координатами, лежащих внутри некоторой полосы между параллельными прямыми.

И.Пушкарев

Ф2078. Из листа фанеры вырезали кусок в форме прямоугольного треугольника с катетами 60 см и 80 см, масса этого куска равна 2 кг. Кусок фанеры подвесили к потолку при помощи двух одинаковых легких нитей, расстояние между точками прикрепления нитей к потолку равно 100 см (рис.1). Найдите силы натяжения нитей.

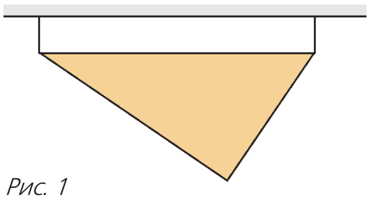


Рис. 1

А.Простов

Ф2079. Клин массой M с углом α при основании находится на гладком горизонтальном столе. На наклонной грани клина стоит тележка массой m, к ней привязана легкая нить, переброшенная через блок, закрепленный осью в вершине клина (рис.2). Свободный конец нити привязан к стене. Вначале клин удерживают, затем отпускают. С каким ускорением он начнет двигаться?

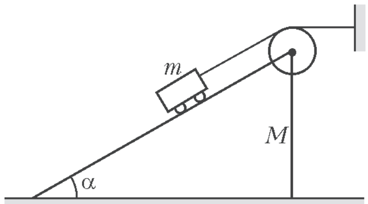


Рис. 2

Р.Клинов

Ф2080. Две большие параллельные пластины двигают навстречу друг другу с одинаковыми скоростями v_0. Между пластинами находится очень маленький упругий шарик. В тот момент когда одна из пластин ударяется о него, расстояние между пластинами составляет L. Считая удары абсолютно упругими, найдите скорость шарика в тот момент, когда расстояние между пластинами составит $L/5$. Действием силы тяжести пренебречь. Скорость шарика перед первым ударом равна нулю.

А.Шариков

Ф2081. В комнате, заполненной воздухом, находится пустой кубический сосуд объемом 100 л. В стенке сосуда открывается маленькое отверстие площадью 1 см^2 и через 0,001 с закрывается. Оцените количество молекул, попавших в сосуд за это время. Оцените также давление, которое установится в сосуде. Стенки сосуда тепло не проводят, теплоемкостью стенок можно пренебречь.

А.Повторов

Ф2082. Моль гелия в сосуде расширяется от начального объема $V_1 = 10$ л до конечного объема $V_2 = 50$ л, при этом давление газа в процессе меняется так, что $pV^2 =$ const. Начальная температура газа $T_1 = 300$ К. Найдите конечную температуру. Найдите также работу газа в процессе (если не получится найти точно, посчитайте приближенно) и полученное в процессе количество теплоты.

Р.Газов

Ф2083. К батарейке подключают амперметр (вообще говоря, так поступать не следует!) – он показывает силу тока 1 А. Параллельно подключают еще один такой же амперметр – теперь они в сумме показывают 1,2 А. Сколько в сумме покажут 2008 таких же амперметров, если их подключить к батарейке параллельно?

Т.Оков

Ф2084. Одна из квадратных пластин плоского конденсатора закреплена, а вторая может свободно смещаться параллельно, оставаясь на расстоянии d от первой. Масса подвижной пластины M, площадь каждой из пластин S. Конденсатор зарядили до напряжения U_0. Сдвинем теперь подвижную пластину относительно положения равновесия. Найдите период малых колебаний этой пластины. Зависит ли он от того, как мы сдвинули пластину? Сила тяжести отсутствует.

З.Рафаилов

Ф2085. Катушка индуктивностью L и резистор сопротивлением R соединены параллельно, к выводам цепочки очень давно подключен внешний источник, ток в его цепи равен I_0. Ток в цепи источника очень быстро увеличивают в 3 раза. Какое количество теплоты выделится в резисторе после этого? Какой полный заряд протечет через резистор?

А.Зильберман

Ф2086. Две одинаковые катушки индуктивности соединены последовательно. Выводы получившейся цепочки подключены к звуковому генератору последовательно с низковольтной лампочкой для фонарика. Параллельно одной из катушек подключают конденсатор и начинают изменять в широких пределах частоту генератора. На частоте $f = 600$ Гц наблюдается четкий минимум свечения нити накала лампочки. На какой частоте (частотах) лампочка будет гореть ярче всего?

Р.Старов

Ф2087. Небольшая плосковыпуклая линза отштампована из прозрачной пластмассы. Форма выпуклой поверхности аккуратно рассчитана при помощи ЭВМ, она отличается от сферической (сферическая поверхность «собирает» лучи параллельного пучка в фокусе только приблизительно). Диаметр плоской поверхности линзы 2 см, толщина линзы 0,5 см. Найдите фокусное расстояние линзы. Коэффициент преломления пластмассы 1,5.

З.Очков

Решения задач М2051–М2055, Ф2063–Ф2072

М2051. *Пусть $a, b, c > 0$; $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) = abc$. Докажите, что $a = b = c$.*

Положим $x = a + b - c$, $y = b + c - a$, $z = c + a - b$. Так как $x + y = 2b > 0$, $y + z = 2c > 0$, $z + x = 2a > 0$, то среди чисел x, y, z нет двух отрицательных. Кроме того, по условию $xyz = abc > 0$, значит, все три числа x, y, z положительны. Имеем:

$$xyz = \frac{z+x}{2}\,\frac{x+y}{2}\,\frac{y+z}{2} \ge \sqrt{zx}\sqrt{xy}\sqrt{yz} = xyz .$$

Знак «$\geq$» превращается в равенство только при $x = y = z$. Отсюда $a - b = \frac{z-y}{2} = 0$ и $a - c = \frac{x-y}{2} = 0$, т.е. $a = b = c$.

П.Кожевников

М2052. *а) Рассмотрим окружность и ее хорду AB. Найдите множество точек M, находящихся от прямой AB на расстоянии, равном длине касательной, проведенной из точки M к рассматриваемой окружности.*

Докажите следующие утверждения

б) Для любых двух парабол, описанных около одной окружности и пересекающихся в четырех точках, диагонали «параболического четырехугольника» перпендикулярны (рис.1).

