

# Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

Мы продолжаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

Как и прежде, мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон. По традиции, кружки-победители заочного конкурса приглашаются на финальный очный турнир.

11. Сложили  $n$  трехзначных чисел, в записи каждого из которых цифры идут в порядке возрастания слева направо. В результате получили число, в записи которого цифры идут в порядке убывания. При каком наименьшем  $n$  такое возможно?

Д.Калинин

12. Докажите, что:

а) существует сколь угодно много положительных рациональных чисел, являющихся решением уравнения  $\{x\} - \{x^2\} = 0,25$ ;

б) не существует ни одного положительного рационального числа, являющегося решением уравнения  $\{x\} + \{x^2\} = 0,5$ .

Фигурные скобки здесь обозначают дробную часть числа:  $\{t\} = t - [t]$ , где  $[t]$  – наибольшее целое число, не превышающее  $t$ .

В.Кириак (Румыния)

13. Могут ли три прямые разделить угол  $A$  треугольника  $ABC$  на две пары равных углов, а отрезок

$BC$  – на две пары равных отрезков так, как показано на рисунке (равные углы и соответствующие равные отрезки изображены одним цветом)?

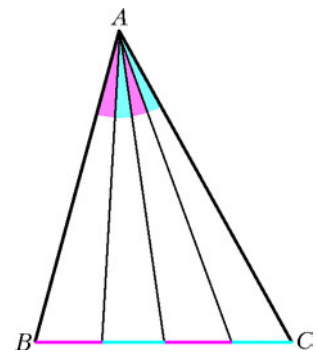
С.Дворянинов

14. Пусть  $n$  и  $k$  – некоторые нечетные натуральные числа. Докажите, что сумма  $k$ -х степеней любых  $n$  последовательных целых чисел делится на  $n$ .

В.Сендеров

15. Для каких натуральных  $n$  в клетках квадратной таблицы  $n \times n$  можно расставить числа от 1 до  $n^2$  так, чтобы суммы чисел во всех вертикалях, всех горизонталях и обеих диагоналях были нечетными?

В. Берник, И.Акулич



## ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

# Интерференция света

В.МОЖАЕВ

В ТОМ СЛУЧАЕ, КОГДА ПРИ НАЛОЖЕНИИ СВЕТОВЫХ волн происходит не суммирование их интенсивностей, а пространственное перераспределение энергии светового излучения, говорят об интерференции волн. Однако наши повседневные наблюдения показывают, что освещенность, создаваемая двумя или несколькими световыми пучками, является простым сложением освещенностей, создаваемых отдельными пучками. Возникает вопрос: почему же мы не

наблюдаем в этих случаях интерференции световых волн? Попробуем на него ответить.

Условием интерференции волн с одинаковыми частотами является их *когерентность*. Это очень важное понятие, поэтому остановимся на нем более подробно.

Уравнение плоской электромагнитной волны с длиной волны  $\lambda$ , распространяющейся вдоль оси  $X$ , имеет вид

$$E(x, t) = E_0 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x + \varphi_0\right),$$

где  $E$  – напряженность электрического поля волны,  $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$  – частота,  $c$  – скорость света в вакууме,  $\varphi_0$  – начальная фаза.

Выражение в скобках (аргумент косинуса) называется фазой волны  $\varphi$ . Если эта же волна распространяется в среде с показателем преломления  $n$ , то зависимость  $E(x, t)$  будет такой:

$$E(x, t) = E_0 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} nx + \varphi_0\right).$$

В среде с  $n$  раз уменьшается длина волны, но обычно ее

сохраняют, а путь, пройденный волной, умножают на  $n$  и называют это произведение оптическим путем. Это удобно – не надо думать об изменении длины волны.

Пусть теперь две такие волны приходят в одну точку (например, на экране):

$$E_1 = E_{01} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} l_1 + \varphi_{01}\right),$$

$$E_2 = E_{02} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} l_2 + \varphi_{02}\right),$$

где  $l_1$  и  $l_2$  – оптические пути, пройденные волнами до встречи. Разность фаз между этими волнами в данной точке равна

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda}(l_2 - l_1) + \varphi_{01} - \varphi_{02}.$$

Как видно, разность фаз  $\Delta\varphi$  не зависит от времени. Такие колебания, сдвиг фаз между которыми остается постоянным по крайней мере за время наблюдения, и называют когерентными.

