Посмотрим сквозь линзу

В.ДРОЗДОВ

Среди конкурсных задач по оптике довольно заметную часть составляют задачи, в которых фигурирует тонкая линза. Это естественно, поскольку линзы присутствуют в самых разных оптических приборах. Нередко такие задачи вызывают трудности. Однако, если проанализировать возможные варианты расположения предмета и его изображения в линзе и систематизировать полученные результаты в виде графиков и таблиц, то можно значительно облегчить решение целой группы задач. Достаточно будет лишь составить уравнение или систему уравнений, решение которых это уже чисто математическая проблема.

Введем такие обозначения: F – фокусное расстояние линзы, d и f – расстояния от предмета и его изображения до линзы, h и H – высоты предмета и его изображения соответственно. Все перечисленные величины будем, естественно, считать положительными, как длины отрезков (это удобно при решении задач), а знак «минус» будет появляться перед ними только по законам алгебры.

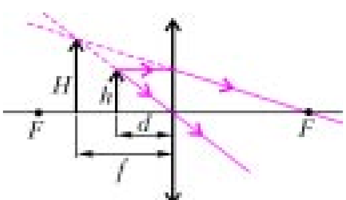

Рис. 1

Начинаем с собирающей линзы. Поскольку предмет может находиться как перед фокусом линзы, так и за ним, эти два случая будем рассматривать отдельно.

Пусть $0 < d < F$ (рис.1). Выражая двояко увеличение линзы $\frac{H}{d}$, записываем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{H}{h} = \dfrac{f}{d}, \\ \dfrac{H}{h} = \dfrac{F+f}{F}. \end{cases}$$

Отсюда можно получить формулу линзы:

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = \frac{1}{F},$$

а также расстояние от изображения до линзы и увеличение линзы:

$$f = \frac{Fd}{F-d} \quad \text{и} \quad \frac{H}{h} = \frac{F}{F-d}.$$

Интересно определить расстояние l между предметом и его изображением в этом случае:

$$l = f - d = \frac{d^2}{F-d}.$$

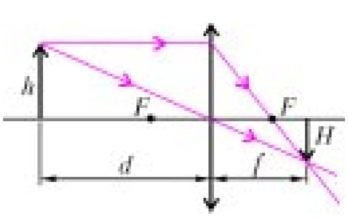

Рис. 2

Пусть теперь $F < d < \infty$ (рис.2). Аналогично, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{H}{h} = \dfrac{f}{d}, \\ \dfrac{H}{h} = \dfrac{f-F}{F}, \end{cases}$$

из которой получаем формулу линзы:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$$

и выражения для f и $\frac{H}{h}$:

$$f = \frac{Fd}{d-F} \quad \text{и} \quad \frac{H}{h} = \frac{F}{d-F}.$$

В данном случае расстояние между предметом и его изображением равно

$$l = f + d = \frac{d^2}{d-F}.$$

Графики зависимости f, $\frac{H}{h}$ и l от d приведены, соответственно, на рисунках 5, *а*, *б* и *в*. Обсудим эти графики с

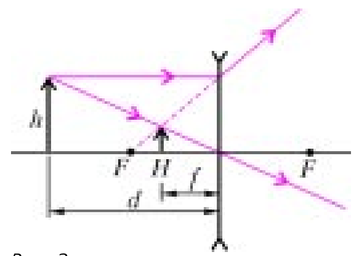

Рис. 3

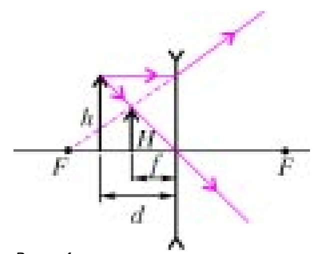

Рис. 4

математической точки зрения. Все три кривые имеют вертикальную асимптоту $d = F$, так как они терпят разрыв в этой точке. Первые две кривые имеют еще горизонтальные асимптоты: соответственно, $f = F$ и $\frac{H}{h} = 0$, а третья кривая – наклонную под углом 45° к горизонтальной оси асимптоту $l = d + F$. Последнее следует вот откуда:

$$l = \frac{d^2}{d-F} = \frac{d^2 - F^2}{d-F} + \frac{F^2}{d-F} = d + F + \frac{F^2}{d-F}.$$

Кривые, изображенные на рисунках 5, *а* и *б*, – это участки гиперболы, так как, например,

$$f = \frac{Fd}{d-F} = \frac{(d-F)F + F^2}{d-F} = F + \frac{F^2}{d-F}.$$

Третья же кривая – более сложная и гиперболой не является, что ясно из ее уравнения. При $F < d < 2F$ эта функция имеет точку минимума $(2F;\ 4F)$, в которой достигается ее наименьшее значение на этом интервале. Это можно, конечно, установить общим методом с помощью производной. Однако интересны такие два частных способа.

