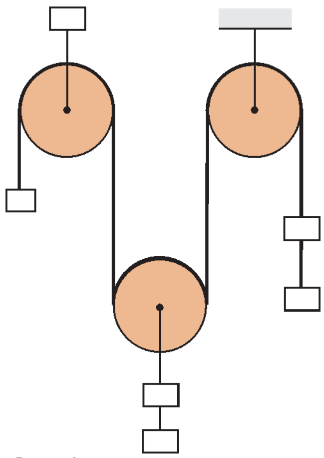


Рис. 4

Ф2058. В системе на рисунке 4 все грузы одинаковы. Вначале грузы удерживают, затем отпускают, и система приходит в движение без рывков. Найдите ускорения подвижных блоков.

А.Блоков

Ф2059. Новые настенные часы с маятником идут очень точно. Маятник представляет собой очень легкий длинный стержень, подвешенный за один из концов, к другому концу стержня прикреплен массивный диск, радиус которого в 10 раз меньше длины стержня (рис.5). Диск может свободно вращаться вокруг своей оси. Со временем, из-за трения в оси диска, он перестал поворачиваться вокруг этой оси. Будут ли часы спешить или они теперь начнут отставать? Оцените неточность хода часов за сутки.

З.Рафаилов

Рис. 5

Ф2060. Моль гелия медленно расширяется от объема 10 л до объема 10,1 л, при этом давление газа плавно уменьшается от 1 атм до 0,985 атм. Найдите теплоемкость гелия в этом процессе.

А.Простов

Ф2061. Тонкостенную непроводящую сферу радиусом R зарядили равномерно по поверхности полным зарядом Q, а затем разрезали пополам – по «экватору». Одну половину сферы убрали, а вторую оставили – для изучения. Найдите потенциал электрического поля, создаваемого зарядами полусферы в точке «экваториальной» плоскости, находящейся на расстоянии $R/2$ от центра сферы.

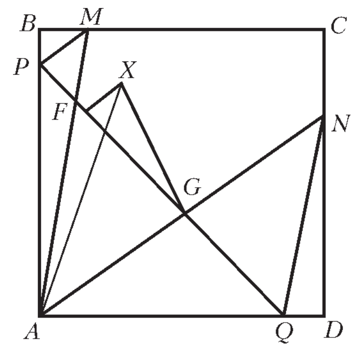
Б.Сложнов

Ф2062. На тороидальный ферромагнитный сердечник, сделанный из материала с большой магнитной проницаемостью, намотана катушка, содержащая большое количество витков. Катушку подключили к сети 220 В, ток через катушку при этом составил 10 мА (действующее значение). Вольтметр, имеющий сопротивление 10 кОм, подключают между одним из концов катушки и отводом, сделанным от середины катушки (половина витков). Какое напряжение покажет вольтметр? Какой ток теперь течет через источник?

А.Зильберман

Решения задач М2026 – М2035, Ф2043–Ф2047

М2026. *На сторонах AB, BC, CD и DA квадрата $ABCD$ выбраны соответственно точки P, M, N, Q так, что $\angle MAN = 45^\circ$, $PM \parallel AN$, $AM \parallel NQ$. Отрезок PQ пересекает AM и AN в точках F и G соответственно. Докажите, что площадь треугольника AFG равна сумме площадей треугольников FMP и GNQ.*



Прежде всего отметим, что $\angle PMA = \angle MAN = \angle ANQ$, и значит, треугольники AFG, MFP и NQG подобны (см. рисунок). Поэтому утверждение задачи равносильно равенству $GF^2 = PF^2 + GQ^2$.
Далее, треугольники NQD и MPB подобны треугольникам AMB и AND соответственно, следовательно,

$$\frac{QD}{ND} = \frac{BM}{AB},\ \frac{ND}{AD} = \frac{BP}{BM}.$$

Перемножив эти равенства, получим, что $BP = DQ$, или $AP = AQ$. Пусть X – точка, симметричная P относительно AM. Тогда $AX = AP = AQ$ и $\angle XAN = 45^\circ - \angle MAP = \angle NAD$, т.е. X также симметрична Q относительно AN. Таким образом, $XF = FP$, $XG = GQ$ и

$$\angle XFG + \angle XGF = 360^\circ - 2\angle PFM - 2\angle QGN = 90^\circ.$$

Применив к прямоугольному треугольнику XFG теорему Пифагора, получим искомое равенство.

В.Произволов

М2027. *На доске написаны три натуральных числа x, y, z. Петя записывает на листке произведение каких-нибудь двух из этих чисел, а на доске уменьшает третье число на 1. С новыми тремя числами на доске он снова проделывает ту же операцию и т.д. до тех пор, пока одно из чисел на доске не станет равным нулю. Чему будет в этот момент равна сумма чисел на листке?*

Ответ: xyz.
Первое решение. Заметим, что произведение трех чисел, записанных на доске, с каждой операцией уменьшается ровно на то число, которое Петя записывает на бумажку. Когда одно из чисел становится нулем, произведение всех чисел на доске тоже равно нулю, откуда сумма всех чисел, выписанных Петей, равна начальному произведению трех чисел на доске, т.е. xyz.
Второе решение. Рассмотрим параллелепипед со сторонами x, y, z. На каждом шаге мы отрезаем от него параллелепипед толщины 1, записывая его объем на бумажку, и продолжаем действовать так с оставшимся параллелепипедом. Процесс закончится, когда отрежем все. Значит, на бумажке будет записан объем исходного параллелепипеда, т.е. xyz.

Е.Горский, С.Дориченко

М2028. *Известно, что вруны всегда врут, правдивые всегда говорят правду, а хитрецы могут и врать, и говорить правду. Вы можете задавать вопросы, на которые есть ответ «да» или «нет» (например: «Верно ли, что этот человек – хитрец?»).*

а) Перед вами трое – врун, правдивый и хитрец, которые знают, кто из них кто. Как и вам это узнать?
б) Перед вами четверо – врун, правдивый и два хитреца (все четверо знают, кто из них кто). Докажите, что хитрецы могут договориться отвечать так, что вы, спрашивая этих четверых, ни про кого из них не узнаете наверняка, кто он.

