном в эту окружность, угловая скорость прямой Симсона вдвое меньше угловой скорости радиуса OP. Если же точка P неподвижна, а вращается вокруг центра O треугольник ABC (с той же угловой скоростью, с которой перед этим вращался радиус OP), то угловая скорость прямой Симсона в полтора раза больше угловой скорости треугольника. Ведь интуитивно кажется, что нет разницы в том, что вращается: радиус или треугольник.