Рассмотренные нами две монохроматические волны с одинаковыми длинами волн всегда когерентны, но дело в том, что монохроматических волн (со строго определенной длиной волны) в природе не существует – это чисто математическое понятие. Реальные волны всегда имеют разброс длин волн в некотором интервале  $\Delta\lambda$  около средней длины волны  $\lambda_{\text{ср}}$ . Когда  $\Delta\lambda \ll \lambda_{\text{ср}}$ , говорят о *квазимонохроматических* (почти монохроматических) волнах. И это принципиально – они всегда «квази-», но никогда не монохроматические.

Квазимонохроматическую волну можно рассматривать как кусок, или цуг, монохроматической волны, такой цуг всегда имеет начало и конец. Поэтому у волн от двух реальных источников даже с одинаковыми средними длинами волн начальные фазы  $\varphi_{01}$  и  $\varphi_{02}$  хаотически изменяются со временем, а не остаются постоянными, как в случае монохроматической волны. Следовательно, и разность фаз  $\Delta\varphi$  между волнами за время наблюдения не остается постоянной, а хаотически изменяется во времени. Такие волны не когерентны, и они не интерферируют.

По этой причине независимых когерентных источников не существует, а для наблюдения интерференции обычно используют оптические интерференционные схемы, в которых из одного реального источника получают два когерентных источника. Ниже мы рассмотрим такие оптические схемы.

Любой интерференционный опыт всегда можно представить в виде эквивалентной оптической схемы, состоящей из двух когерентных источников и экрана, на котором наблюдается интерференционная картина. Эти два когерентных источника могут быть или оба мнимые, или один действительный, а другой мнимый, или оба действительные.

**Задача 1.** Два точечных когерентных квазимонохроматических источника света, расстояние между которыми  $d$ , находятся на расстоянии  $L$  от экрана ( $L \gg d$ ). Определите ширину интерференционных полос в наблюдаемой интерференционной картине, если длина волны света равна  $\lambda$ .

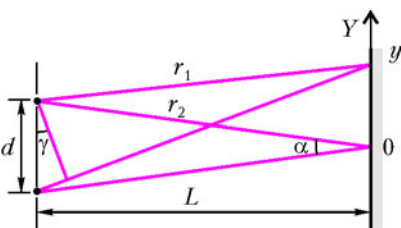


Рис. 1

Найдем распределение интенсивности (освещенности) света на экране вдоль оси  $OY$  (рис.1). Рассмотрим произвольную точку с координатой

$y$ . Пусть силы света наших источников равны, а разность оптических путей мала:  $r_2 - r_1 \ll r_1$ . В этом случае можно считать, что амплитуды сферических волн в точке с координатой  $y$  одинаковы – обозначим эту амплитуду через  $E_0$ . Тогда напряженность электрического поля в нашей точке от верхнего источника можно записать в виде

$$E(r_1, t) = E_0 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r_1\right),$$

где  $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$ , а начальную фазу положим равной нулю. Аналогичное выражение получаем для поля от нижнего источника:

$$E(r_2, t) = E_0 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r_2\right).$$

Практически все приемники света (фотоэлементы, наш глаз) реагируют на освещенность  $I$  света, т.е. на квадрат амплитуды электрического поля:  $I \sim E_0^2$ . Найдем освещенность света в нашей точке:

$$\begin{aligned} I(y, t) &= \left( E_0 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r_1\right) + E_0 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r_2\right) \right)^2 = \\ &= E_0^2 \cos^2\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r_1\right) + E_0^2 \cos^2\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r_2\right) + \\ &+ 2E_0^2 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r_1\right) \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r_2\right) = \\ &= E_0^2 \cos^2\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r_1\right) + E_0^2 \cos^2\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r_2\right) + \\ &+ E_0^2 \cos\left(2\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 + r_2)\right) + E_0^2 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)\right). \end{aligned}$$

Обычные приемники света не реагируют на частоту света ( $\sim 10^{15}$  Гц), а воспринимают усредненную по времени интенсивность света. Среднее значение функции  $f(t)$  за интервал времени  $T$  равно

$$\overline{f(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt.$$

Поэтому усредненная за период освещенность будет равна

$$I(y) = E_0^2 + E_0^2 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)\right).$$

Оптическая разность хода составляет (см. рис.1)

$$r_2 - r_1 \approx d\gamma \approx d \frac{y}{L} \approx y\alpha.$$

Угол  $\alpha$  обычно называют углом сходимости интерферирующих лучей. Окончательное распределение интенсивности света запишем в виде

$$I(y) = E_0^2 \left( 1 + \cos\left(\frac{2\pi\alpha y}{\lambda}\right) \right).$$

Эта зависимость  $I(y)$  изображена на рисунке 2.