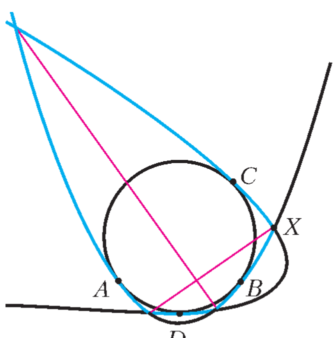


Рис. 1

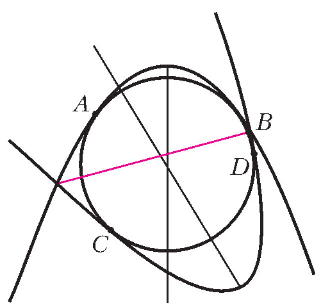


Рис. 2

в) Для любых двух парабол, описанных около одной окружности и пересекающихся в двух точках, оси парабол наклонены под одним и тем же углом к прямой, проходящей через точки пересечения этих парабол (рис.2).

г) Для любых трех парабол, описанных около одной окружности и таких, что любые две из них пересекаются в четырех точках, диагонали «параболического шестиугольника» пересекаются в одной точке (рис.3).

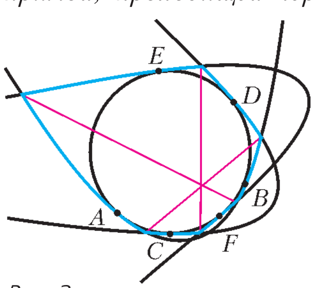


Рис. 3

а) Введем систему координат так, чтобы точки A, B и центр окружности C имели координаты $(-a, 0)$, $(a, 0)$, $(0, c)$. Тогда радиус окружности равен $R = \sqrt{a^2 + c^2}$. Длина касательной из точки $M(x, y)$ к окружности равна $\sqrt{MC^2 - R^2} = \sqrt{x^2 + (y-c)^2 - R^2}$. Таким образом, искомое ГМТ задается уравнением $y^2 = x^2 + (y-c)^2 - R^2 \Leftrightarrow 2cy = x^2 - a^2$. При $c = 0$ (т.е. если AB – диаметр) получаем пару касательных в точках A и B. При $c \neq 0$ получается парабола, касающаяся окружности в точках A и B (это означает, что парабола и окружность имеют общую касательную в точке A и в точке B).

Нетрудно показать, что парабола, касающаяся окружности в данных точках A и B, единственна. С помощью этого соображения и пункта а) решим остальные пункты. Обозначим точки касания парабол с окружностью A и B, C и D, E и F (см. рис.1, 2, 3).

б) Если X – точка пересечения парабол, то длина касательной из X к окружности равна, с одной стороны, расстоянию от X до AB, с другой стороны – расстоянию от X до CD, поэтому X лежит на одной из двух биссектрис углов между прямыми AB и CD. Две точки пересечения парабол лежат на одной биссектрисе и две – на другой. Остается заметить, что эти биссектрисы перпендикулярны.

в) Как и в пункте б), прямая, проходящая через точки пересечения парабол, – биссектриса угла между AB и CD. Нужное утверждение следует из того, что оси парабол перпендикулярны AB и CD соответственно.

г) Диагонали шестиугольника – биссектрисы (внутренние или внешние) треугольника, образованного прямыми AB, CD, EF. При надлежащем выборе (три внутренние биссектрисы или одна внутренняя и две внешние) диагонали будут пересекаться в одной точке.

Ф.Нилов, П.Кожевников

М2053. *Пусть $n > 3$. Докажите, что существуют целые отличные от нуля числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ такие, что*

$$x_1 x_2 \ldots x_n = (x_2 + x_3 + \ldots + x_n)(x_1 + x_3 + \ldots + x_n) \times \ldots \times (x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}).$$

При четном n достаточно взять любой набор ненулевых целых чисел $A_n = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, сумма которых равна 0. Эта конструкция, разумеется, не единственна: например, можно положить $A_4 = (-8, -7, 1, 5)$.

Пусть n нечетно. Если существует набор $A_n = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющий условию, то существует и набор A_{n+4}. В самом деле, сумма $k = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ не равна 0, и набор $A_{n+4} = (5x_1, 5x_2, \ldots, 5x_n, 3k, -3k, 4k, -4k)$ с суммой $5k$ – искомый, поскольку набор $(5x_1, 5x_2, \ldots, 5x_n)$ удовлетворяет условию и $3k \cdot (-3k) \cdot 4k \cdot (-4k) = (5k - 3k)(5k + 3k)(5k - 4k)(5k + 4k)$. Остается указать примеры наборов A_5 и A_7:

$$A_5 = (-2, -2, 2, 3, 3) \text{ или } A_5 = (-6, -1, 1, 4, 4),$$

$$A_7 = (-8, -2, -2, 3, 4, 4, 7) \text{ или } A_7 = (-6, -6, -6, -1, 4, 5, 7).$$

Прийти к наборам A_5 (и сходным образом к наборам A_7) можно с помощью следующих рассуждений. Достаточно найти нужные наборы рациональных чисел (а затем домножить их на общий знаменатель). Пусть a, b, c – ненулевые рациональные числа, $s = a + b + c$, $\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{abc} = \frac{1}{k}$. Достаточно подобрать такое ненулевое рациональное x, что $\frac{1}{k} \cdot \frac{(s-x)(s+x)}{x \cdot (-x)} = 1$. Преобразуем: $s^2 = (1-k)x^2$. Таким образом, достаточно подобрать такие a, b, c, что $1 - k = r^2$ для ненулевого рационального r; например, достаточно взять $k = -3$. Отсюда нетрудно прийти к наборам $(-2, 3, 3, -2, 2)$, $\left(2, 2, -3, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ и т.п.

Авторам неизвестно, справедливо ли утверждение задачи для $n = 3$.