а) Спросим каждого: «Верно ли, что оба твоих соседа – вруны?». Среди трех ответов есть «да» вруна и «нет» правдивого, поэтому один из ответов будет дан ровно один раз. По нему мы узнаем ответившего: это либо врун, либо правдивый. Задав ему вопрос про одного из двух других: «Верно ли, что он хитрец?», мы все узнаем.

Замечания. 1. В начале можно задавать любой вопрос, ответ на который вам известен (например, «Верно ли, что сегодня четверг?»).

2. Можно обойтись и тремя вопросами, если они будут достаточно изощренными, что-то вроде: «Ответит ли он «да», если я спрошу…»

б) Обозначим участников: врун В, правдивый П и хитрецы ХВ и ХП. Пусть хитрецы договорятся отвечать так, как будто ХВ – врун, ХП – правдивый, В – хитрец, притворяющийся вруном, а П – хитрец, притворяющийся правдивым. Поставив их лицом друг против друга так, что ХП как бы служит отражением П, а ХВ служит отражением В, видим, что невозможно отличить, кто стоит «перед зеркалом», а кто «за зеркалом», – ответы полностью «зеркальны».

Б.Гинзбург, М.Гервер

М2029. *Даны две бесконечные прогрессии, состоящие из положительных чисел: арифметическая и геометрическая, причем любое число, встречающееся в геометрической прогрессии, встречается также и в арифметической прогрессии. Докажите, что знаменатель геометрической прогрессии – целое число.*

Пусть q – знаменатель геометрической прогрессии (т.е. $b_{n+1} = q^n b_1$ при всех натуральных n). Если $q = 1$, то задача решена. Иначе $(b_{n+2} - b_{n+1})/(b_2 - b_1) = q^n$, откуда q – рациональное (ясно, если взять $n = 1$) и, кроме того, $(b_2 - b_1)q^n$ – целое число при любом натуральном n. Записывая q в виде несократимой дроби $q = s/t$, получаем, что $(b_2 - b_1)s^n/t^n$ – целое число, и, значит, $b_2 - b_1$ делится на t^n при любом n. Это возможно только если $t = 1$ или $t = -1$, т.е. когда q – целое.

Б.Френкин

М2030. *Можно ли вписать правильный октаэдр в куб так, чтобы вершины октаэдра находились на ребрах куба?*

Ответ: да, можно.

Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб с длиной ребра 1. Отметим на ребрах AB, AD, AA_1, C_1C, C_1B_1, C_1D_1 точки $M_1, M_2, \ldots, M_6$ соответственно так, чтобы

$$AM_1 = AM_2 = AM_3 = C_1M_4 = C_1M_5 = C_1M_6 = 3/4.$$

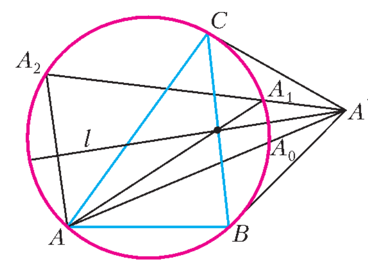
Тогда длины отрезков M_1M_2, M_2M_3, M_3M_1, M_4M_5, M_5M_6, M_6M_4 равны $\sqrt{(3/4)^2 + (3/4)^2} = 3\sqrt{2}/4$, а длины отрезков M_1M_4, M_1M_5, M_2M_4, M_2M_6, M_3M_5, M_3M_6 равны $\sqrt{(1/4)^2 + 1^2 + (1/4)^2} = 3\sqrt{2}/4$. Так как длины всех двенадцати отрезков равны, то все треугольники $M_1M_2M_3$, $M_4M_5M_6$, $M_1M_4M_5$, $M_2M_4M_6$, $M_3M_5M_6$, $M_4M_1M_2$, $M_5M_1M_3$, $M_6M_2M_3$ равносторонние и точки $M_1, M_2, \ldots, M_6$ являются вершинами октаэдра.

Л.Радзиviловский

М2031. *Прямые, содержащие медианы треугольника ABC, вторично пересекают его описанную окружность ω в точках A_1, B_1, C_1. Прямые, проходящие через A, B, C и параллельные противоположным сторонам, пересекают ω второй раз в точках A_2, B_2, C_2. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке.*

Приведем решение, найденное на олимпиаде М.Илюхиной. Оно основывается на следующих фактах.

1. Пусть A' – точка пересечения касательных к описанной окружности треугольника ABC в точках B и C (см. рисунок). Тогда прямая AA' является симедианой треугольника (т.е. прямой, симметричной медиане AA_1 относительно биссектрисы угла A).



2. Для любого треугольника ABC и любой точки P прямые, симметричные прямым AP, BP, CP относительно соответствующих биссектрис треугольника, пересекаются в одной точке (или параллельны), которая называется изогонально сопряженной точке P.

Построим точку A', как указано в пункта 1 (B', C' определяются аналогично). Пусть прямая AA' вторично пересекает описанную окружность ω в точке A_0. Тогда $\angle A_1AB = \angle A_0AC$, откуда дуги BA_1 и CA_0 равны. Так как треугольник $A'BC$ равнобедренный, а ω – его вневписанная окружность, то они симметричны относительно биссектрисы l угла $BA'C$. Из равенства дуг следует, что при этой симметрии точки A_1 и A_0 переходят друг в друга. Заметим, что l – серединный перпендикуляр к BC, поэтому A при этой симметрии переходит в A_2, а следовательно, прямая A_1A_2 переходит в прямую AA'. Поэтому, так как прямые AA', BB', CC' пересекаются в одной точке L как симедианы треугольника ABC, то прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 также пересекаются в точке, изогонально сопряженной L относительно треугольника $A'B'C'$.

