Физика таранного устройства

С.СЕРОХВОСТОВ, А.ХИЩЕНКО

Что ни говорите, а в средние века было хотя и страшновато, но интересно. Толстые стены крепостей, большие запасы воды и продовольствия – все это делало военное ремесло искусством, а штурм крепости – долгим и кропотливым занятием.

Вот, например, типичная сцена штурма: дюжина широкоплечих молодцов подхватывает бревно, разбегается и … ворота крепости лишь вздрогнули и заскрипели в петлях. А вечером у воеводы состоялся неприятный разговор. Самый отчаянный из молодцов заявил прямо, что с таким бревном они на таран больше не пойдут. И призадумался тут воевода, закручинился.

Подумаем и мы, можно ли на основе наших знаний получить «законы функционирования» и оптимальные параметры тарана.

Сначала проанализируем конструкцию ворот и принцип действия тарана (рис.1). Пусть ворота состоят из двух створок (воротин) длиной L и массой M. Ворота висят на петлях (возможно, несмазанных и скрипящих) и запираются при помощи поперечины-бруса, который закрепляется на створках вблизи своих концов. Бревно (таран) массой m со скоростью v ударяется в ворота. В результате удара створки приобретают некоторую угловую скорость ω относительно своих петель, и, кроме того, петлям передается определенный импульс, т.е. происходит удар. Затем, по мере того как воротины в процессе вращения отклоняются от своего положения равновесия, запирающий брус изгибается и все больше препятствует их дальнейшему отклонению. Чем больше изгибается брус, тем большие механические напряжения в нем возникают. Если напряжение в какой-либо точке бруса окажется больше предела прочности материала, брус сломается. В конечном итоге в процессе ударов разрушается либо поперечина, либо место закрепления поперечины, либо точки крепления ворот к петлям, либо сами петли (или же реализуется сразу несколько вариантов).

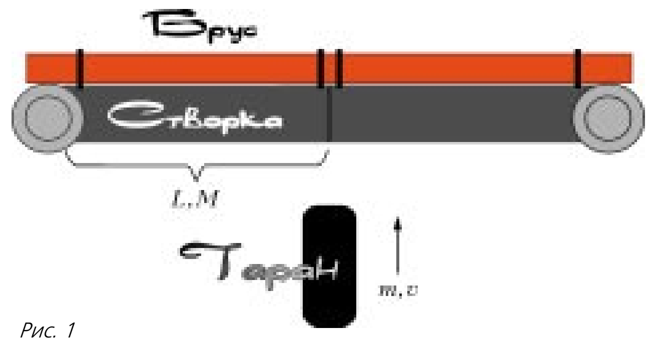

Рис. 1

Чтобы как-то оценить эффект удара, введем некий критерий эффективности. Для этого сначала исследуем возможные причины разрушений в результате удара. За счет кинетической энергии, которую приобретают створки после удара, будет происходить изгиб и слом бруса и разрушение точек его крепления. Так как кинетическая энергия ворот монотонно зависит от угловой скорости ω и большей энергии соответствует больший разрушительный эффект, то разумно в качестве критерия эффективности удара выбрать именно ω.

Разрушительный эффект в процессе удара, очевидно, будет пропорционален изменению импульса системы Δp, который передается через петли и их крепления на стены крепости. Трудно заранее сказать, от каких параметров и как оно зависит, поэтому сначала найдем зависимость изменения

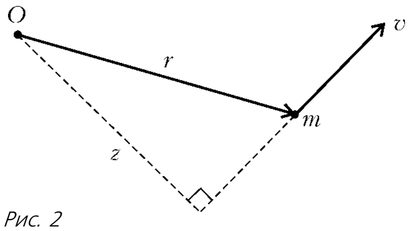

Рис. 2

импульса системы от начальной скорости бревна и параметров бревна и ворот.