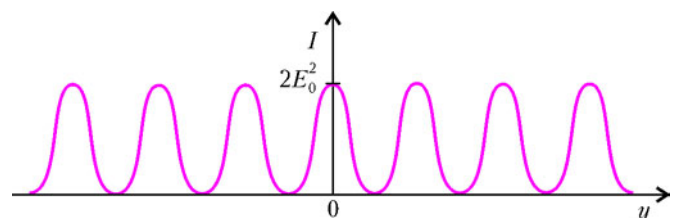


Рис. 2

Шириной интерференционных полос называют расстояние между двумя соседними максимумами (или минимумами). Максимальная интенсивность света будет наблюдаться при условии, что

$$\frac{2\pi\alpha y_m}{\lambda} = 2\pi m, \quad \text{где } m = 0, 1, 2, \dots$$

Тогда ширина полос будет равна

$$\delta = y_{m+1} - y_m = \frac{\lambda}{\alpha} = \frac{\lambda L}{d}.$$

Как видно, ширина интерференционных полос прямо пропорциональна длине волны и обратно пропорциональна углу сходимости интерферирующих лучей.

Перейдем к разбору конкретных интерференционных схем.

**Задача 2.** *Параллельный пучок света, полученный с помощью точечного источника света S, расположенного в фокусе собирающей линзы, падает на бипризму с преломляющим углом  $\beta = 1^\circ$  (рис.3). На каком расстоянии L нужно*

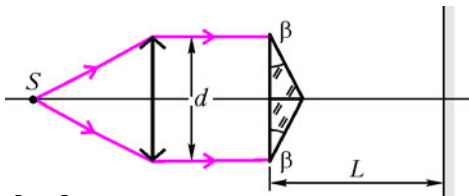


Рис. 3

расположить экран, чтобы на нем можно было наблюдать максимальное число интерференционных полос? Чему равно это количество полос? Длина волны света  $\lambda = 0,65 \text{ мкм}$ , показатель преломления материала призмы  $n = 1,5$ , а поперечный размер пучка  $d = 1 \text{ см}$ .

После прохождения призмы световой пучок разобьется на два параллельных пучка, распространяющихся под углами  $\gamma$  к горизонтальной оси (рис.4). При малом угле  $\beta$

$$\gamma = (n - 1)\beta.$$

На рисунке 4 хорошо видна область пересечения этих

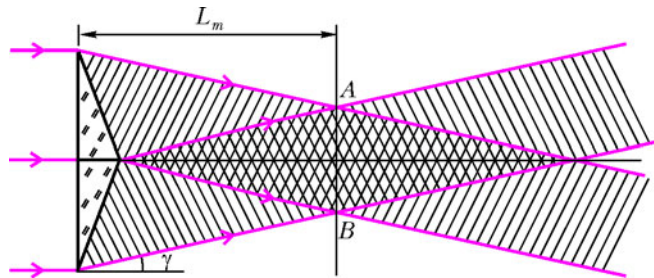


Рис. 4

пучков. Именно в этой области и можно наблюдать интерференционную картину.

Найдем ширину интерференционных полос. Из рисунка 4 угол сходимости пучков в данной интерференционной схеме равен

$$\alpha = 2\gamma = 2(n - 1)\beta.$$

Воспользовавшись выражением для ширины полос, полученным в задаче 1, можно записать

$$\delta = \frac{\lambda}{\alpha} = \frac{\lambda}{2(n - 1)\beta}.$$

Как видно, ширина полос не зависит от положения экрана, на котором наблюдается интерференционная картина. Поэтому максимальное число интерференционных полос будет

в месте максимального перекрытия пучков, т.е. в области AB. Из простых геометрических соображений найдем соответствующее расстояние L от призмы до экрана:

$$L = \frac{d/4}{\text{tg } \gamma} \approx \frac{d}{4\gamma} = \frac{d}{4(n - 1)\beta} = 28,7 \text{ см}.$$