Случай, когда одной из точек A', B', C' не существует, аналогичен.

А.Заславский

М2032. *а) Существует ли такое натуральное n, что для любого натурального k хотя бы одно из чисел $n^k - 1$, $n^k + 1$ имеет вид a^b для некоторых натуральных a и b > 1?*
б) Назовем натуральное число антипростым, если оно делится на квадрат любого своего простого*

делителя. Два натуральных числа назовем близнецами, если они отличаются на 2. Конечно или бесконечно множество пар антипростых чисел-близнецов?

Латинскими и греческими буквами в решении обозначены натуральные числа.

а) **Ответ**: нет.

Предположим, что такое число n существует. Ясно, что $n > 1$. Имеем $n^4 + 1 \neq 2^l$, $n^4 - 1 \neq 2^l$ (поскольку $a^2 + 1$ не делится на 4). Поэтому существуют нечетные простые числа p и q такие, что $n^4 + 1$ делится на p, $n^4 - 1$ делится на q; ясно, что $p \neq q$. Из леммы Гензеля следует, что при некотором α_0 и при любом β число p входит в каноническое разложение числа $n^{4p^{\alpha_0}q^{\beta}} + 1$ в некоторой степени вида 2^l. Аналогично, при некотором β_0 и при любом α число q входит в каноническое разложение числа $n^{4q^{\beta_0}p^{\alpha}} - 1$ в некоторой степени этого же вида. Поскольку справедливо хотя бы одно из равенств

$$n^{4p^{\alpha_0}q^{\beta_0}} + 1 = a^b \text{, где } b > 1,$$

$$n^{4p^{\alpha_0}q^{\beta_0}} - 1 = c^d \text{, где } d > 1,$$

мы получаем: либо $b = 2^k$, либо $d = 2^k$. В любом из этих случаев приходим к невозможному равенству: $r^2 - s^2 = 1$.

б) **Ответ**: бесконечно.

Первое решение. Заметим, что (25, 27) – пара антипростых чисел-близнецов. С другой стороны, из тождества

$$\left(2n^3 + 3n\right)^2 + 2 = \left(2n^2 + 1\right)^2 \left(n^2 + 2\right) \qquad (1)$$

следует, что вместе с любой парой $\left(n^2, n^2 + 2\right)$ антипростых близнецов такой парой является также и

$$\left(\left(2n^3 + 3n\right)^2, \left(2n^3 + 3n\right)^2 + 2\right).$$

К тождеству (1) можно придти, например, так. Будем искать многочлены с натуральными коэффициентами $P(x)$ и $Q(x)$, отличные от 1 и такие, что

$$x\left(P(x)\right)^2 + 2 = \left(Q(x)\right)^2 (x + 2).$$

Легко видеть, что в случае констант это тождество выполняется лишь при $P(x) = Q(x) = 1$; линейные же функции $P(x) = ax + b$ и $Q(x) = cx + d$, где $a, b, c, d \in \boldsymbol{N}$, легко находятся методом неопределенных коэффициентов.

Второе решение. Будем рассматривать функции (формы)

$$f_D(x, y) = x^2 - Dy^2 \text{, где } x, y, D \in \boldsymbol{N}.$$

Достаточно доказать, что форма $f_{27}(x, y)$ принимает значение –2 в бесконечном числе точек (x, y).

Лемма 1. Пусть число 1 является одним из значений формы $f_D(x, y)$. Тогда любое свое значение эта форма принимает в бесконечном числе точек (x, y).

Доказательство. Пусть $a^2 - Db^2 = 1$, где $a, b, D \in \boldsymbol{N}$. Достаточно найти $c, d, e, f \in \boldsymbol{N}$ такие, что

$$(cx + dy)^2 - D(ex + fy)^2 = x^2 - Dy^2$$

при всех $x, y \in \boldsymbol{N}$.

Для выполнения этого равенства достаточно (легко показать, что и необходимо), чтобы одновременно выполнялись равенства

$$c^2 - De^2 = 1,$$

$$d^2 - Df^2 = -D,$$

$$cd = Def.$$

Первое равенство справедливо, если $c = a$, $e = b$. Для выполнения второго, или $f^2 - D\left(\dfrac{d}{D}\right)^2 = 1$, достаточно $f = a$, $d = Db$. Ясно, что числа $c = a$, $d = Db$, $e = b$, $f = a$ удовлетворяют и третьему равенству. Таким образом, получаем

$$(ax + Dby)^2 - D(bx + ay)^2 = x^2 - Dy^2. \qquad (2)$$

Лемма доказана.

Поскольку $f_{27}(5, 1) = -2$, достаточно доказать существование $a, b \in \boldsymbol{N}$ таких, что $f_{27}(a, b) = 1$. Докажем, что для любой формы $f_{n^2+2}(x, y)$ такие числа a и b существуют. Для этого перепишем равенство $f_{n^2+2}(a, b) = 1$ в виде

$$\left(n^2 + 2\right)b^2 = (a + 1)(a - 1) = (t + 2)t,$$

где $t = a - 1$, и возьмем $b = n$, $t = n^2$.

Третье решение. Пусть $n^2 + 2$ – антипростое число. Рассмотрим уравнение $f_{n^2+2}(x, y) = -2$, или $x^2 + 2 = \left(n^2 + 2\right)y^2$. Поскольку оно имеет решение $x_0 = n$, $y_0 = 1$, то, вследствие леммы 1, оно имеет и некоторое решение (x_1, y_1), где $x_1 = m > x_0$, $y_1 > y_0$. Получили новое, большее чем $n^2 + 2$, антипростое число $m^2 + 2$; рассмотрим уравнение $f_{m^2+2}(x, y) = -2$, и т.д.

Заметим, что при любом натуральном n применение формулы (2) приводит к тождеству

$$\left(2n^3 + 3n\right)^2 - \left(n^2 + 2\right)\left(2n^2 + 1\right)^2 = -2.$$

Таким образом, мы вновь пришли к тождеству (1).