Первый способ. Преобразуем выражение для l:

$$l = \frac{d^2}{d-F} = \frac{1}{\dfrac{1}{d} - F\cdot\dfrac{1}{d^2}} = \frac{1}{-F\left(\dfrac{1}{d^2} - F\cdot\dfrac{1}{d}\right)} =$$

$$= \frac{1}{-F\left(\left(\dfrac{1}{d} - \dfrac{1}{2F}\right)^2 - \dfrac{1}{4F^2}\right)} = \frac{1}{\dfrac{1}{4F} - F\left(\dfrac{1}{d} - \dfrac{1}{2F}\right)^2}.$$

Отсюда следует, что $l_{\min} = 4F$ при $d = 2F$.

Второй способ. Запишем выражение для l в виде квадратного уравнения

$$d^2 - ld + lF = 0.$$

Так как оно, исходя из физических соображений, имеет решение, то его дискриминант неотрицательный: $l^2 - 4lF \geq 0$

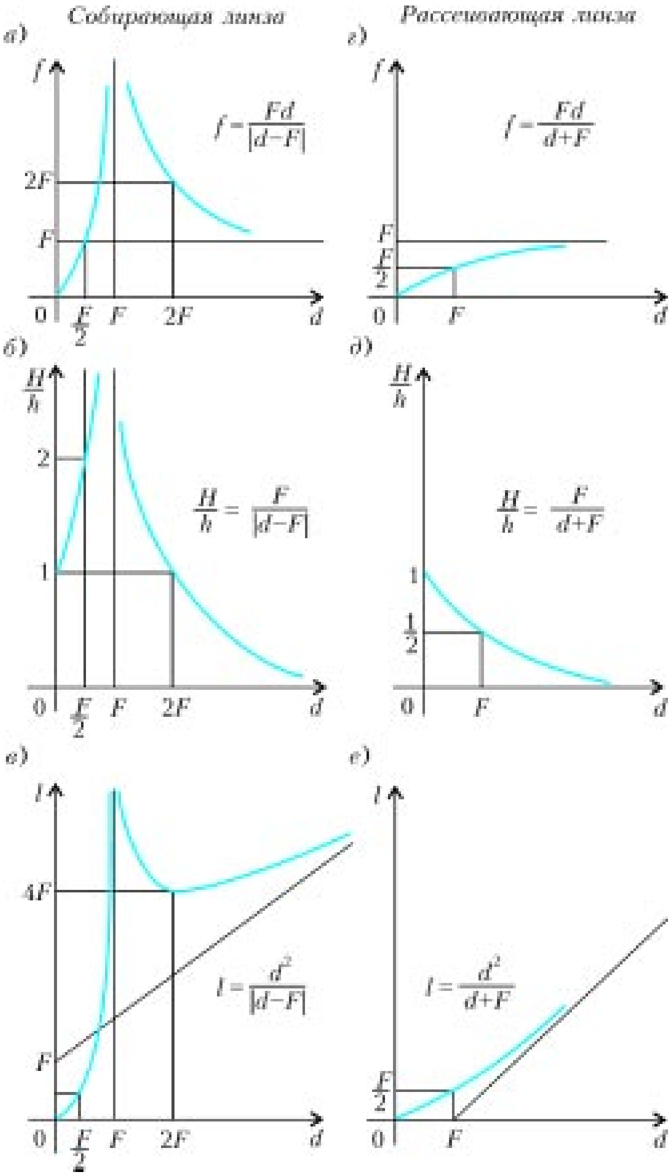

Рис. 5

(равенство достигается при $d = \frac{l}{2}$). Значит, $l \geq 4F$, т.е. $l_{\min} = 4F$ при $d = 2F$.

Отметим, что если $d = 2F$, то $f = 2F$ и $H = h$. Это означает, что изображение получается в натуральную величину.