Размер интерференционной картины на экране, установленном на расстоянии L, при условии тонкой призмы равен  $d/2$ . Поэтому максимальное число полос равно

$$m_{\text{max}} = \frac{d/2}{\delta} = \frac{d(n - 1)\beta}{\lambda} = 134.$$

Разобранный в данной задаче интерференционный опыт является примером того, когда эквивалентная интерференционная схема состоит из двух когерентных источников, которые являются мнимыми изображениями нашего реального источника S. Эти два мнимых источника находятся в бесконечности, но угол сходимости (в данном случае это угловой размер между источниками) конечен и равен  $2\gamma$ .

А теперь рассмотрим пример оптического опыта, в котором эквивалентная интерференционная схема включает в себя два когерентных источника, один из которых действительный, а другой мнимый.

**Задача 3.** *В интерференционном опыте, изображенном на рисунке 5, используется квазимонохроматический точечный источник света S. Найдите ширину интерференционных полос на экране Э, а также максимальный и минимальный*

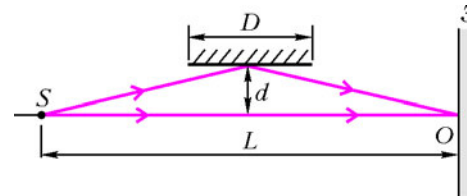


Рис. 5

порядки наблюдаемых полос. Параметры установки:  $L = 1 \text{ м}$ ,  $D = 10 \text{ см}$ ,  $d = 0,5 \text{ см}$ , отражающее зеркало расположено посередине между источником и экраном, длина волны света  $\lambda = 5 \cdot 10^{-5} \text{ см}$ .

Указание: при малых  $x$  ( $x \ll 1$ ) можно считать, что  $(1 + x)^N \approx 1 + Nx$ .

Для данного опыта эквивалентная интерференционная схема изображена на рисунке 6. Двумя когерентными источниками являются наш действительный источник света S и его мнимое изображение S' в плоском зеркале. Область взаим-

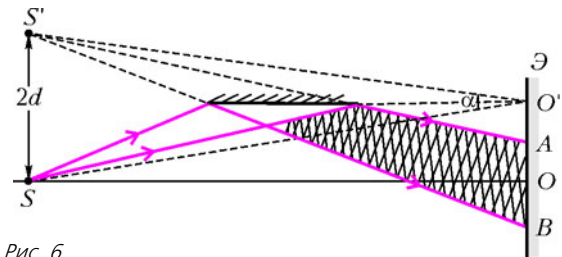


Рис. 6

ного пересечения сферических волн от этих источников заштрихована. Поскольку расстояние от зеркала до оси SO мало ( $d \ll L$ ), можно считать, что угол сходимости интерферирующих лучей равен

$$\alpha = \frac{2d}{L},$$

а ширина интерференционных полос равна

$$\delta = \frac{\lambda}{\alpha} = \frac{\lambda L}{2d} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ см}.$$

Как видно из рисунка 6, точка  $O'$  соответствует нулевому порядку интерференции (разность хода приходящих в эту точку волны равна нулю), но в нашей схеме в этом месте экрана интерференционной картины нет, она начинается ниже – в точке  $A$ , а заканчивается в точке  $B$ . Очевидно, что в точке  $A$  мы будем иметь минимальный порядок интерференции, а в точке  $B$  – максимальный. Найдем эти порядки.

Оптический путь  $S'A$  равен приблизительно

$$S'A \approx L \left( 1 + \frac{2d^2}{(L+D)^2} \right),$$

а оптический путь  $SA$  составляет

$$SA \approx L \left( 1 + \frac{2d^2 D^2}{(L+D)^2 L^2} \right).$$

Получить эти выражения из простых геометрических соотношений мы предоставляем читателю.