Итак, нужно найти ω и Δp. Сам процесс удара достаточно сложен для физического и математического описания, а нам в конечном итоге нужно знать лишь значения искомых величин *после* удара. Поэтому, как всегда в задачах на удар, будем использовать законы сохранения. Очевидно, что с практической точки зрения крайне нежелательны пустые потери механической энергии в процессе удара. Например, если бревно при ударе трескается или сминается, то это невыгодно штурмующим (они такое бревно просто не будут использовать). Если же трескаются и сминаются ворота, то это невыгодно обороняющимся (тогда и наше исследование теряет смысл – несколько ударов тараном проделают в воротах дыру). Таким образом, будем считать, что таран и ворота достаточно крепкие и механическая энергия при ударе сохраняется. Значит, одно уравнение у нас уже есть – закон сохранения энергии. Однако неизвестными в нем будут две величины – угловая скорость створок ворот и скорость бревна после удара (ведь после абсолютно упругого удара бревно в общем случае должно иметь некоторую скорость).

Хотелось бы в качестве второго уравнения записать закон сохранения импульса, но он, к сожалению, не сохраняется: система ворота – бревно не является замкнутой, так как ворота связаны со стенами крепости и могут передавать им или получать от них импульс в процессе удара. Но, к счастью, есть еще одна величина, которая может сохраняться, – момент импульса. Возможно, не все читатели с ней знакомы, поэтому скажем об этой величине несколько слов.

Если на плоскости заданы материальная точка массой m, ее скорость $\vec{v}$ и заранее выбранная точка пространства O, то моментом импульса $\overrightarrow{N}$ материальной точки относительно точки O называется векторное произведение радиуса-вектора материальной точки $\vec{r}$, проведенного из точки O, на ее импульс $m\vec{v}$ (рис.2). Модуль момента импульса равен произведению импульса материальной точки на его плечо z, т.е. на расстояние от точки O до прямой, проходящей через материальную точку и коллинеарной вектору v:

$$N = mvz.$$

(Кстати, это определение очень похоже на определение момента силы.)

Если мы хотим узнать момент импульса тела, имеющего ненулевые размеры и вращающегося относительно определенной оси, то следует его разделить (мысленно) на маленькие кусочки, для каждого кусочка вычислить момент импульса, а затем полученные значения просуммировать. При этом момент импульса оказывается пропорциональным угловой скорости вращения тела, а коэффициент пропорциональности I называется моментом инерции тела. Момент инерции по своему физическому смыслу аналогичен массе: он зависит только от распределения плотности в теле и положения оси вращения и не зависит от частоты вращения и других внешних условий. Более того, кинетическая энергия вращающегося тела выражается аналогично кинетической энергии материальной точки — она равна половине произведения момента инерции на квадрат угловой скорости вращения тела:

$$W_{\text{к}} = \frac{1}{2} I\omega^2 .$$

Если на систему точек не действуют внешние силы или рассматриваемый промежуток времени так мал, что моменты внешних сил незначительны (например, при ударе), то суммарный момент импульса системы сохраняется (как сохраняется импульс системы в отсутствие внешних сил).

Так как наша система ворота – бревно симметрична относительно средней линии, то можно рассмотреть только «половину» системы (половина бревна и одна створка). Моменты внешних сил в данной системе отсутствуют (трением в петлях пока пренебрегаем), поэтому момент импульса сохраняется. Кроме того, будем считать, что в системе в момент удара нет потерь энергии. Момент инерции половины бревна относительно одной из петель равен $mvL/2$. Тогда законы сохранения момента импульса и энергии будут выглядеть так:

$$\frac{m}{2} vL = \frac{m}{2} v_1 L + I\omega ,$$

$$\frac{m}{2}\frac{v^2}{2} = \frac{m}{2}\frac{v_1^2}{2} + I\frac{\omega^2}{2} ,$$

где v_1 – скорость бревна после удара, I – момент инерции створки относительно точки вращения, т.е. центра петли. В нашем случае $I = ML^2/3$ (это вычислили еще до нас). Отсюда найдем угловую частоту вращения створки сразу после удара:

$$\omega = \frac{2mLv}{2I + mL^2} = \frac{1}{L}\frac{2mv}{m + 2M/3} .$$

Импульс, который передается петлям, равен, с противоположным знаком, изменению импульса системы (импульс створки равен импульсу ее центра масс, который находится в середине створки, так что его скорость равна $\omega L/2$):

$$\Delta p = M\omega\frac{L}{2} + \frac{m}{2}(v_1 - v) = M\omega\frac{L}{2} - \frac{I\omega}{L} = \frac{mMv}{2M + 3m} .$$