Приложение

Лемма Гензеля. Если $x - 1$ делится на p^k ($p > 2$ – простое, $k > 0$), но не делится на p^{k+1}, то $x^n - 1$ делится на p^{k+r} тогда и только тогда, когда n делится на p^r.

Это важное утверждение часто используется в теории чисел.

Лемму Гензеля легко доказать с помощью следующего утверждения.

Предложение. $P(x) = x^{p-1} + \ldots + 1$, где $p \in \boldsymbol{P} \setminus \{2\}$, $x \in \boldsymbol{Z}$, не делится на p^2.

Доказательство. Пусть $P(x) \vdots p$. Тогда и $x - 1 \vdots p$. В самом деле, $x^p - 1 \vdots p$, откуда вследствие Малой теоремы Ферма $x - 1 \vdots p$.

Пусть $P(x) \vdots p$, $x \neq 1$. Тогда

$$P(x) - p = \left(x^{p-1} - 1\right) + \ldots + (x - 1) =$$

$$= (x - 1)\left(\frac{x^{p-1} - 1}{x - 1} + \ldots + \frac{x - 1}{x - 1}\right) = (x - 1)A.$$

Так как $\dfrac{x^l - 1}{x - 1} \equiv l \pmod{p}$ при $x - 1 \vdots p$, $l \in \mathbf{N}$, то

$$A \equiv (p-1) + \ldots + 1 = p \cdot \frac{p-1}{2} \pmod{p}.$$

Получили $P(x) - p \vdots p^2$, откуда $P(x)$ не делится на p^2. При нечетном n легко распространить лемму Гензеля на случай чисел $x + 1$ и $x^n + 1$. Сделайте это самостоятельно.

Замечания

1. Рассмотрим более общее, нежели выше, уравнение $f_m(x,y) = 1$, где $x, y, m \in \mathbf{N}$, m – фиксированное число. Ясно, что в случае $m = n^2$, где $n \in \mathbf{N}$, это уравнение не имеет решений. При любом же $m \neq n^2$ решения этого уравнения существуют. Это – основная теорема теории уравнений Пелля (подробный рассказ о них см. в статьях «Уравнения Пелля» в «Кванте» №3, 4, 6 за 2002 г.).

Далее, **все** эти решения получаются из базового, «наименьшего», методом леммы 1.

Легко видеть, что общее уравнение $f_m(x,y) = A$ ($A \in \mathbf{Z}$, A и m – фиксированные числа) может – в частности, в случае $m \neq n^2$ – не иметь решений (x, y) (где $x, y \in \mathbf{N}$). Если же решения существуют, то все они в случае $m \neq n^2$ получаются из некоторого конечного набора базовых методом леммы 1.

2. На Турнире городов в 1984 году предлагалась следующая (вошедшая также в «Задачник «Кванта» под номером 869) задача.

Пары последовательных натуральных чисел (8, 9), (288, 289) обладают тем свойством, что каждое из этих чисел содержит любой свой простой множитель не менее чем во второй степени.

а) Найдите еще одну такую пару последовательных чисел.

б) Докажите, что существует бесконечно много таких пар.

Заметим, что из результата пункта б) задачи М2032 бесконечность множества таких пар получается автоматически: если $n - 1$ и $n + 1$ – антипростые числа, то n^2 и $n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$ – также, очевидно, антипростые.

3. Оба пункта нашей задачи связаны с так называемой **проблемой Каталана** (см. статью в этом номере журнала).

В.Сендеров

М2033. *У ведущего имеется колода из 52 карт. Зрители хотят узнать, в каком порядке лежат карты (не уточняя, сверху вниз или снизу вверх). Разрешается задавать ведущему вопросы вида «Сколько карт лежит между такой-то и такой-то картами?» Один из зрителей знает, в каком порядке лежат карты. Какое наименьшее число вопросов он должен задать, чтобы остальные зрители по ответам на эти вопросы могли узнать порядок карт в колоде?*

Ответ: за 34 вопроса.

Первый вопрос зритель задает про две крайние карты. Ответ 50 покажет всем, что они в самом деле крайние. Назовем любую из них 1-й (сверху или снизу – нам не важно), тогда другая – 52-я. Теперь уже надо дать возможность все остальные номера карт определить однозначно. Назовем 2-ю карту дыркой, и вторым вопросом спросим про две карты рядом с дыркой (т.е. 1-ю и 3-ю). Ответ 1 задает положение 3-й карты однозначно. Далее будем продолжать задавать вопросы парами: в нечетных вопросах называем две самые крайние карты из еще не упомянутых (одна из них была дыркой, другая – недыркой), назначаем новой дыркой ранее неупомянутую карту рядом с недыркой и следующим четным вопросом спрашиваем про две карты рядом с дыркой. Так, в первой паре вопросов «знающий» называет 1-ю, 52-ю и 3-ю карты, во второй – 2-ю, 51-ю и 49-ю карты, в третьей паре – 4-ю, 50-ю и 6-ю карты и т.д. Как видим, дырки по очереди возникают то ближе к началу, то ближе к концу. В отличие от первой тройки для каждой следующей тройки карт после ответов на очередную пару вопросов теоретически есть два возможных расположения: основное (то, что на самом деле) и побочное (крайние карты меняются местами, средняя передвигается соответственно). Так, из ответов на 3-й и 4-й вопросы следует, что вторая тройка карт – это 2, 51 и 49 либо, 2, 51 и 4. Эта неопределенность исчезнет, однако, после ответа на следующий (в примере – на 5-й) вопрос. Суть в том, что максимальное число карт между ранее не упомянутыми крайними картами в побочном варианте меньше, чем в основном (ниже карты одной тройки обозначены одной буквой, неопределенная – тройка С):

Основной abaC_C..........bCba

Побочный abaC...........CbCba

Так задаем 33 вопроса. Последний 34-й вопрос зададим про крайнюю и карту рядом с ней (25-ю и 26-ю) (предпоследняя и последняя тройки обозначены буквами p и Q соответственно):

abacdcefeghgijiklkmnmopoQQ_pQpnonlmljkjhihfgfdedbcba

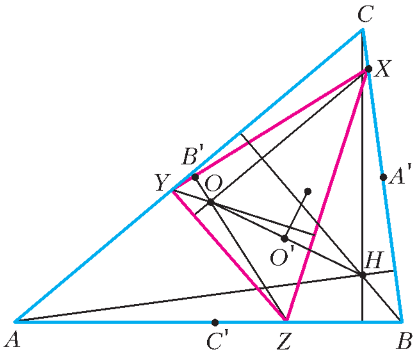
Тогда положение последней тройки и единственной оставшейся карты определится однозначно.

