Теперь запишем уравнения динамики в проекции на вертикальную ось для движения тела вверх и вниз:

$$m\frac{dv_y}{dt} = -kv_y - mg\ ,\ \ m\frac{dv_y}{dt} = -kv_y + mg\ .$$

Умножим на приращение времени и получим для движения вверх и для движения вниз, соответственно,

$$mdv_y = -kdy - mgdt\ ,$$

$$mdv_y = -kdy + mgdt\ .$$

Для всего пути запишем

$$-mv_{Oy} = -kH - mgt_1\ ,\ \ mv_{Ay} = -kH + mgt_2\ .$$

Складывая эти уравнения получим

$$-m\Delta v = -2kH + mg\tau\ .$$

Отсюда найдем искомую величину:

$$H = \frac{m}{k}\frac{\Delta v + g\tau}{2} = \frac{\Delta L_0}{v_{Ax}}\frac{\Delta v + g\tau}{2}\ .$$

Задача 9*. *В середине длинной цилиндрической трубки с глицерином находится воздушный пузырек. При вертикальном положении трубки пузырек поднимается со скоростью 1 м/с. Трубку расположили горизонтально и разогнали вдоль длинной стороны до скорости 20 м/с. Где остановится пузырек? Куда он сместится, если скорость плавно увеличить до 30 м/с?*

Рассмотрим сначала вертикальный подъем пузырька. Для установившегося режима при условии малости массы пузырька архимедова сила компенсируется силой сопротивления глицерина:

$$\vec{F}_{\text{А}} + \vec{F}_{\text{с}} = 0\ ,\ \text{или}\ \ \rho_{\text{ж}}Vg = kv_0\ ,$$

где $\rho_{\text{ж}}$ – плотность жидкости (глицерина), k – коэффициент пропорциональности между силой сопротивления и скоростью (будем считать, что при данных скоростях сила сопротивления со стороны жидкости прямо пропорциональна скорости пузырька), $v_0 = 1$ м/с.

При горизонтальном ускоренном движении трубки на жидкость действуют силы инерции, создавая «искусственную тяжесть». На элемент жидкости массой m действует сила инерции $-m\vec{a}$, направленная против ускорения. Поле сил инерции создает составляющую архимедовой силы, направленную по ускорению трубки и равную

$$F_{\text{А}} = \rho_{\text{ж}}Va = \rho_{\text{ж}}V\frac{dv}{dt}\ .$$

Это приведет пузырек в движение. Из-за пренебрежимой массы пузырька можно записать

$$\vec{F}_{\text{А}} + \vec{F}_{\text{с}} = 0\ ,\ \text{или}\ \ \rho_{\text{ж}}V\frac{dv}{dt} = kv\ .$$

Умножим на dt и получим пропорциональность дифференциалов:

$$\rho_{\text{ж}}Vdv = kdx\ .$$

Суммируя и уточняя конечные приращения, для первого случая, когда трубку разгоняют до скорости $v_1 = 20$ м/с, запишем

$$\frac{\rho_{\text{ж}}V}{k}v_1 = x_1\ .$$

С учетом уравнения для вертикального подъема пузырька найдем

$$x_1 = \frac{v_0v_1}{g} = 2\ \text{м}\ .$$

Аналогично, для второго случая, когда скорость трубки увеличивают до $v_2 = 30$ м/с, получим

$$x_2 = \frac{v_0v_2}{g} = 3\ \text{м}\ .$$

Видно, что смещение пузырька пропорционально скорости трубки.

Замечание. Решите самостоятельно эту задачу без использования силы инерции.

Множество значений функции

С.ЛАВРЕНОВ

Часто, решая задачи, абитуриент (или школьник, сдающий ЕГЭ) сталкивается с необходимостью отыскания области значений той или иной функции. Напомним, что если на некотором множестве $D[f] \subset \boldsymbol{R}$ задана функция $y = f(x)$, $y \in \boldsymbol{R}$, то множеством значений $E[f]$ этой функции называется множество всех таких $y \in \boldsymbol{R}$, что $y = f(x)$ при некотором $x \in D[f]$.