В.Сендеров, С.Токарев

М2054. *Пусть $P(x) = x^2 + x + 1$. Существуют ли натуральные числа $x_1, \ldots, x_n$, $k_1, \ldots, k_n$ такие, что $P(x_1) = x_2^{k_2}$, $P(x_2) = x_3^{k_3}, \ldots, P(x_n) = x_1^{k_1}$?*
Решите задачу для случаев:
а) $n = 2$;
б) n – произвольное нечетное число;
в) $n = 4$.

Ответ: нет во всех пунктах.

Латинскими буквами всюду ниже обозначены натуральные числа.

а) Пусть $x \ge y$,

$$x^2 + x + 1 = y^n, \tag{1}$$

$$y^2 + y + 1 = x^m. \tag{2}$$

Так как $y > 1$ и $y^3 - 1$ делится на $y^2 + y + 1$, то $x^3 \ge y^3 > y^3 - 1 \ge y^2 + y + 1 = x^m$. Следовательно, $3 > m$. Но, поскольку $y^2 < y^2 + y + 1 < (y+1)^2$, имеем $m \ne 2$. Таким образом, $m = 1$. Подставляя x из второго равенства в первое, видим, что y делит 3. Получили $y = 3$, $x = 13$. Но $P(13) = 183$ не является степенью тройки.

Вот еще одно решение. Левая часть каждого из равенств (1) и (2) либо делится на 3, либо имеет вид $3k + 1$. Так как n и m нечетны, то такой же вид имеют и сами числа y и x. При этом если x делится на 3 (соответственно, имеет вид $3k + 1$), то $P(x)$, а значит и y, имеет вид $3k + 1$ (соответственно, делится на 3). Значит, одно из чисел x, y (например, x) делится на 3, другое – не делится. Но $y^2 + y + 1$ ни при каком целом y не делится на 9. Получаем $m = 1$, и, подставив x из второго равенства в первое, видим, что y делит 3. Противоречие.

Это решение можно с помощью малой теоремы Ферма и некоторых ее следствий обобщить на случай многочленов $x^{p-1} + \ldots + x + 1$, где p – произвольное нечетное простое число.

б) Будем рассуждать как при втором решении пункта а). Без ограничения общности считая, что x_1 делится на 3, имеем: x_2 не делится на 3. С другой стороны, $x_3, x_5, \ldots, x_n$, x_2 делятся на 3. Противоречие.

Это решение нетрудно обобщить на случай многочленов $x^{p-1} + \ldots + x + 1$ для произвольного нечетного простого p.

в) **Лемма.** Пусть n – произвольное четное число. Тогда в системе равенств задачи больше половины из показателей степеней $k_1, \ldots, k_n$ равны 1.

Доказательство. Рассуждая аналогично пункту а) и без потери общности считая, что числа $x_2, x_4, \ldots, x_n$ делятся на 3, имеем: $k_1 = k_3 = \ldots = k_{n-1} = 1$. Следовательно, систему можно переписать в виде $P(P(z_1)) = z_2^{r_1}, \ldots, P(P(z_m)) = z_1^{r_m}$ (где $m = \frac{n}{2}$ и $z_1 = x_1$, $z_2 = x_3, \ldots$). Пусть для определенности $z_2 = \max\{z_1, \ldots, z_m\}$. Докажем, что $r_1 = 1$.

Предположим противное. Имеем $r_1 \ne 3$. Действительно, $z_1 = 3k + 1$, $P(z_1) = 9k' + 3$, $P(P(z_1)) = 9k'' + 4$. Но число t^3 несравнимо с 4 по модулю 9 ни при каком целом t. Следовательно, $r_1 \ne 3$. Поскольку $y^2 < y^2 + y + 1 < (y+1)^2$, четным r_1 быть не может. Значит, $r_1 \ge 5$.

Из уравнений системы следует, что $z_1, z_2 \ldots > 1$. Отсюда $2z_1^2 > P(z_1)$; поскольку функция $P(t)$ на положительной полуоси возрастает, имеем $2(2z_1^2)^2 > P(2z_1^2) \ge P(P(z_1)) = z_2^{r_1} \ge z_2^5$. Получили $8z_2^4 \ge 8z_1^4 > z_2^5$, откуда $8 > z_2$. Однако z_2 (как и z_1) – нечетное число вида $3k + 1$. Следовательно, $z_2 = 7$. Но $z_1 \le z_2$, откуда $z_1 = 7$. С другой стороны, из равенства $P(P(z_1)) = z_2^{r_1} = z_1^{r_1}$ следует, что z_1 делит 3. Полученное противоречие доказывает лемму.

В силу леммы, можно переписать систему равенств задачи при $n = 4$ в виде $P(P(P(P(x)))) = x^l$, или $x^{16} + \ldots + 27 \times 21x + 183 = x^l$. Следовательно, x – делитель 183, больший 1 и не делящийся на 3 (поскольку заведомо $l > 1$). Отсюда $x = 61$. Значит, число $27 \times 21 \times 61 + 183$ должно делиться на 61^2, или $27 \times 21 + 3 = 570$ – на 61. Противоречие.

Авторам неизвестно, справедливо ли утверждение задачи для произвольного четного n. Неизвестно также, справедливо ли в случае $n = 4$ его естественное обобщение на многочлены $x^{p-1} + \ldots + 1$, где $p \ge 3$ – простое число.

Замечания.

1. При доказательстве леммы мы получили неравенство $P(P(z_1)) \ne z_2^3$. Легко показать, что оно справедливо при любых целых z_1 и z_2; можно также распространить его на случай произвольного простого $p > 3$.

2. Утверждение задачи нельзя распространить на случай $p = 2$: уже при $n = 2$ это показывает система равенств $2 + 1 = 3$, $3 + 1 = 2^2$. «Дублированием» примера его легко распространить на случай любого четного n.

3. Может ли вообще уравнение $x^n + \ldots + 1 = y^k$ иметь нетривиальные решения в натуральных числах? Ответ положителен: $3^4 + \ldots + 1 = 11^2$, $7^3 + \ldots + 1 = 20^2$. Однако, согласно глубокой теореме Туэ, на любой неособой кривой степени ≥ 3 лежит лишь конечное число целых точек, откуда следует, что каждое из таких уравнений может иметь лишь конечное количество решений.