Из полученных формул можно сразу сделать интересный вывод: даже если мы устремим массу бревна к бесконечности, то угловая скорость ворот не превысит величины $2v/L$, а переданный импульс не будет больше чем $Mv/3$. Поэтому с данной точки зрения выгоднее увеличивать скорость бревна, а не массу. Кроме того, становится очевидным, что угловая частота ворот может быть критерием эффективности удара и при рассмотрении разрушений в петлях и точках крепления ворот. Исходя из этого, будем считать ω *универсальным критерием эффективности удара.* Однако понятно, что, для того чтобы разрушить петли, следует наносить удары по возможности ближе именно к петлям. Но обычно тараном бьют в центральную часть ворот, т.е. пытаются сломать именно брус. Это можно объяснить, с одной стороны, тем, что петли достаточно прочные, а, с другой стороны, тем, что сила удара в петлях зависит не только от изменения импульса, но и от продолжительности удара. Поэтому в дальнейшем будем говорить о разрушениях, которые происходят *после* удара.

Итак, непосредственно после удара створки ворот имеют угловую скорость ω и соответствующую ей кинетическую энергию. В процессе движения эта энергия частично переходит в потенциальную энергию изогнутого бруса, а частично расходуется на работу против сил трения в петлях. Максимальные механические напряжения также зависят от степени изгиба бруса, поэтому пришло время поговорить про изгибы.

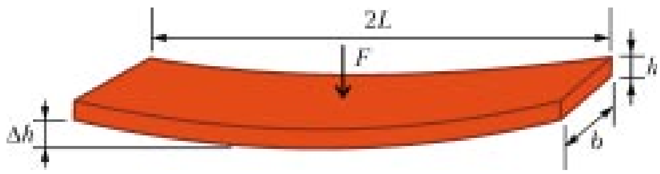

Рис. 3

Представим запирающий брус в виде прямоугольного параллелепипеда длиной $2L$, высотой b и толщиной h (рис. 3). Пусть под действием внешней силы, приложенной в середине, брус прогнулся на величину Δh (считаем, что $\Delta h \ll L$). Заглянув в учебник по сопротивлению материалов, найдем потенциальную энергию бруса в этом случае:

$$W_{\text{п}} = \frac{1}{4}\frac{Ebh^3}{L^3}(\Delta h)^2,$$

где E – модуль Юнга для материала бруса. Очевидно, что максимальное напряжение $\sigma_{\max}$ будет на поверхности бруса на расстоянии L от концов, т.е. посередине бруса (см. рис.3). Оно связано с прогибом соотношением (опять заглянем в учебник)

$$\sigma_{\max} = \frac{3}{2}\frac{Eh}{L^2}\Delta h.$$

Если это напряжение превышает предел прочности, то брус ломается.

Подумаем теперь о том, сколько энергии теряется в петлях. Очевидно, что потери будут зависеть от угла поворота створки ворот, причем для малых углов поворота этот угол равен примерно $\Delta h/L$. Тогда работа против сил трения будет равна

$$A_{\text{тр}} = \frac{M_{\text{тр}}\Delta h}{L},$$

где $M_{\text{тр}}$ – момент сил трения в петлях. Кстати, при больших углах поворота створок есть опасность того, что концы бруса выскочат из мест крепления. Будем, однако, считать, что брус не выскочит, т.е. что угол поворота действительно мал.

Теперь, задав значение $\sigma_{\max}$, определим потенциальную энергию, соответствующую разрушению бруса, и работу против сил трения, а затем запишем закон сохранения энергии:

$$2I\frac{\omega^2}{2} = \frac{\sigma_{\max}^2 bhL}{9E} + M_{\text{тр}}\frac{2L\sigma_{\max}}{3Eh}.$$

Далее воспользуемся найденным ранее выражением для ω и получим

$$\frac{4m^2v^2M}{3(m+2M/3)^2} = \frac{L}{E}\left(\frac{\sigma_{\max}^2 bh}{9} + M_{\text{тр}}\frac{2\sigma_{\max}}{3h}\right). \qquad (*)$$