Цель этой статьи – представить различные методы нахождения множества значений функции. Для демонстрации эффективности рассматриваемых методов некоторые задачи и упражнения повторяются в статье несколько раз. Номера таких задач и упражнений сохраняются.

Начнем с несложных примеров.

Задача 1. *Найдите множество значений функции* $y = \sin x + \cos x$.

Решение. Воспользуемся способом введения вспомогательного угла:

$$y = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right) = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Ответ: $\left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$.

Задача 2. *Найдите множество значений функции* $y = \cos^2 x + \sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Решение. Преобразуя данное выражение и вводя вспомогательный угол φ, получим

$$y = \frac{1}{2} + \sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\sin(2x - \varphi)\ .$$

Ответ: $\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$.

Упражнение 1. Найдите все значения a, при которых множество значений функции $y = ax^2 + x + 1$ включает отрезок $[-1; 1]$.

Разрешимость уравнения $f(x) = a$

Отыскание множества значений функции тесно связано с решением уравнений.

Теорема 1. *Уравнение $f(x) = a$ имеет решение тогда и только тогда, когда a принадлежит области значений функции $y = f(x)$.*

Доказательство следует непосредственно из определения множества $E[f]$.

Из теоремы 1 следует, что для отыскания $E[f]$ достаточно найти все значения a, для которых уравнение $f(x) = a$ имеет корень $x \in [f]$. Множество таких a и является множеством $E[f]$.

Задача 3. *Найдите множество значений функции $y = \sqrt{15 + 2x - x^2}$.*

Решение. Выясним, при каких значениях a уравнение $\sqrt{15 + 2x - x^2} = a$ имеет решение. Уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} 15 + 2x - x^2 = a^2, \\ a \ge 0. \end{cases}$$

Уравнение системы имеет решение при $D/4 = 16 - a^2 \ge 0$, поэтому $0 \le a \le 4$.

Ответ: $[0; 4]$.

Иногда абитуриенты присоединяют к системе неравенство $15 + 2x - x^2 \ge 0$. Однако этого делать не нужно, так как оно вытекает из первого уравнения системы.

Задача 4. *Найдите множество значений функции $y = \frac{\sqrt{3}\cos x + 1}{3 + \sin x}$.*

Решение. Уравнение $\frac{\sqrt{3}\cos x + 1}{3 + \sin x} = a$ равносильно уравнению $\sqrt{3}\cos x - a\sin x = 3a - 1$, т.е.

$$\cos(x + \varphi) = \frac{3a - 1}{\sqrt{3 + a^2}},$$

разрешимому тогда и только тогда, когда

$$\frac{(3a-1)^2}{3 + a^2} \le 1, \text{ т.е. при } a \in [-1/4; 1].$$

Ответ: $[-1/4; 1]$.

Замечание. Мы воспользовались введением вспомогательного угла. Явно разрешать уравнение относительно x мы не стали, так как этого от нас не требовалось. Достаточно определить условия существования решения, что и было сделано.

Упражнения

Найдите множество значений функции:

2. $y = \frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 + 1}$.

3. $y = \frac{2 - \cos x}{4 + \sqrt{3}\sin x}$.

Рассмотренный метод применим и для функций нескольких переменных, на которые наложены дополнительные ограничения. Рассмотрим для определенности функцию двух переменных. Постановка задачи обычно такова: найти множество значений функции $z = f(x, y)$ при ограничении $g(x, y) = 0$ (или $g(x, y) \le 0$). В таких задачах требуется найти значения параметра a, при которых имеет решение система

$$\begin{cases} f(x, y) = a, \\ g(x, y) = 0. \end{cases}$$

Задача 5. *Числа x и y удовлетворяют равенству $7x^2 - 4xy + 4y^2 = 12$. Найдите все значения, которые может принимать сумма $x^2 + y^2$.*

Решение. Найдем все значения a, при которых имеет решение система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ 7x^2 - 4xy + 4y^2 = 12. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на 12, второе на a и вычтем одно из другого. Получим эквивалентную систему

$$\begin{cases} (7a - 12)x^2 - 4axy + (4a - 12)y^2 = 0, \\ 7x^2 - 4xy + 4y^2 = 12. \end{cases}$$