В.Сендеров, Б.Френкин

М2055. *Клетки бесконечной вправо клетчатой полоски последовательно занумерованы числами 0, 1, 2, … В некоторых клетках лежат камни. Если на i-й клетке ($i > 0$) лежит ровно i камней, то разрешается снять с нее и разложить по одному на клетки с номерами $i - 1$, $i - 2$, …, 0. Леша распределил 2006! камней по клеткам, начиная с первой, так, чтобы можно было собрать их в нуле, сделав несколько операций. Найдите минимальный номер клетки, на которой лежит камень.*

Ответ: 2010.

Заметим сразу, что в любой момент времени на клетке с номером $i > 0$ лежит не более i камней; в противном случае их количество на этой клетке может только возрастать, и все камни на нулевой клетке собрать не удастся.

Для произвольного натурального k рассмотрим множество клеток с номерами $0, 1, \ldots, k-1$. Выясним, как изменяется общее количество камней S_k в этих клетках при наших операциях. Пусть Леша сделал операцию с i-й клеткой. Если $i < k$, то камни перекладывались только в пределах нашего множества клеток, и S_k не изменилось. Если же $i \geq k$, то по одному камню появилось во всех наших клетках, т.е. S_k увеличилось на k. Значит, остаток от деления S_k на k остается неизменным; в конце же он равен остатку от деления 2006! на k.

Заметим, что 2006! делится на все числа от 1 до 2006 (очевидно), а также на $2007 = 3 \cdot 669$, $2008 = 2 \cdot 1004$, $2009 = 7 \cdot 287$ и $2010 = 2 \cdot 1005$. Докажем индукцией по $0 \leq i \leq 2009$, что i-я клетка вначале была пуста. База при $i = 0$ выполняется по условию. Пусть все клетки от 0-й до $(i-1)$-й были пусты. Тогда число камней на i-й клетке было равно суммарному количеству камней на клетках $0, \ldots, i$, т.е. делилось на $i + 1$; кроме того, оно не превосходило i. Значит, оно было нулевым, что и требовалось.

С другой стороны, 2006! не делится на 2011 (так как 2011 – число простое), поэтому общее число камней на клетках от 0 до 2010 имеет ненулевой остаток от деления на 2011; в частности, это число не равно нулю, поэтому на 2010-й клетке изначально были камни.

Замечание. Решение позволяет выяснить, каков наименьший номер занятой клетки, если изначальное число камней было равно n. Именно, это наименьшее натуральное число k такое, что n не делится на $k + 1$. Более того, из решения легко увидеть, как следует разложить n камней на клетках с положительными номерами так, чтобы их можно было собрать в нуле. Будем раскладывать камни в клетки по порядку. На i-ю клетку положим такое (единственное!) количество камней $a_i \leq i$, чтобы число $a_1 + \ldots + a_i$ имело тот же остаток от деления на $i + 1$, что и n. Предоставляем читателю самостоятельно доказать, что при такой раскладке камни собрать в нуле удастся.

И.Богданов

Ф2063. *Фигурку из металла взвешивают на очень точных весах, используя золотые гирьки, – измеренная масса составила 47,98 г. Когда воздух под колпаком весов откачали до 0,1 атмосферного давления, получилось практически точно 49 г. Определите по этим данным, из какого металла сделана фигурка.*

Плотность воздуха при нормальных условиях равна

$$\rho = \frac{pM}{RT} = \frac{1 \cdot 10^5 \cdot 29 \cdot 10^{-3}}{8,3 \cdot 293} \text{ кг/м}^3 \approx 1,2 \text{ кг/м}^3 .$$

Отношение измеренных масс гирек составляет

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{\rho_0 - 0,1\rho}{\rho_0 - \rho} = \frac{1 - 0,1\dfrac{\rho}{\rho_0}}{1 - \dfrac{\rho}{\rho_0}} = \frac{49}{47,98} .$$

Тогда для искомой плотности металла получим

$$\rho_0 = \frac{\rho}{0,023} \approx 53 \text{ кг/м}^3 .$$

Металл такой плотности найти не просто… Либо фигурка пустотелая, либо в условии задачи ошибка. Разность измеренных масс для сплошной металлической фигурки должна быть совсем малой, больше 1 г разницы для 50-граммовой фигурки – это слишком много. Вот если бы данные в задаче были 47,98 г и 48 г, тогда мы получили бы

$$1 - 0,1\frac{\rho}{\rho_0} = 1,0004\left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right), \text{ или } \rho_0 \approx 2600 \text{ кг/м}^3 .$$

Такая плотность соответствует алюминию – это решение выглядит куда лучше. Должно быть, автор задачи и в самом деле ошибся…

Кстати, вес воздуха, вытесненного гирьками, можно не учитывать – в решение входит отношение m_2/m_1.

Н.Простов

Ф2064. *Длинная тонкая прозрачная трубка заполнена глицерином, посредине трубки находится маленький воздушный пузырек. Когда трубка вертикальна, пузырек всплывает практически с постоянной скоростью 1 см/с. Сделаем трубку горизонтальной, подождем достаточно долго – пока все успокоится, а пузырек перестанет двигаться. Теперь разгоним трубку вдоль ее оси до скорости 10 см/с и продолжим двигать ее с этой скоростью. Найдите смещение пузырька относительно его начального положения. Считать силу сопротивления пропорциональной скорости пузырька относительно жидкости.*