Рассмотрим теперь рассеивающую линзу. Из рисунков 3 и 4 видно, что, независимо от того, находится предмет перед фокусом линзы или за ним, получается одна и та же система уравнений

$$\begin{cases} \frac{H}{h} = \frac{f}{d}, \\ \frac{H}{h} = \frac{F-f}{F}. \end{cases}$$

Отсюда получаем формулу рассеивающей линзы:

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = -\frac{1}{F},$$

расстояние от линзы до изображения и увеличение линзы:

$$f = \frac{Fd}{d+F} \quad \text{и} \quad \frac{H}{h} = \frac{F}{d+F}.$$

Заметим, что рассеивающая линза всегда дает уменьшенное изображение, т.е. $\frac{H}{h} < 1$. Расстояние между предметом и его изображением в этом случае равно

$$l = d - f = \frac{d^2}{d+F}.$$

Строим соответствующие графики для рассеивающей линзы (рис.5, *г*, *д* и *е*). В отличие от первой тройки графиков на рисунке 5, вторая тройка представляет собой непрерывные кривые. При этом кривые для f и $\frac{H}{h}$ — это тоже части гипербол с горизонтальными асимптотами $f = F$ и $\frac{H}{h} = 0$ соответственно. Кривая для l более сложная и имеет наклонную под углом 45° к горизонтальной оси асимптоту $l = d - F$, ибо

$$\frac{d^2}{d+F} = \frac{d^2 - F^2}{d+F} + \frac{F^2}{d+F} = d - F + \frac{F^2}{d+F}.$$

Представляется полезным все сказанное свести в соответствующую таблицу.

Теперь переходим к рассмотрению конкретных задач. Все они в свое время предлагались на вступительных экзаменах в различные вузы.

Задача 1. *Предмет и его прямое изображение расположены симметрично относительно фокуса линзы. Расстояние от предмета до фокуса линзы l = 4 см. Найдите фокусное расстояние линзы.*

Допустим, что линза собирающая. Очевидно, что при этом $0 < d < F$, т.е. изображение мнимое, поскольку оно прямое. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} f = \frac{Fd}{F-d}, \\ f - F = F - d, \\ f - F = l. \end{cases}$$

Таблица

Линза	Расстояние предмета от линзы, d	Формула линзы	Расстояние изображения от линзы, f	Вид изображения	Расположение изображения	Увеличение линзы, $\frac{H}{h}$	Расстояние между предметом и его изображением, l
собирающая	$0 < d < F$	$\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$	$\frac{Fd}{F-d}$	мнимое	прямое	$\frac{F}{F-d} > 1$	$\frac{d^2}{F-d}$
	$F < d < \infty$	$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$	$\frac{Fd}{d-F}$	действительное	перевернутое	$\frac{F}{d-F} \gtrless 1$	$\frac{d^2}{d-F}$
рассеивающая	$0 < d < \infty$	$\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = -\frac{1}{F}$	$\frac{Fd}{d+F}$	мнимое	прямое	$\frac{F}{d+F} < 1$	$\frac{d^2}{d+F}$

Выразим из второго и третьего уравнений f и d через F и l и подставим в первое. Получим уравнение

$$F^2 - 2lF - l^2 = 0$$

с искомым положительным корнем

$$F = l\left(1+\sqrt{2}\right) \approx 9{,}66 \text{ см}.$$

Если линза рассеивающая, то приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} f = \dfrac{Fd}{d+F}, \\ d - F = F - f, \\ d - F = l. \end{cases}$$

Результат — то же уравнение

$$F^2 - 2lF - l^2 = 0.$$

Таким образом, задача имеет одно решение, но в двух случаях: собирающей и рассеивающей линз.

Задача 2. *Предмет находится на расстоянии $d = 10$ см от собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 20$ см. Во сколько раз изменится величина изображения, если на место собирающей линзы поставить рассеивающую с тем же по модулю фокусным расстоянием?*

Отношение величин изображений равно, очевидно, отношению увеличений:

$$H_2 : H_1 = \frac{F}{d+F} : \frac{F}{F-d} = \frac{F-d}{d+F} = \frac{1}{3}.$$

Задача 3. *Расстояние между предметом, находящимся на оптической оси линзы, и его действительным изображением равно $l = 6{,}25F$, где F − фокусное расстояние линзы. Найдите расстояние от предмета до линзы и от линзы до изображения. Как объяснить наличие двух решений?*

Так как изображение действительное, то линза собирающая и $d > F$. Поэтому уравнение

$$\frac{d^2}{d-F} = 6{,}25F$$

приводит к квадратному уравнению

$$4d^2 - 25Fd + 25F^2 = 0$$

с корнями

$$d_1 = 5F \text{ и } d_2 = 1{,}25F.$$

Соответственно, получаем

$$f_1 = 6{,}25F - 5F = 1{,}25F \text{ и } f_2 = 6{,}25F - 1{,}25F = 5F.$$

Существование двух решений физически вытекает из обратимости световых лучей. С математической точки зрения, оба корня подходят, так как они удовлетворяют условию $d > F$.