Покажем, что меньшим числом вопросов обойтись нельзя. Разобьем изначально все карты на 52 группы по одной карте. При вопросе про две карты из разных групп объединяем эти группы в одну. Каждый вопрос уменьшает число групп максимум на одну. Если задано не более 33 вопросов, то останется не менее 52 – 33 = = 19 групп. Среди них групп из 3 карт – не более 17. Значит, либо найдутся две группы по одной карте, либо группа из ровно двух карт. В обоих случаях можно эту пару карт поменять местами, не трогая остальных: все ответы не изменятся. Тем самым, порядок не восстанавливается однозначно.

А.Шаповалов

М2034. *На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC взяты точки X, Y, Z так, что треугольники ABC и XYZ подобны. Докажите, что центр описанной окружности треугольника XYZ равноудален от ортоцентров треугольников ABC и XYZ* [1].

[1] *В условии, опубликованном в «Кванте» №1, имеются неточности.*



Прежде всего отметим, что для любой точки X на стороне BC точки Y, Z определяются однозначно. Действительно, Z является пересечением AB и прямой, полученной из AC композицией поворота вокруг X на угол (ориентированный) BAC и гомотетии с центром X и коэффициентом AC/AB (см. рисунок). Пусть теперь O – центр описанной около ABC окружности, A', B', C' – середины BC, CA, AB. Тогда треугольник $A'B'C'$ подобен ABC, а O является его ортоцентром. Возьмем теперь на BC, CA, AB точки X, Y, Z, такие что углы XOA', YOB', ZOC' равны. Из подобия треугольников XOA', YOB', ZOC' следует, что треугольник XYZ получается из треугольника $A'B'C'$ композицией поворота вокруг O на угол XOA' и гомотетии с центром O и коэффициентом OX/OA'. Поэтому треугольник XYZ подобен ABC, а O – его ортоцентр. При описанной выше поворотной гомотетии центр O' описанной окружности $A'B'C'$ перейдет в центр описанной окружности XYZ, значит, центр описанной окружности XYZ лежит на прямой, проходящей через O' и перпендикулярной OO'. Но O' – это центр окружности девяти точек треугольника ABC, т.е. середина отрезка между его центром описанной окружности O и ортоцентром H. Следовательно, центр описанной окружности XYZ лежит на серединном перпендикуляре к OH, откуда и следует утверждение задачи.

А.Заславский

М2035. *а) На окружности расставлены несколько положительных чисел, каждое из которых не больше 1. Докажите, что числа можно разделить на три группы подряд идущих чисел так, чтобы суммы чисел в любых двух группах отличались не больше чем на 1. (Если в группе нет чисел, то сумма считается равной нулю.)*

б) На отрезке расставлены несколько положительных чисел, каждое из которых не больше 1. Докажите, что числа можно разделить на n групп подряд идущих чисел так, чтобы суммы чисел в любых двух группах отличались не больше чем на 1. (Если в группе нет чисел, то сумма считается равной нулю.)*

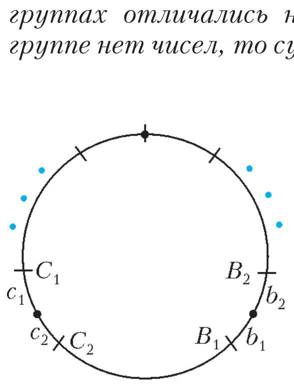


Рис. 1

а) Сделаем задачу более наглядной. Будем считать, что наша окружность имеет длину, равную сумме всех чисел. Разобьем ее на дужки, равные нашим числам (и идущие в том же порядке). Тогда нужно разрезать окружность по границам дужек на три дуги так, чтобы длины этих больших дуг различались не более чем на 1.

Отметим три точки на окружности так, чтобы они разделили ее на три равные дуги, причем одна из них попала на границу дужек (рис.1). Пусть остальные две точки разбили дужки, на которые они попали, на участки длины b_1, b_2 и c_1, c_2 соответственно ($b_1 + b_2 \le 1$, $c_1 + c_2 \le 1$; если точка попала на границу дужки, то соответствующее число равно нулю). Концы этих дужек обозначим соответствующими заглавными буквами. Покажем, что можно сместить каждую из отмеченных точек в один из концов соответствующей дужки так, чтобы все три дуги различались не больше чем на 1.

При смещении в точки C_1 и B_1 разность левой и правой дуг изменяется на $-c_1 - b_1$, а разности левой и правой дуг с нижней – на $(-c_1) - (-b_1 + c_1) = b_1 - 2c_1$ и $b_1 - (-b_1 + c_1) = 2b_1 - c_1$ соответственно. Таким образом, для того чтобы это смещение подходило, нужно выполнение системы неравенств

$$(B_1, C_1): \begin{cases} |b_1 + c_1| \le 1, \\ |2c_1 - b_1| \le 1, \\ |2b_1 - c_1| \le 1. \end{cases}$$

Записывая условия для сдвигов в остальные пары точек, получаем следующие системы:

$$(B_2, C_2): \begin{cases} |b_2 + c_2| \le 1, \\ |2c_2 - b_2| \le 1, \\ |2b_2 - c_2| \le 1; \end{cases}$$

$$(B_1, C_2): \begin{cases} |b_1 - c_2| \le 1, \\ |2c_2 + b_1| \le 1, \\ |2b_1 + c_2| \le 1; \end{cases}$$

$$(B_2, C_1): \begin{cases} |b_2 - c_1| \le 1, \\ |2c_1 + b_2| \le 1, \\ |2b_2 + c_1| \le 1. \end{cases}$$

Предположим, что ни одна из них не выполнена.