Будем считать, что диаметр пузырька во много раз меньше диаметра трубки и что при движении пузырька жидкость в трубке практически не перемешивается. Когда трубка расположена вертикально, в ней возникает распределение давлений – чем ниже, тем больше давление. При этом на пузырек действуют силы со стороны окружающей воды – распределение давлений такое, что будь на месте пузырька такая же капелька воды, сила тяжести была бы уравновешена силами со стороны окружающей воды. Так мы можем найти сумму этих сил – она равна mg, где m – масса воды в объеме нашего пузырька (просто сила Архимеда, ничего неожиданного). При движении пузырька со скоростью v_1 она уравновешена силой сопротивления: $mg = kv_1$. Если мы двигаем горизонтальную трубку вдоль ее оси с ускорением a, распределение давления получится таким, что капелька воды (вместе с окружающей водой) имеет такое же ускорение. Тогда сила со стороны окружающей воды равна ma и в каждый момент почти полностью (считаем – полностью, масса воздушного пузырька совсем мала) уравновешена силой сопротивления: $kv = kv_1 v/v_1 = mg\,v/v_1$. В итоге получим соотношение $a = gv/v_1$. За малый интервал времени τ получаем

$$a\tau = g\frac{v\tau}{v_1}, \text{ или } \Delta v = \frac{g}{v_1}\Delta x .$$

Суммируя изменения скорости, получим слева v_2, справа суммирование дает полное смещение пузырька относительно трубки. Окончательно найдем

$$x = \frac{v_1 v_2}{g} = \frac{0{,}01 \cdot 0{,}1}{10}\ \text{м} = 0{,}1\ \text{мм}.$$

Совсем немного …

А.Повторов

Ф2065. *На гладком горизонтальном столе покоится клин массой M, его наклонная поверхность составляет угол α с горизонтом. Маленькая шайба массой m движется по столу со скоростью v_0 и «въезжает» на наклонную поверхность клина. Считая, что наклонная поверхность имеет плавное короткое сопряжение с горизонталью, найдите время подъема шайбы до верхнего своего положения. Найдите также смещение клина к этому моменту. Трения в системе нет.*

Попробуем решить эту задачу в «лоб», т.е. укажем все силы, действующие на шайбу и на клин в процессе их движения (до наивысшей точки), и учтем связи между ускорениями шайбы относительно плоскости и относительно клина. Будем считать, что скорость шайбы относительно клина линейно убывает со временем от v_0 до нуля, а скорость клина линейно возрастает от нуля до скорости V_c центра масс системы «шайба–клин», которую найдем из закона сохранения импульса (по горизонтали):

$$V_c = \frac{v_0 m}{m+M} = \frac{v_0}{1+n}.$$

Как нетрудно подсчитать, ускорение шайбы относительно клина a_1 направлено вниз под углом α к горизонту и равно

$$a_1 = \frac{g(n+1)\sin\alpha}{n+\sin^2\alpha},$$

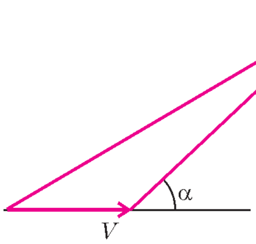
а ускорение клина относительно плоскости направлено горизонтально и равно

$$A = \frac{g\sin\alpha\cos\alpha}{n+\sin^2\alpha}.$$

Разделив изменения скоростей на соответствующие ускорения, получим сильно различающиеся между собой искомые времена:

$$t_1 = \frac{-v_0}{-a_1},\quad t_2 = \frac{V_c}{A}.$$

Скорее всего, неверны оба результата, и въезд шайбы на клин следует рассматривать как удар, в результате которого клин получает импульс, направленный горизонтально, а шайба и плоскость (вместе с Землей в целом) получают компенсирующие друг друга вертикальные составляющие начального импульса шайбы. Пусть сразу после въезда шайбы на клин V и v – скорости клина и шайбы, а v_1 – скорость шайбы относительно клина (см рисунок). Так как размеры плавного сопряжения клина малы, то временем его прохождения можно пренебречь. Считая малой и высоту поднятия шайбы после въезда, запишем законы сохранения энергии и импульса (по горизонтали):



$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{MV^2}{2} + \frac{mv^2}{2},\quad mv_0 = MV + m(V + v_1\cos\alpha),$$

или

$$v_0^2 = nV^2 + v^2,\quad v_0 = (n+1)V + v_1\cos\alpha.$$

Как видно из рисунка,

$$v^2 = V^2 + 2Vv_1\cos\alpha + v_1^2.$$

Решая систему последних трех уравнений, находим

$$v_1 = v_0\sqrt{\frac{n}{n+\sin^2\alpha}},\quad V = \frac{v_0}{n+1}\left(1 - \sqrt{\frac{n}{n+\sin^2\alpha}}\cos\alpha\right).$$

Учтем, что относительная скорость шайбы уменьшается от v_1 до нуля с ускорением a_1, а скорость клина увеличивается от V до V_c с ускорением A. Если временем въезда пренебречь, то для времени движения до наивысшей точки получаем

$$T_1 = \frac{-v_1}{-a_1},\quad T_2 = \frac{V_c - V}{A}.$$

Преобразования дают, разумеется, одинаковые времена:

$$T_1 = T_2 = T = \frac{v_0}{g(n+1)\sin\alpha}\sqrt{n\left(n+\sin^2\alpha\right)}.$$

Центр масс системы движется с постоянной скоростью V_c, его смещение за время T получится $L = V_c T$. Но шайба относительно клина смещается по горизонтали вперед, значит, клин отстает от центра масс и это отставание нужно учесть при расчете смещения клина. Мы нашли скорость шайбы вдоль клина после въезда v_1, ее проекция на горизонталь меняется равномерно от $v_1\cos\alpha$ до нуля, смещение шайбы относительно клина по горизонтали составляет $s = 0{,}5Tv_1\cos\alpha$. Тогда смещение клина «назад» относительно центра масс равно $x = ms/(M+m)$, и полное смещение клина по горизонтали за время T будет $L - x$. Можно подставить теперь в формулу записанные выше выражения для L и x, но можно этого и не делать – все равно красивой формулы не получится…

Г.Панькевич

Ф2066. *Тележки с массами m = 1 кг и M = 2 кг связаны легким упругим шнуром длиной L = 0,3 м. Вначале тележки неподвижны, а шнур почти натянут. Легкой тележке ударом сообщают скорость v_0 = 2 м/с в направлении соединяющего их шнура (рис.1). Через какое время произойдет удар тележек друг о друга? Жесткость шнура k = 20 Н/м.*