С помощью этих формул можно не только определить величины m и v (или ω), необходимые для слома бруса, но и наметить пути повышения стойкости ворот (рекомендации обороняющимся). Часть этих рекомендаций, в принципе, достаточно понятны – нужно использовать древесину с высоким пределом прочности ($\sigma_{\max}$), брус делать пошире и потолще (b и h), хотя для толщины есть свое оптимальное значение. Этот оптимум можно найти, взяв производную от равенства $(*)$ по h и приравняв ее к нулю. В результате получим

$$h_{\text{опт}} = \sqrt{\frac{6M_{\text{тр}}}{\sigma_{\max}b}}.$$

Кроме того, понятно, что не стоит на время осады смазывать петли (в несмазанных петлях $M_{\text{тр}}$ больше). Далее, ворота следует делать потяжелее, а при осаде можно их дополнительно утяжелять. А вот модуль Юнга должен быть поменьше (хотя это, может быть, и не совсем понятно на первый взгляд). Это условие означает тот факт, что брус должен быть достаточно гибким – ведь мы знаем из повседневного опыта, что сломать твердый и хрупкий предмет проще, чем упругий.

Формула $(*)$ позволяет определить, с какой минимальной скоростью должно двигаться бревно, чтобы пробить ворота. Действительно, устремим m к бесконечности и получим

$$4v^2M = \frac{3L}{E}\left(\frac{\sigma_{\max}^2 bh}{9} + M_{\text{тр}}\frac{2\sigma_{\max}}{3h}\right).$$

Таким образом, зная параметры ворот, можно определить, до какой *минимальной* скорости нужно разогнать бревно, чтобы сломать брус с первого раза. Однако бревно при этом должно быть бесконечной массы. Ясно, что использовать такое орудие невозможно – нужно бесконечное число воинов для его подъема, бесконечное число подвод для транспортировки и т.д., да и изготовить такой таран будет трудновато. Тогда нужно найти некоторый оптимум по массе бревна.

Для этого следует знать, во-первых, с какой максимальной скоростью воин может бежать без нагрузки и, во-вторых, как будет зависеть скорость бега воина от нагрузки на его плечах. Если максимальная скорость без нагрузки меньше минимально допустимой, то молодцам следует заняться спортом. Если боец «укладывается в нормативы», то следует, очевидно, экспериментальным путем найти зависимость скорости бега воина от дополнительной массы, которую он несет на плечах. Затем, зная искомую зависимость и количество воинов, можно при помощи формулы $(*)$ определить необходимую массу и скорость бревна. А вот в том, как правильно подобрать количество воинов, и состоит отчасти военное искусство – ведь здесь уже нужно учитывать особенности крепости и возможные действия неприятеля, а также и психологические нюансы своих бойцов и бойцов противника.

Ну, а если добры молодцы даже после тренировок не могут достичь минимально необходимой скорости (комендант крепости провел работы по укреплению ворот), можно ли тогда сломать брус тараном? Оказывается, можно. Но об этом – в другой раз. А пока заметим следующее.

Вероятность того, что на книжной полке у воеводы не окажется учебника по сопротивлению материалов и справочника с нужными характеристиками материалов, практически равна единице. Но как же он тогда сможет получить необходимые зависимости? Ответ достаточно прост: нужно ставить эксперимент.

Например, зависимость энергии бруса от прогиба можно определить следующим образом: кладем брус концами на упоры, на середину помещаем грузы известной массы и измеряем величину прогиба. Если теперь известна зависимость прогиба Δh от действующей на брус силы F или, наоборот, известна зависимость $F(\Delta h)$, то энергию можно определить через работу, которую нужно совершить над брусом для изгиба его на соответствующую величину:

$$W_{\text{п}} = \int_0^{\Delta h} F(x)\,dx.$$

Тут можно возразить, что воевода вряд ли знал интегралы. Однако значение интеграла можно получить и без интегрирования, ведь интеграл есть площадь под графиком интегрируемой функции: достаточно нарисовать график, скажем, на дощечке, выпилить соответствующую фигуру пилой и просто взвесить.