Рассмотрим первые две системы. Неравенства $b_1 + c_1 \le 1$ и $b_2 + c_2 \le 1$ не могут нарушаться одновременно, так как $b_1 + b_2 + c_1 + c_2 \le 2$. Поэтому будем считать, что $b_1 + c_1 \le 1$ и нарушается одно из двух других неравенств для (B_1, C_1). Поскольку эти случаи симметричны, будем считать, что $2c_1 > 1 + b_1$. Заметим, что тогда $0 \le b_1 + 2c_2 \le b_1 + 2(1 - c_1) = 2 - (2c_1 - b_1) < 1$, и первые два неравенства для (B_1, C_2) выполнены (первое выполнено всегда). Значит, $2b_1 + c_2 > 1$, откуда получаем

$$1 < 2b_1 + c_2 \le 2b_1 + 1 - c_1 < 2b_1 + 1 - \frac{1 + b_1}{2} = \frac{3b_1 + 1}{2},$$

т.е. $b_1 > \frac{1}{3}$, а тогда $c_1 > \frac{1 + b_1}{2} > \frac{2}{3}$. Но при этом $c_1 + b_1 > 1$, что противоречит нашему выбору. Утверждение доказано.

Замечание. Другое решение, разумеется, можно получить из решения пункта б).

б) Мы будем пользоваться тем же наглядным представлением – естественно, с заменой окружности на отрезок. Задача при этом переформулируется так. На отрезке отмечены несколько точек, причем расстояние между любыми двумя соседними не больше 1. Требуется доказать, что можно разрезать отрезок в $n-1$ точке из них так, что отрезок распадется на n отрезков, различающихся не больше чем на 1. (Разрез в точке можно сделать дважды; тогда одна из частей будет иметь нулевую длину.)

Заметим, что множество способов разреза конечно. Назовем каждый такой способ *разбиением*. Мы некоторым специальным образом выберем из этого множества одно разбиение и покажем, что оно подходит. Выбирать мы будем в несколько этапов, «сужая» область поиска.

1. Выберем все разбиения, в которых длина наибольшего получающегося отрезка – наименьшая возможная (обозначим эту длину через m).
2. Отберем из них те, в которых количество отрезков длины m минимально.
3. А из них – те, в которых минимально количество отрезков, меньших $m-1$.

Если это количество равно нулю – мы уже получили хорошее разбиение. Если нет, то продолжаем процедуру выбора.

4. Наконец, выберем такое разбиение, в котором между каким-нибудь отрезком длины m и каким-нибудь длины $< m-1$ находится минимальное возможное число отмеченных точек (включая их концы).

Рассмотрим пару отрезков: U с максимальной длиной m и V, длина которого меньше $m-1$, причем число точек k между ними минимально (рис.2).

Рис. 2

Пусть, без ограничения общности, U находится справа от V. Если $k=1$ (U находится непосредственно справа от V), то передвинем точку разреза между ними вправо. Тогда длина U уменьшится, а длина V останется меньше m, так как она увеличилась не больше чем на 1; следовательно, число отрезков длины m уменьшилось, что противоречит этапу 2 выбора.

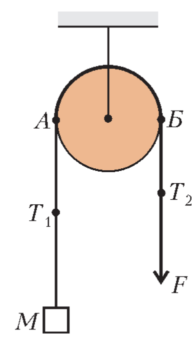
Пусть U и V – не соседние. Будем передвигать правую границу отрезка V вправо до тех пор, пока его длина не превысит $m-1$; так как длина отрезка W справа от него не меньше $m-1$, то этот момент наступит. При этом длина V остается меньше m; следовательно, максимальная длина отрезка или количество отрезков такой длины не могли увеличиться.

После сдвига границы исчез один отрезок длины $< m-1$. Значит, либо их количество уменьшилось, либо теперь отрезок W имеет длину, меньшую $m-1$. Но, очевидно, между W и U меньше точек, чем было между V и U – противоречие с этапом 4 выбора. Итак, если выбрать нужное разбиение не удалось, то мы пришли к противоречию, что и требовалось.

Замечание. На первый взгляд, можно было бы попытаться придумать решение, аналогичное решению пункта а): разбить отрезок на n равных частей, а затем попытаться сдвинуть каждую из точек разбиения в одну из двух ближайших отмеченных точек. Однако авторам известен пример (при достаточно больших n), в котором при любом таком сдвиге найдутся два отрезка разбиения с разностью, большей 1 (а оптимальное разбиение устроено другим образом). Мы предоставляем читателю попытаться самостоятельно построить такой пример.

И.Богданов, Г.Челноков

Ф2043. *Груз массой 3 кг поднимают и опускают при помощи легкой нити и блока, ось которого закреплена неподвижно. Однажды блок «заело» – он перестал вращаться вокруг своей оси. При этом удается поднимать груз силой 40 Н, приложенной к свободному концу нити, и груз в этом случае движется вверх с постоянной скоростью. Какой груз нужно подвесить к свободному концу нити, вместо того чтобы тянуть нить, чтобы груз массой 3 кг двигался с той же скоростью вниз? Трение между нитью и блоком – сухое, коэффициент трения не зависит от прижимающего усилия.*



При равномерном движении груза массой M вверх сила натяжения нити слева от блока $T_1 = Mg$, справа $T_2 = F$ (см. рисунок). Разница этих сил определяется силой трения нити о «заевший» блок и пропорциональна средней силе прижима нити к поверхности блока:

$$F - Mg = \alpha \frac{F + Mg}{2}.$$

Принимая $g = 10\ \text{м/с}^2$, получим

$$\alpha = \frac{2(F - Mg)}{F + Mg} = \frac{2(40-30)\ \text{Н}}{(40+30)\ \text{Н}} = \frac{2}{7}.$$