Рис. 1

Центр масс тележек все время движется со скоростью

$$u_ц = v_0\frac{m}{M+m}.$$

Пересядем в эту систему отсчета. Точка шнура, которая делит длину шнура в отношении $\frac{l_1}{l_2} = \frac{M}{m}$, как раз и есть

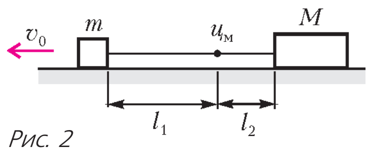


Рис. 2

центр масс, $u_ц$ – это ее скорость (рис.2). Жесткость куска шнура длиной l_1 равна

$$k_1 = k\frac{l_1 + l_2}{l_1} = k\left(1 + \frac{m}{M}\right),$$

и шнур останется натянутым в течение интервала времени

$$\tau_1 = \frac{1}{2}T_1 = \frac{\pi}{\omega_1} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{k_1}{m}}} = \pi\sqrt{\frac{mM}{k(M+m)}}.$$

После этого шнур уже не влияет на движение системы (до удара тел – уж точно!), тела едут навстречу друг другу со скоростями u_1 и u_2, которые можно найти из уравнений (мы все еще находимся в системе, связанной с центром масс), описывающих законы сохранения импульса и энергии:

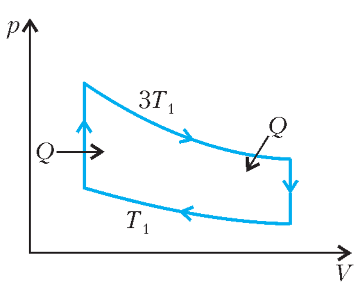
$$\begin{cases} mu_1 = Mu_2, \\ \dfrac{mu_1^2}{2} + \dfrac{Mu_2^2}{2} = \dfrac{m\left(v_0 - u_ц\right)^2}{2} + \dfrac{Mu_ц^2}{2}. \end{cases}$$

Можно, конечно, решать эту систему, но можно и вспомнить, что *относительная* скорость тел после абсолютно упругого лобового удара (а это – наш случай) остается неизменной, т.е. равной v_0, а длина шнура в тот момент, когда он станет не натянут, равна l. Тогда полное время до удара будет равно

$$t = \tau + \frac{l}{v_0} = \pi\sqrt{\frac{mM}{k(M+m)}} + \frac{l}{v_0} \approx 0{,}7\ \text{с}.$$

Р.Александров

Ф2067. *Цикл тепловой машины, работающей с идеальным газом, состоит из двух изохорических участков и двух изотермических участков с отношением температур $T_1 : T_2 = 3$. Известно, что на участке изохорического нагревания газ получает столько же тепла, сколько на участке изотермического расширения. Найдите КПД этого цикла.*



Это – совсем простая задача. Работы на изотермах (по абсолютной величине) относятся как 3:1 (для каждого малого участка ΔV давление на «верхней» изотерме в 3 раза больше (см. рисунок). Тогда полная работа в цикле равна $A_ц = Q - \frac{1}{3}Q = \frac{2}{3}Q$. Значит, термодинамический КПД равен

$$\eta = \frac{A_ц}{Q_ц} = \frac{2Q/3}{2Q} = \frac{1}{3}.$$

С.Простов

Ф2068. *Простой омметр состоит из последовательно соединенных миллиамперметра с током полного отклонения 1 мА, батарейки напряжением 1,5 В и переменного резистора (рис.1). Регулируя сопротивление этого резистора, мы производим «установку нуля» омметра – при замкнутых выводах омметра стрелку прибора устанавливаем в крайнее правое положение («нуль омметра»). При разомкнутых выводах ток нулевой – это соответствует «бесконечному» измеряемому сопротивлению. Можно ли при помощи этого прибора измерить сопротивления резисторов R_x порядка 1 Ом; 1 кОм; 1 МОм? Какое сопротивление покажет этот омметр, если к его выводам подключить полупроводниковый диод, вольт-амперная характеристика которого приведена на рисунке 2?*

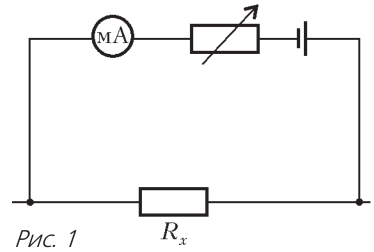


Рис. 1

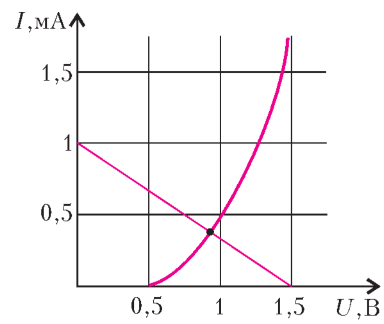


Рис. 2

Рассмотрим связь между током и напряжением, приложенным к измеряемому резистору. Впрочем, не обязательно к резистору – к любому «устройству», подключенному к нашему омметру. Видно, что эта зависимость линейная, при $U = 0$ ток равен 1 мА (мы его установили), при $U = 1{,}5$ В ток обратится в ноль. Полученная прямая показана на том же рисунке, на котором приведена вольт-амперная характеристика диода. Ясно, что точка пересечения двух кривых дает нам возможность найти ответ: такой же ток через прибор, какой мы получили из графика – примерно 0,4 мА при напряжении 0,9 В, – будет течь при подключении резистора сопротивлением

$$R = \frac{0{,}9\ \text{В}}{0{,}4\cdot10^{-3}\ \text{А}} = 2{,}25\ \text{кОм}.$$

А.Старов

Ф2069. *В схеме на рисунке 1 «горизонтальная» батарейка имеет напряжение 1 В, три из четырех конденсаторов имеют одинаковые емкости, а последний – вдвое большую. Каким может быть напряжение второй, «вертикальной» батарейки, чтобы хотя бы один конденсатор в этой схеме остался незаряженным? До подключения батареек все конденсаторы заряжены не были.*