Интерференционный порядок для точки  $A$  находится из условия

$$S'A - SA = m_A \lambda.$$

Отсюда

$$m_A \approx \frac{2d^2(L-D)}{\lambda L(L+D)} \approx 80.$$

Аналогично, для точки  $B$  оптический путь  $S'B$  равен приблизительно

$$S'B \approx L \left( 1 + \frac{2d^2}{(L-D)^2} \right),$$

а оптический путь  $SB$  составляет

$$SB \approx L \left( 1 + \frac{2d^2 D^2}{(L-D)^2 L^2} \right).$$

Тогда интерференционный порядок для точки  $B$  будет

$$m_B \approx \frac{2d^2(L+D)}{\lambda L(L-D)} \approx 122.$$

**Задача 4.** На плоскопараллельную прозрачную пластинку толщиной  $d$  с показателем преломления материала  $n$  под углом  $\alpha$  падает параллельный пучок квазимонохроматического света с длиной волны  $\lambda$  (рис.7). Определите оптическую разность хода  $\Delta$  между двумя когерентными волнами, отраженными от верхней и нижней поверхностей пластинки.

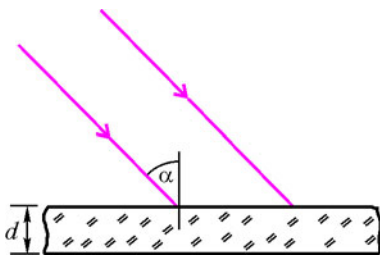


Рис. 7

Когда мы говорим о параллельном пучке света, то подразумеваем плоскую электромагнитную волну, у которой поверхность постоянной фазы, т.е. волновой фронт, это плоскость, перпендикулярная направлению распространения светового пучка. Волновой фронт в падающей волне на рисунке 8 обозначен прямой  $AB$ , которая принадлежит этому фронту. Часть пучка (волны) отражается от передней поверхности пластинки – волновой фронт этой волны  $A'B'$ . Другая часть пучка преломляется и распространяется в пластинке, а затем частично отражается от ее задней поверхности. Эта отраженная волна возвращается к передней поверхности пластинки, преломляется и выходит в том же направлении, что и волна, отраженная от передней поверхности. Волновой фронт вол-

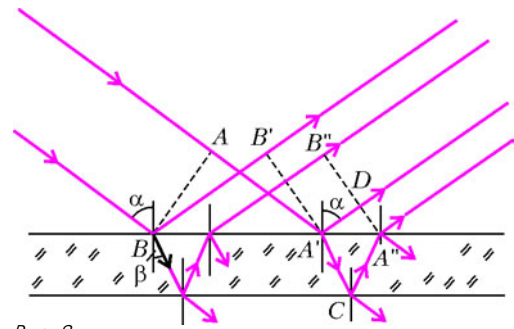


Рис. 8

ны, отраженной от задней поверхности пластинки, обозначим  $A''B''$ . В точке  $A'$  обе отраженные волны находятся в фазе, в этой точке падающая волна раздваивается на две волны. Если мы расположим экран вдоль прямой  $A''B''$ , то волна, отраженная от передней поверхности, пройдет до экрана оптический путь  $A'D$ , а отраженная от задней поверхности – оптический путь  $A'CA''$ . Вычислим эти пути.

Из треугольника  $A'CA''$  найдем

$$A'C = CA'' = \frac{d}{\cos \beta}, \quad A'A'' = 2d \operatorname{tg} \beta,$$

откуда получим оптический путь  $A'CA''$ :

$$A'CA'' = \frac{2dn}{\cos \beta}.$$

Теперь из треугольника  $A'DA''$  найдем оптический путь  $A'D$ :

$$A'D = A'A'' \sin \alpha = 2d \operatorname{tg} \beta \sin \alpha.$$

Используя соотношение между углами падения и преломления:

$$\sin \alpha = n \sin \beta,$$

можно записать

$$A'CA'' = \frac{2dn^2}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}, \quad \text{и} \quad A'D = \frac{2d \sin^2 \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}.$$

Таким образом, разность хода между двумя последовательными волнами, отраженными от передней и задней поверхностей пластинки, равна

$$A'CA'' - A'D = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}.$$

К полученной разности хода необходимо добавить поправку, которая вызвана различием в условиях отражения электромагнитной волны на границах воздух – вещество (верхняя поверхность пластинки) и вещество – воздух (нижняя граница). Не вдаваясь в подробности, укажем, что эта дополнительная разность хода равна  $\lambda/2$ . Поэтому окончательно