Во втором случае груз массой M равномерно опускается под воздействием подвешенного груза массой m. При этом силы натяжения нити равны $T_1^* = Mg$ и $T_2^* = mg$ слева и справа от блока соответственно. Тогда

$$Mg - mg = \alpha \frac{Mg + mg}{2},$$

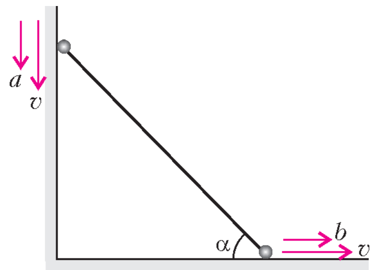
откуда находим искомую массу груза:

$$m = \frac{2-\alpha}{2+\alpha} M = \frac{3}{4} M = 2{,}25\ \text{кг}.$$

Кстати, точное решение (учитывающее изменение прижимающей силы от точки $А$ до точки $Б$ – вместо расчета по «средней силе прижима») дает такой же ответ.

А.Блоков

Ф2044. *Гантелька состоит из тонкого легкого стержня длиной L и двух одинаковых маленьких шариков массой M каждый на концах стержня. В начальный момент гантелька стоит в углу комнаты вертикально, опираясь на пол и вертикальную стену. От очень малого толчка гантелька начинает двигаться, при этом один из концов скользит по полу, а другой



продолжает касаться стены. Найдите силы, с которыми гантелька действует на пол и стену в тот момент, когда она составляет угол 45° с вертикалью. Трения нет.

Обозначим скорость верхнего шарика v, ускорение в интересующей нас точке пусть будет a (см. рисунок). При значении угла $\alpha = 45°$ с горизонтом нижний шарик имеет такую же скорость v, а ускорение его обозначим b. Из закона сохранения энергии следует

$$\frac{Mv^2}{2}+\frac{Mv^2}{2}=MgL\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

или

$$v^2=gL\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Зададим очень малый интервал времени τ. Скорости шариков изменятся на очень малые величины $\Delta v_{\text{верт}}=a\tau$ и $\Delta v_{\text{гориз}}=b\tau$. Снова применим закон сохранения энергии:

$$Mg\cdot v\tau=\left(\frac{M\left(v+\Delta v_{\text{верт}}\right)^2}{2}-\frac{Mv^2}{2}\right)+\left(\frac{M\left(v+\Delta v_{\text{гориз}}\right)^2}{2}-\frac{Mv^2}{2}\right),$$

откуда

$$gv=va+\frac{a^2\tau}{2}+vb+\frac{b^2\tau}{2},$$

или при малом τ

$$a+b=g.$$

За малое время τ угол α немного уменьшится, найдем его тангенс:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\left(L/\sqrt{2}\right)-v\tau}{\left(L/\sqrt{2}\right)+v\tau}=\frac{v_{\text{гориз}}}{v_{\text{верт}}}=\frac{v+b\tau}{v+a\tau}.$$

Отсюда получим

$$\frac{L}{\sqrt{2}}v+\frac{L}{\sqrt{2}}a\tau-v^2\tau-av\tau^2=\frac{L}{\sqrt{2}}v+\frac{L}{\sqrt{2}}b\tau+v^2\tau+bv\tau^2.$$

После очевидных упрощений запишем

$$\frac{L}{\sqrt{2}}(a-b)=2v^2,$$

или

$$a-b=2g\left(\sqrt{2}-1\right).$$

Решая полученные для a и b уравнения, найдем

$$a=g\frac{2\sqrt{2}-2+1}{2}=g\left(\sqrt{2}-0{,}5\right)\approx 0{,}91g,$$

$$b=g\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)\approx 0{,}09g.$$

Найти силу Q со стороны вертикальной стены и силу N со стороны пола проще всего, записав уравнения второго закона Ньютона для центра масс гантельки (чтобы не связываться с величиной силы натяжения стержня):

$$Q=M\cdot 0+Mb=Mg\left(1{,}5-\sqrt{2}\right),$$

$$2Mg-N=M\cdot 0+Ma,$$

откуда

$$Q=Mg\left(1{,}5-\sqrt{2}\right),$$

$$N=2Mg-Ma=Mg\left(2{,}5-\sqrt{2}\right).$$

Можно было заранее проверить, не оторвется ли гантелька от вертикальной стены раньше, чем угол α уменьшится от 90° до 45°. Но это не обязательно – силу Q мы получили положительную.

А.Зильберман

Ф2045. *Массивный клин с углом 60° при основании может двигаться по гладкому горизонтальному столу. На наклонной поверхности клина находится маленькая тележка. Когда тележка едет по неподвижному клину – мы его удерживаем, приложив к нему горизонтальную силу, – она давит на его поверхность силой f. Увеличим горизонтальную силу, действующую на клин, так, чтобы он двигался по горизонтали с постоянным ускорением. Найдите величину этой силы, если известно, что сила, с которой тележка давит на поверхность клина, стала вчетверо больше по величине. Масса клина в 5 раз больше массы тележки.*

Обозначим массу тележки m, массу клина M. При неподвижном клине сила давления тележки на клин (она равна по величине силе нормальной реакции, действующей на тележку со стороны клина; рис.1) равна $f=mg\cos\alpha$. Пусть ускорение клина направлено влево и составляет a (рис.2). Ускорение тележки удобно