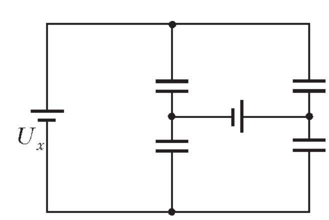


Рис. 1

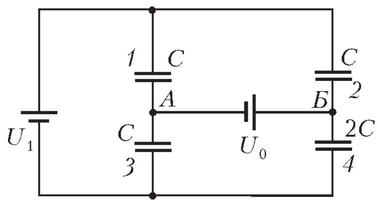


Рис. 2

Задача несложная, важно только не упустить каких-либо возможных вариантов. Можно рассматривать единственную схему (рис.2), но придется учитывать два возможных значения известного напряжения: $U_0 = 1$ В и $U_0 = -1$ В. При этом мы учтем «перестановку» конденсаторов *3* и *4*; то же для *1* и *4* и *2* и *4* получится автоматически, с учетом полярности батарейки напряжением U_1. Итак, при незаряженном конденсаторе емкостью $2C$ потенциал точки *Б* равен нулю (примем далее за ноль потенциал «нижней» точки), $\varphi_A = -U_0$, суммарный заряд «нижних» обкладок конденсаторов *3* и *4*, а также «верхних» обкладок конденсаторов *1* и *2* равен нулю:

$$CU_1 - (-U_0) + CU_1 + C(+U_0) + 0 = 0.$$

Отсюда находим $U_1 = U_0 = 1$ В. При $U_0 = -1$ В получим $U_1 = -1$ В (полярность обратная).

Запишем условие нулевого заряда конденсатора *3*:

$$\varphi_A = 0, \quad \varphi_Б = U_0, \quad CU_1 + C(U_1 - U_0) + 2C(-U_0) = 0,$$

$$U_1 = \frac{3}{2}U_0, \quad U_1 = \pm 1{,}5 \text{ В}.$$

Теперь запишем условие нулевого заряда конденсатора *1*:

$$\varphi_A = U_1, \quad \varphi_Б = U_1 + U_0,$$

$$CU_1 - (U_1 + U_0) + C(-U_1) + 2C(-U_1 - U_0) = 0,$$

$$-U_0 - U_1 - 2U_1 - 2U_0 = 0,$$

$$U_1 = -U_0 = -1 \text{ В (полярность обратная)}.$$

И, наконец, запишем условие нулевого заряда конденсатора *2*:

$$\varphi_Б = U_1, \quad \varphi_A = U_1 - U_0,$$

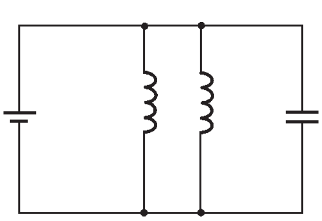
$$C(U_1 - U_1 + U_0) + C(-U_1 + U_0) + 2C(-U_1) = 0,$$

$$U_0 - U_1 + U_0 - 2U_1 = 0, \quad 2U_0 = 3U_1, \quad U_1 = \frac{2}{3}U_0 = \frac{2}{3}\,В.$$

Итак, вот возможные напряжения «вертикальной» батарейки: $\frac{2}{3}$ В; 1 В; 1,5 В.

З.Рафаилов

Ф2070. *На одинаковые тороидальные сердечники, сделанные из материала с большой магнитной проницаемостью, намотаны тонким проводом катушки, одна из них содержит вдвое больше витков, чем другая. Катушка с меньшим числом витков имеет индуктивность 0,5 Гн. Катушки соединены параллельно, к выводам катушек присоединены конденсатор емкостью 10 мкФ и батарейка напряжением 6 В с внутренним сопротивлением 10 Ом (см. рисунок). Когда токи в цепи практически перестали изменяться, батарейку отключают. Найдите максимальное значение заряда конденсатора. Какое количество теплоты выделится в каждой катушке после отключения батарейки? Провод, которым намотаны катушки, имеет очень маленькое сопротивление.*



Вначале о катушках. Пусть индуктивность катушки с меньшим числом витков равна L, тогда индуктивность «двойной» катушки в 4 раза больше и составляет $4L$. Обозначим малое сопротивление куска провода, которым намотана меньшая катушка, через r, сопротивление «двойной» катушки вдвое больше и равно $2r$. После того как токи в цепи практически перестают изменяться, ЭДС самоиндукции катушек становятся нулевыми и полный ток в цепи батарейки равен $I_{общ} = 6\text{ В}/10\text{ Ом} = 0{,}6$ А. Между катушками этот ток распределяется в отношении, определяемом сопротивлениями обмоток, т.е. через малую катушку течет вдвое больший ток, чем через «двойную». Таким образом, ток первой катушки равен $2I = 0{,}4$ А, а ток «двойной» катушки равен $I = 0{,}2$ А. Конденсатор при этом не заряжен (его напряжение было бы нулевым при идеальных катушках, а в нашем случае оно равно падению напряжения на сопротивлениях проводов, которыми намотаны катушки). Максимальный заряд конденсатора получится в тот момент, когда заряжающий его ток первый раз станет нулевым (для идеальных катушек такие моменты наступали бы дважды в течение каждого периода колебаний – в нашем случае колебания медленно затухают и самый большой заряд получается именно в первый такой момент). Пренебрежем затуханием за время одного периода колебаний (сопротивление проводов по условию мало), ЭДС индукции катушек все время одинаковы, изменения токов обратно пропорциональны индуктивностям катушек – ток через катушку индуктивностью L меняется в 4 раза быстрее, он сменит знак до того, как второй ток упадет до нуля. Суммарный ток станет нулевым при значении тока каждой катушки J, определяемом уравнением $4(0{,}2 - J) = 0{,}4 + J$, откуда $J = 0{,}08$ А. Максимальный заряд конденсатора определим из закона сохранения энергии (выделением тепла за небольшой интервал времени пренебрегаем):

$$L\frac{(2I)^2}{2} + 4L\frac{I^2}{2} = L\frac{J^2}{2} + 4L\frac{J^2}{2} + \frac{Q_m^2}{2C},$$