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} + \frac{\lambda}{2}.$$

**Задача 5.** В интерференционной схеме параллельный пучок квазимонохроматического света с длиной волны  $\lambda = 5000 \text{ \AA}$  падает под углом  $\alpha = 60^\circ$  на систему из двух плоскопараллельных полупрозрачных зеркал 1 и 2 (рис.9). Часть светового пучка отражается от зеркала 1, оставшаяся часть, пройдя зеркало 1, частично отражается от зеркала 2 и, снова пройдя зеркало 1, вместе с пучком, отраженным от зеркала 1, с помощью собирающей линзы  $L$  фокусируется на приемник  $\Pi$ , сигнал которого пропорционален интенсивности падающего на него света. Какова будет частота переменного сигнала, регистрируемого

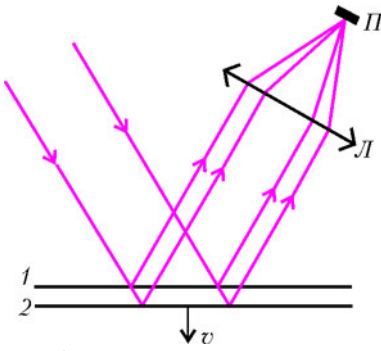


Рис. 9

хода  $\Delta$  между пучками света, отраженными от зеркал, составляет

$$\Delta = 2x\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = 2x \cos \alpha.$$

В данном случае поправки на  $\lambda/2$  нет, поскольку отражения от обоих зеркал одинаковые.

Сделаем небольшое пояснение по поводу действия линзы. В фокальной плоскости линзы от каждого параллельного пучка получается световое пятнышко, появление которого обусловлено дифракцией световых пучков на линзе. Размер этого пятна пропорционален длине волны света  $\lambda$  и обратно пропорционален поперечному размеру пучка. Но самое главное свойство линзы состоит в том, что она сохраняет разность хода между нашими двумя пучками света, которые собираются в ее фокальной плоскости.

Пусть в некоторый момент времени расстояние между зеркалами равно  $x_1$ , при этом разность хода  $\Delta(x_1)$  кратна целому числу длин волн, например с коэффициентом  $m$ :

$$2x_1 \cos \alpha = m\lambda.$$

В этом случае на приемнике будет максимальная освещенность света. Если через минимальное время  $T$  освещенность света на приемнике снова будет максимальной, то можно записать

$$2(x_1 + vT) \cos \alpha = (m + 1)\lambda.$$

Вычитая из последнего равенства предпоследнее, получим

$$2vT \cos \alpha = \lambda.$$

Отсюда найдем частоту переменного сигнала, регистрируемого приемником:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{2v \cos \alpha}{\lambda} = 200 \text{ Гц}.$$

В разобранном опыте мы не наблюдаем интерференционную картину как таковую: поверхность приемника имеет равномерную освещенность, которая зависит от расстояния между зеркалами. Это связано с тем, что у нас задан пучок света только с одним фиксированным углом падения. При наличии световых пучков с другими углами падения в фокальной плоскости линзы наблюдалась бы типичная интерференционная картина в виде полос. Такие интерференционные полосы называют полосами равного наклона. При изменении расстояния между зеркалами будет происходить смещение всей интерференционной картины вдоль экрана.

**Задача 6.** Интерференционные полосы, возникающие на поверхности тонкого стеклянного клина с показателем преломления  $n = 1,5$  при освещении рассеянным квази-монохроматическим светом с длиной волны  $\lambda = 5000 \text{ \AA}$ , проецируются собирающей линзой на экран (рис.10). Главная оптическая ось линзы перпендикулярна поверх-

ности клина, расстояние от линзы до клина  $a = 10 \text{ см}$ , а от линзы до экрана  $b = 100 \text{ см}$ . Ширина интерференционных полос, наблюдаемых на экране,  $\delta = 2 \text{ мм}$ . Определите угол клина  $\varphi$ .

Воспользуемся результатом, полученным при решении предыдущей задачи. Пусть в некоторый произвольный момент времени расстояние между зеркалами равно  $x$ , тогда разность

ности клина, расстояние от линзы до клина  $a = 10 \text{ см}$ , а от линзы до экрана  $b = 100 \text{ см}$ . Ширина интерференционных полос, наблюдаемых на экране,  $\delta = 2 \text{ мм}$ . Определите угол клина  $\varphi$ .

На поверхность клина падает рассеянный свет, т.е. угол падения изменяется в интервале  $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ , но в интерференции будут участвовать только те лучи света, угол падения которых находится в пределах  $0 \leq \alpha \leq \varphi$ .