Задача 4. *Какова оптическая сила линзы, с помощью которой можно получить увеличенное или уменьшенное изображение предмета на экране, находящемся от него на расстоянии $L = 0{,}9$ м, если отношение размеров получаемых изображений $\alpha = 4$?*

Поскольку мнимое изображение нельзя получить на экране, то изображение в обоих случаях действительное. Тогда $d > F$. Но, учитывая, что $\alpha > 1$, приходим к такому выводу:

$$F < d_1 < 2F, \quad 2F < d_2 < \infty,$$

где d_1 − меньший, а d_2 − больший корень уравнения

$$\frac{d^2}{d-F} = L.$$

Кроме того,

$$\frac{d_2 - F}{d_1 - F} = \alpha.$$

Очевидно, получаем уравнение

$$\frac{L/2 + \sqrt{L^2/4 - FL} - F}{L/2 - \sqrt{L^2/4 - FL} - F} = \alpha.$$

Сначала уничтожаем иррациональность в знаменателе:

$$\frac{\left(L/2 - F + \sqrt{L^2/4 - FL}\right)^2}{F^2} = \alpha.$$

Затем извлекаем арифметический корень:

$$\frac{L}{2} - F + \sqrt{\frac{L^2}{4} - FL} = F\sqrt{\alpha}, \text{ или}$$

$$\sqrt{\frac{L^2}{4} - FL} = F\left(1+\sqrt{\alpha}\right) - \frac{1}{2}L.$$

После возведения последнего уравнения в квадрат оно существенно упрощается:

$$F^2\left(1+\sqrt{\alpha}\right)^2 = FL\sqrt{\alpha},$$

откуда получаем

$$F = \frac{L\sqrt{\alpha}}{\left(1+\sqrt{\alpha}\right)^2}.$$

Тогда искомая оптическая сила линзы равна

$$D = \frac{1}{F} = \frac{\left(1+\sqrt{\alpha}\right)^2}{L\sqrt{\alpha}} = 5 \text{ дптр}.$$

Задача 5. *Расстояние от заднего фокуса собирающей линзы до изображения в 9 раз больше расстояния от переднего фокуса до предмета. Найдите увеличение линзы.*

Если $d < F$, то имеем систему уравнений

$$\begin{cases} f + F = 9(F-d), \\ f = \dfrac{Fd}{F-d}, \\ \Gamma = \dfrac{F}{F-d}, \end{cases}$$

где Γ − искомое увеличение. Исключая f из первых двух уравнений, получим уравнение

$$9d^2 - 18Fd + 8F^2 = 0$$

с удовлетворяющим нас корнем $d = \frac{2}{3}F$. Тогда $\Gamma = 3$.

Если $d > F$, то приходим к системе

$$\begin{cases} f - F = 9(d-F), \\ f = \dfrac{Fd}{d-F}, \\ \Gamma = \dfrac{F}{d-F}, \end{cases}$$

из которой получим такое же уравнение

$$9d^2 - 18Fd + 8F^2 = 0$$

с подходящим бóльшим корнем $d = \frac{4}{3}F$. И опять $\Gamma = 3$.

Таким образом, задача имеет одно решение, реализуемое в двух случаях: $d_1 = \frac{2}{3}F$ и $d_2 = \frac{4}{3}F$. В этом легко убедиться, построив два раза ход лучей.

Обратите внимание, что при решении задач графики и таблица избавили нас от необходимости делать дополнительные чертежи.

В заключение приведем задачи для самостоятельного решения.

Упражнения

1. Точечный источник света находится на оси тонкой собирающей линзы. Расстояние между источником и ближайшим к нему фокусом l, расстояние между источником и его изображением L. Определите фокусное расстояние линзы.

2. Найдите фокусное расстояние собирающей линзы, если произведение расстояния от предмета до переднего фокуса на расстояние от заднего фокуса до изображения равно a^2.

3. Расстояние между предметом и его прямым изображением в линзе $l = 5$ см. Линейное увеличение $\Gamma = 0{,}5$. Определите фокусное расстояние линзы.