откуда

$$Q_m = I\sqrt{7{,}2LC} = 1{,}2 \cdot 10^{-3} \text{ Кл}.$$

Общее количество теплоты, выделившееся в системе после отключения батарейки, найти совсем просто – это суммарная энергия катушек сразу после отключения: $W_{общ} = L(2I)^2/2 + 4LI^2/2 = 0{,}08$ Дж. Намного сложнее посчитать, как это тепло распределится между катушками. В схеме одновременно происходят два разных процесса – понемногу затухает «кольцевой» ток в контуре, образованном двумя катушками, и медленно затухают колебания в контуре из конденсатора и двух катушек, включенных параллельно. В «кольцевом» процессе расходуется энергия $W_1 = 5LI^2/2 =$

$= 0{,}008$ Дж, в «колебательном» – остальные $W_2 = 0{,}072$ Дж. В первом из процессов токи катушек одинаковы, отношение количеств теплоты определяется отношением сопротивлений катушек. Тогда в одинарной катушке выделяется $W_1/3 \approx 3 \cdot 10^{-3}$ Дж, в «двойной» – примерно $6 \cdot 10^{-3}$ Дж. В колебательном процессе токи катушек определяются отношением индуктивностей, т.е. через одинарную катушку течет в каждый момент вчетверо больший ток. С учетом отношения сопротивлений проводов получится отношение 8:1 в пользу одинарной катушки, в ней выделится $8W_2/9 = 0{,}064$ Дж, в «двойной» катушке выделится $W_2/9 = 0{,}008$ Дж. Будем считать, что в одинарной катушке всего выделилось чуть меньше 0,07 Дж, а в «двойной» в сумме выделилось примерно 0,015 Дж. Конечно, это довольно грубая оценка, нельзя просто суммировать количества теплоты, выделяющиеся в каждом из процессов, но это все же лучше, чем ничего…

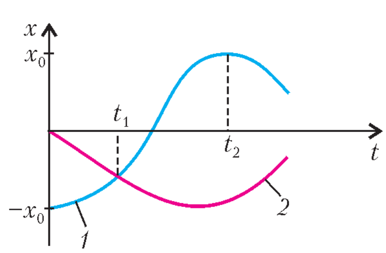
А.Зильберман

Ф2071. *На двух одинаковых легких пружинах жесткостью k, прикрепленных к потолку, висят одинаковые грузы массой M. На один из грузов аккуратно ставят грузик массой m, а после того, как колебания прекратятся, быстро переносят грузик на другой груз. Через какое время грузы поравняются? А через какое время скорости грузов впервые будут направлены в одну сторону?*

Каждый из маятников после переноса грузика будет совершать гармонические колебания. Частоты колебаний разные:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{M}} \quad \text{и} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{M+m}},$$

амплитуды – одинаковые и равные $x_0 = \dfrac{mg}{k}$. Отсчитывая координаты от положения равновесия ненагруженного маятника, получим графики изменения координат со временем (см. рисунок).



Поравняются грузы в момент t_1, для которого $-x_0 \cos\omega_1 t_1 = -x_0 \sin\omega_2 t_1$. При этом

$$\cos\omega_1 t_1 = \sin\omega_2 t_1,$$

или

$$\omega_1 t_1 + \omega_2 t_1 = \frac{\pi}{2}, \quad t_1 = \frac{\pi}{2(\omega_1 + \omega_2)} = \frac{\pi}{2\left(\sqrt{\dfrac{k}{M}} + \sqrt{\dfrac{k}{M+m}}\right)}.$$

Скорости грузов впервые будут направлены в одну сторону, как только один из них изменит направление движения. Так как $\omega_1 > \omega_2$, первым это сделает груз, с которого сняли грузик массой m, через половину периода своих колебаний. Итак,

$$t_2 = \frac{1}{2}T_1 = \frac{\pi}{\omega_1} = \frac{\pi}{\sqrt{\dfrac{k}{M}}} = \pi\sqrt{\frac{M}{k}}.$$

А.Грузов

Ф2072. *Корпус светоизлучающего диода отштампован из прозрачной пластмассы (рис.1). На одном его конце сформирована линза, излучающая область представляет кружок диаметром 2 мм. Оцените диаметр светлого пятна на экране, расположенном на оси излучения на расстоянии 20 см от диода. Отражениями света внутри пластмассового корпуса можно пренебречь.*

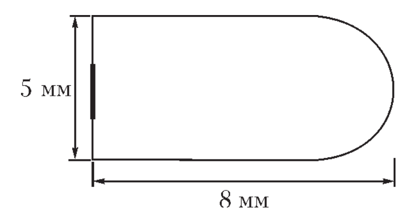


Рис. 1

При решении этой задачи нам придется сделать несколько допущений. Будем считать, что центр излучающей поверхности находится в главном фокусе линзы, т.е. $F = 8$ мм. Пусть коэффициент преломления пластмассы равен $n = 1{,}5$, тогда радиус кривизны сферической поверхности составляет $R = F(n-1) = 4$ мм. Центр излучающей поверхности после преломления даст параллельный пучок света, его радиус $r_0 = 2{,}5$ мм. Дальше проводим вычисления (рис.2). Отрезок *ГD* имеет

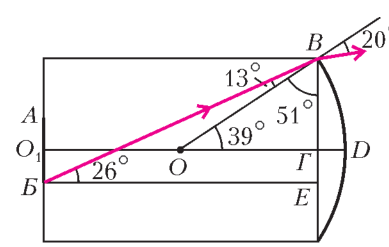


Рис. 2

длину 0,9 мм, расходимость пучка после линзы определяется ходом «самого невыгодного» луча *БВ*. Для угла падения его к нормали – радиусу *OB* – расчет дает 13°. Тогда угол преломления составит примерно 20°. При этом луч идет под углом 19° к главной оптической оси линзы и на расстоянии 20 см от нее отойдет от этой оси еще на $20 \text{ см} \cdot \mathrm{tg}\,19° \approx 7$ см. Таков и будет радиус пятна на экране. Интересно, что измеренный в прямом эксперименте со светодиодом радиус пятна был чуть больше 5 см – для такого грубого расчета совпадение хорошее.

А.Светлов