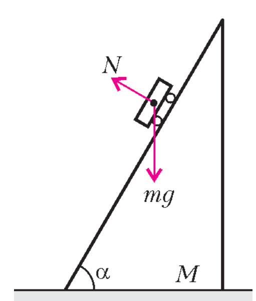


Рис. 1

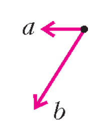


Рис. 2

представить в виде суммы двух векторов – ускорения вместе с клином $\vec{a}$ и ускорения относительно клина $\vec{b}$, при этом вектор $\vec{b}$, его нас не просили находить, составляет угол α с горизонталью. Запишем уравнение второго закона Ньютона для тележки в перпендикулярном к $\vec{b}$ направлении:

$$4f-mg\cos\alpha=ma\sin\alpha,$$

откуда для ускорения клина получим

$$a=\frac{4f-mg\cos\alpha}{m\sin\alpha}=3g\operatorname{ctg}\alpha=\sqrt{3}g.$$

Для клина в горизонтальном направлении запишем

$$F - 4f\sin\alpha = Ma,$$

откуда найдем искомую силу:

$$F = 4f\sin\alpha + Ma = 4f\sin\alpha + 5mg\sqrt{3} =$$

$$= f\left(4\sin\alpha + \frac{5\sqrt{3}}{\cos\alpha}\right) = 12\sqrt{3}f.$$

З.Рафаилов

Ф2046. *В двух одинаковых сосудах находятся одинаковые массы кислорода и гелия. Давление кислорода 1 атм, давление гелия 2 атм. Сосуды соединяют тонкой трубкой, и газы перемешиваются. Каким станет давление в системе после установления равновесия? Теплообмен с окружающей средой пренебрежимо мал. Молярная масса кислорода 32 г/моль, гелия 4 г/моль.*

При одинаковых массах кислорода и гелия их количества вещества связаны соотношением $\nu_2 = 8\nu_1$. С учетом того, что $p_2 = 2p_1$, для температур получим $T_1 = 4T_2$. При смешивании газов суммарная внутренняя энергия остается неизменной (теплообмена нет, работа внешних сил равна нулю). Тогда запишем

$$U = \frac{5}{2}R\nu_1T_1 + \frac{3}{2}R\nu_2T_2 = \frac{5}{2}R\nu_1T_x + \frac{3}{2}R\nu_2T_x.$$

Отсюда найдем установившуюся температуру T_x:

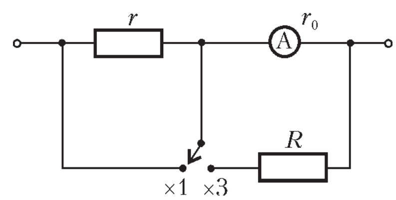
$$T_x = \frac{5\nu_1T_1 + 3\nu_2T_2}{5\nu_1 + 3\nu_2} = \frac{11}{29}T_1.$$

Установившееся же давление будет равно

$$p = \frac{(\nu_1+\nu_2)RT_x}{2V} = \frac{\nu_1RT_1}{V}\frac{9\cdot11}{2\cdot29} \approx 1{,}7p_1 = 1{,}7 \text{ атм}.$$

А.Повторов

Ф2047. *Многопредельный ампер-вольтметр для измерений в цепях постоянного тока сделан на основе точного микроамперметра с током полного отклонения 100 мкА и сопротивлением 850 Ом. При помощи многопозиционного переключателя к нему подключаются точно подобранные резисторы – добавочные сопротивления для измерения напряжений и шунты для измерения токов. Пределы измерения напряжений 1 В, 10 В и 100 В, пределы измерения токов 1 мА, 10 мА и 100 мА. Хотелось бы иметь более «подробные» пределы измерений, но кардинально переделывать точный и удобный прибор совсем не хочется. На передней панели прибора есть отдельный, не используемый для его работы переключатель на два положения – у переключателя три контакта. В одном его положении соединены между собой контакты 1 и 2, а контакт 3 отключен, при другом положении отключен контакт 2, а соединены контакты 1 и 3. Придумайте и рассчитайте простую схему, которая позволяла бы «растянуть» шкалы прибора ровно в три раза на всех пределах измерения (шкала измерения напряжений 10 В превращается в 30 В, шкала измерения токов 1 мА – в 3 мА и т.д.) в одном из положений этого переключателя, а в другом положении все должно оставаться «как было». Кстати, эти положения переключателя можно обозначить ×1 и ×3.*



Самая простая из всех возможных схем (попробуйте решить проблему попроще – ничего у вас не выйдет!) приведена на рисунке. Ясно, что

$$R = \frac{1}{2}r_0, \text{ а } r + \frac{r_0R}{r_0+R} = r_0, \text{ т.е. } r = \frac{2}{3}r_0.$$

Итак,

$$R = \frac{1}{2}r_0 = 425 \text{ Ом}, \quad r = \frac{2}{3}r_0 \approx 567 \text{ Ом}.$$

Р.Александров

КОЛЛЕКЦИЯ ГОЛОВОЛОМОК

Головоломка «Дельта»

(Начало см. на 2-й с. обложки)

С головоломкой «Дельта» молодая изобретательница Ирина Новичкова в 2006 году ездила на съезд любителей головоломок в Бостон, США. Приехавшие туда знатоки не смогли «с ходу» решить задачу Ирины, и более ста экземпляров игрушки участники соревнований увезли в разные страны мира в надежде, что дома им «стены помогут» одолеть головоломку из России. На самом деле, в Бостоне просто некогда было решать трудные задачки.

Чтобы сделать головоломку «Дельта», нужно взять 12 одинаковых пластинок квадратного сечения и толщиной, равной половине ширины пластинки.

Каждую деталь головоломки склеивают из двух пластинок со срезанными двумя способами углами. У шести пластинок отрезают углы наискосок так, чтобы одно из оснований имело форму пятиугольника, а шесть остальных пластинок разрезают наискосок по диагонали (см. фото на 2-й с. обложки). Получают 12 заготовок двух видов. Их склеивают попарно так, чтобы получить шесть деталей головоломки двух разных конфигураций – по три каждого вида.

После этого остается склеить из плотной бумаги или тонкого картона шестигранную коробочку, и головоломка готова к решению. Длина каждой из шести боковых сторон коробочки должна быть в 3,5 раза больше толщины пластинки, а высота коробки – больше в 2,5 раза.

А.Калинин