4. Линзу, дающую действительное изображение предмета, передвинули на расстояние, равное ее фокусному расстоянию. При этом получилось мнимое изображение того же размера. Найдите увеличение линзы.

5. Расстояние между предметом и его изображением, даваемым тонкой положительной линзой, равно $0{,}5F$, где F – фокусное расстояние линзы. Каким будет это изображение – действительным или мнимым?

6. Расстояние между предметом, находящимся на оптической оси рассеивающей линзы, и его изображением равно F, где $F > 0$ – модуль фокусного расстояния линзы. Найдите расстояние от предмета до линзы.

7. Найдите фокусное расстояние собирающей линзы, если при изменении расстояния от предмета до линзы, равного первоначально 0,3 м, на 0,1 м расстояние от линзы до действительного изображения предмета увеличивается вдвое.

8. Расстояние от освещенного предмета до экрана $l = 100$ см. Линза, помещенная между ними, дает четкое изображение предмета на экране при двух положениях, расстояние между которыми $L = 20$ см. Найдите фокусное расстояние линзы.

9. Когда предмет находился в точке A, тонкая собирающая линза давала увеличение $\Gamma_1 = 2$, а когда предмет переместили в точку B, увеличение стало $\Gamma_2 = 3$. Каким будет увеличение, если предмет поместить в середину отрезка AB? Предмет расположен перпендикулярно главной оптической оси линзы, изображение действительное.

10. С помощью линзы на экране получено изображение предмета с увеличением 2. Каким будет увеличение, если расстояние между предметом и экраном увеличить в 1,6 раза?

Иррациональность и квадратный трехчлен

В.ГОЛУБЕВ

В 1990 ГОДУ НА ФАКУЛЬТЕТЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ и кибернетики МГУ им. М.В.Ломоносова была предложена задача:

Решите неравенство

$$\sqrt{9v^2 - 48v - 21} + \sqrt{9v^2 - 51v - 15} \le |3v - 6|. \qquad (1)$$

В данной статье рассматриваются различные способы решения этой задачи.

Прямое решение

Стандартный способ решения иррациональных неравенств – это последовательное возведение в квадрат обеих частей неравенства с целью освобождения от корней. Такой способ сопровождается большой технической работой и требует серьезных усилий и терпения. В дальнейшем решение задачи подобным образом будем называть «прямым».

Обычно задачу, допускающую прямое решение, относят к разряду стандартных, сложность решения которых в основном определяется затратами времени на получение ответа.

Рассмотрим прямое решение неравенства (1). Обе части неравенства неотрицательны. Поэтому, возводя их в квадрат, переходим к равносильному неравенству

ВВ $$9v^2 - 48v - 21 + 2\sqrt{9v^2 - 48v - 21}\,\sqrt{9v^2 - 51v - 15} + 9v^2 - 51v - 15 \le \left(|3v - 6|\right)^2. \qquad (2)$$

Комментарий 1. В неравенстве (2) произведение корней сознательно не преобразовано в корень из произведения, поскольку выражения $\sqrt{x}\,\sqrt{y}$ и $\sqrt{xy}$ предъявляют различные ограничения на переменные x и y.

Так как $|m|^2 = m^2$, то $\left(|3v - 6|\right)^2 = (3v - 6)^2$, и неравенство (2) принимет вид

$$2\sqrt{9v^2 - 48v - 21}\,\sqrt{9v^2 - 51v - 15} \le -9v^2 + 63v + 72. \qquad (3)$$

После возведения в квадрат обеих частей этого неравенства получаем

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} v^2 - 7v - 8 \le 0, \\ 3v^2 - 16v - 7 \ge 0, \\ 3v^2 - 17v - 5 \ge 0, \\ 27v^4 - 270v^3 + 647v^2 - 212v - 436 \le 0. \end{cases} \qquad (4)$$

Многочлен в левой части последнего неравенства системы (4) при $v = 2$ обращается в ноль. Поэтому он разлагается на множители:

$$27v^4 - 270v^3 + 647v^2 - 212v - 436 = (v - 2)\left(27v^3 - 216v^2 + 215v + 218\right). \qquad (5)$$

Второй множитель в правой части этого равенства также обращается в ноль при $v = 2$, что позволяет и его разложить в произведение:

$$27v^3 - 216v^2 + 215v + 218 = (v - 2)\left(27v^2 - 162v - 109\right). \qquad (6)$$