Если мы посмотрим на выражение для разности хода  $\Delta$ , полученное в задаче 4, то увидим, что разность хода зависит как от толщины слоя  $d$ , так и от угла падения  $\alpha$ . Данная интерференционная схема основана на зависимости  $\Delta$  от  $d$ , а неизбежное наличие разброса угла падения приводит к размытию интерференционных полос. Поэтому в нашей схеме для наблюдения четкой интерференционной картины желательно задиафрагмировать линзу и уменьшить разброс угла падения до разумного предела. Мы будем предполагать, что это условие выполнено и угол падения  $\alpha \approx 0$ .

Найдем сначала ширину интерференционных полос на поверхности клина. Пусть толщина клина  $d_1$  соответствует светлой полосе  $m$ -го порядка, тогда

$$2d_1 n + \frac{\lambda}{2} = m\lambda,$$

где  $m$  – целое число. А светлой полосе  $(m + 1)$ -го порядка пусть соответствует толщина клина  $d_2$ :

$$2d_2 n + \frac{\lambda}{2} = (m + 1)\lambda.$$

Вычитая почленно одно равенство из другого, получим

$$2(d_2 - d_1)n = \lambda.$$

Теперь из треугольника  $ABC$  (рис.11) найдем ширину полос  $\delta_{\text{кл}}$  на поверхности клина:

$$\delta_{\text{кл}} = \frac{d_2 - d_1}{\sin \varphi} \approx \frac{d_2 - d_1}{\varphi}.$$

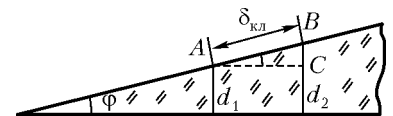


Рис. 11

Но ширина полос на экране  $\delta$  связана с шириной полос на клине  $\delta_{\text{кл}}$  через увеличение линзы простым соотношением:

$$\delta = \frac{b}{a} \delta_{\text{кл}}.$$

Тогда

$$\frac{a}{b} \delta = \delta_{\text{кл}} \approx \frac{d_2 - d_1}{\varphi} \approx \frac{\lambda}{2n\varphi}.$$

Отсюда находим искомый угол клина:

$$\varphi \approx \frac{b\lambda}{2an\delta} = 0,83 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

**Задача 7.** Свет с длиной волны  $\lambda$  от двух точечных некогерентных квази-монохроматических источников  $S_1$  и  $S_2$  падает на непрозрачный экран  $\mathcal{E}_1$  с двумя отверстиями, расстояние между которыми  $d$  (рис.12). Интерференция света, прошедшего через отверстия, наблюдается на экране  $\mathcal{E}_2$  вблизи точки  $O$ , лежащей на оси системы.

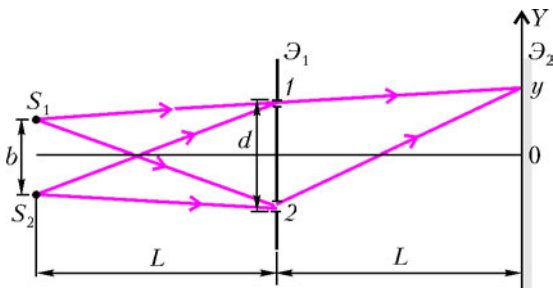


Рис. 12

Источники и точка наблюдения находятся на одном и том же расстоянии  $L$  от экрана  $\mathcal{E}_1$ . При симметричном удалении источников от оси интерференционная картина периодически возникает и исчезает. Определите расстояния  $b_N$ , при которых интерференционная картина исчезает (экран  $\mathcal{E}_2$  равномерно освещен).

Найдем распределение интенсивности света на экране  $\mathcal{E}_2$  в зависимости от расстояния  $b$  между источниками. Запишем интенсивность света от каждого источника в точке с координатой  $y$ . Рассмотрим источник  $S_1$ . Оптическая разность хода между лучами  $S_1 2y$  и  $S_1 1y$  равна

$$\Delta_1 = \frac{db}{2L} + \frac{dy}{L}.$$

Воспользовавшись решением задачи 1, найдем освещенность на экране  $\mathcal{E}_2$  в точке с координатой  $y$ :

$$I_1(b, y) = E_0^2 \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} \left( \frac{db}{2L} + \frac{dy}{L} \right) \right) \right),$$

где  $E_0$  – амплитуды интерферирующих волн. Аналогично, для источника  $S_2$  оптическая разность хода между лучами  $S_2 2y$  и  $S_2 1y$  равна

$$\Delta_2 = \frac{dy}{L} - \frac{db}{2L},$$

и интенсивность света от источника  $S_2$  составляет

$$I_2(b, y) = E_0^2 \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} \left( \frac{dy}{L} - \frac{db}{2L} \right) \right) \right).$$

Поскольку источники  $S_1$  и  $S_2$  некогерентны, результирующая интенсивность будет равна сумме интенсивностей от каждого источника:

$$\begin{aligned} I(b, y) &= I_1(b, y) + I_2(b, y) = \\ &= 2E_0^2 + E_0^2 \left( \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} \left( \frac{dy}{L} + \frac{db}{2L} \right) \right) + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} \left( \frac{dy}{L} - \frac{db}{2L} \right) \right) \right) = \\ &= 2E_0^2 \left( 1 + \cos \frac{\pi db}{\lambda L} \cos \frac{2\pi dy}{\lambda L} \right). \end{aligned}$$

Как видно из полученного выражения, амплитуда  $A$  переменной составляющей в распределении освещенности на экране  $\mathcal{E}_2$  зависит от расстояния  $b$  между источниками по закону

$$A(b) = \cos \frac{\pi db}{\lambda L}.$$

Интерференционная картина исчезает, когда амплитуда  $A(b)$  становится равной нулю:

$$\cos \frac{\pi db}{\lambda L} = 0.$$

Соответствующие расстояния  $b_N$  между источниками определяются из соотношения

$$\frac{\pi db_N}{\lambda L} = \frac{\pi}{2} + \pi N, \quad \text{где } N = 0, 1, 2, \dots,$$

откуда

$$b_N = \frac{(2N + 1)\lambda L}{2d}.$$

**Упражнения**

1. Точечный квазимонохроматический источник света  $S$  с длиной волны  $\lambda = 5000 \text{ \AA}$  расположен на расстоянии  $a = 60 \text{ см}$  от линзы с фокусным расстоянием  $F = 20 \text{ см}$ . Линза разрезана по диаметру, и ее половинки раздвинуты на расстояние  $l = 2 \text{ мм}$  (рис. 13). Чему будет равна ширина интерференционных

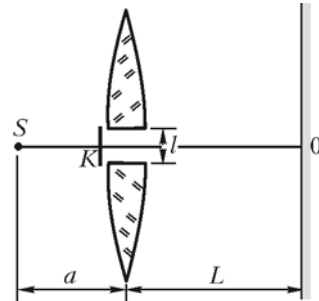


Рис. 13

полос, наблюдаемых на экране, установленном на расстоянии  $L = 3,3 \text{ м}$  от линзы? Зазор между половинками линзы перекрыт экраном  $K$ .

2. Выразите расстояние  $x$  от центра интерференционной картины до  $m$ -й светлой полосы в опыте с бипризмой (рис. 14). Показатель преломления материала призмы  $n$ , преломляющий

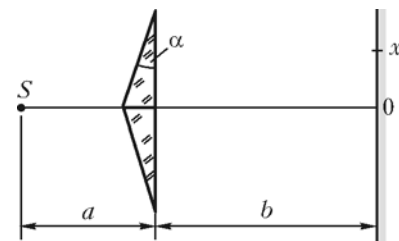


Рис. 14

угол  $\alpha$ , длина волны света  $\lambda$ . Расстояние от точечного источника  $S$  до призмы  $a$ , от призмы до экрана  $b$ . Преломляющий угол  $\alpha$  мал.

3. С помощью зрительной трубы, установленной на бесконечность, наблюдают интерференционные полосы равного наклона в тонкой плоскопараллельной стеклянной пластинке толщиной  $h = 0,2 \text{ мм}$  с показателем преломления  $n = 1,41$  при угле наблюдения  $\alpha = 60^\circ$  (рис. 15). Найдите порядок  $m$  центральной

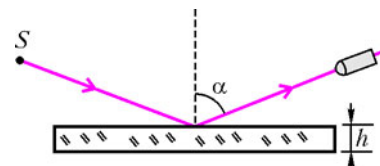


Рис. 15

интерференционной полосы (по центру фокальной плоскости окуляра). Длина волны света  $\lambda = 560 \text{ нм}$ .