Если $y = 0$, то получим $a = 12/7$, $x = \pm\sqrt{12/7}$. Пусть $y \ne 0$. Поделим первое уравнение на y^2 и положим $t = x/y$. Тогда $(7a - 12)t^2 - 4at + 4a - 12 = 0$. При $a = 12/7$ коэффициент перед t^2 обращается в 0, но при этом значении система имеет решение. Если $a \ne 12/7$, то уравнение имеет решение, если $D/4 = -24a^2 + 132a - 144 \ge 0$. Отсюда $a \in [3/2; 4]$. При этом $12/7 \in [3/2; 4]$. Итак, $x = ty$ при найденных a. Подставляя это выражение во второе уравнение, получим $y^2(7t^2 - 4t + 4) = 12$. Квадратный трехчлен, стоящий в скобках, положителен, поэтому существует y, а следовательно, существует и x.

Ответ: $[3/2; 4]$.

Замечание. Проверка существования x и y обязательна. Если немного изменить исходную задачу, положив в правой части ограничения число -12, то мы получим $a \in [-4; -3/2]$. Но множество значений в такой постановке задачи оказывается пустым.

Упражнение 4. Найдите множество значений функции $z = x^2 + 2y^2$, если $x^2 - xy + 2y^2 = 1$.

Объединение образов промежутков монотонности. Экстремумы

Далеко не для всех функций мы сможем решить уравнение $f(x) = a$. Вот пример: $y = (1 - x)e^{-x}$. Здесь может помочь исследование функции с помощью производной.

Но сначала придется ввести новые определения.

Сужением функции $y = f(x)$ на множество $A \subset D[f]$ называется функция $y = f(x)$, для которой $x \in A$. Обозначение: $y = f(x)|_A$. Подчеркнем, что сужение функции – это уже другая функция. У нее имеется свое множество значений $E\left[f|_A\right] = \{y \in \boldsymbol{R} | x \in A \subseteq D[f] \text{ и } y = f(x)\}$. Оно является *образом* функции $f(x)$ на множестве A.

Теорема 2. *Пусть $y = f(x)$ непрерывна и монотонна на* *отрезке* $[a;b]$. *Тогда если* $f(x)$ *возрастает на* $[a;b]$, *то* $E\left[f|_{[a;b]}\right]=\left[f(a);f(b)\right]$. *Если* $f(x)$ *убывает на* $[a;b]$, *то* $E\left[f|_{[a;b]}\right]=\left[f(b);f(a)\right]$.

Теорему иллюстрируют рисунки 1 и 2.

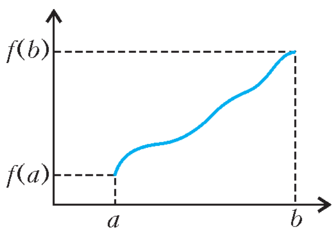

Рис. 1

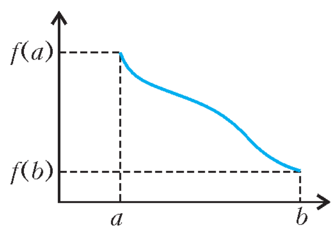

Рис. 2

Отрезок $[a;b]$ можно заменить промежутками других типов: интервалами, лучами. Формулировка теоремы изменится. Например, если $f(x)$ возрастает на $[a;+\infty)$, то $E\left[f|_{[a;+\infty]}\right]=\left[f(a);\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)$.

Потренируемся. Вычислим образ отрезка $[1;4]$ для функции $y=\log_{1/2}x$. Эта функция является убывающей. Значения в граничных точках отрезка равны 0 и -2. Поэтому $\log_{1/2}x\big|_{[1;4]}=\left[\log_{1/2}4;\log_{1/2}1\right]=[-2;0]$. Покажите это на графике.

А теперь используем это для вычисления $E[f]$. Представим область определения $D[f]$ в виде объединения промежутков монотонности D_k. Для каждого такого промежутка вычислим его образ $E_k=E\left[f|_{D_k}\right]$. Тогда $E[f]=\cup E_k$.

Задача 6. *Найдите множество значений функции* $y=(1-x)e^{-x}$.

Решение. Найдем промежутки монотонности. Поскольку $y'=(x-2)e^{-x}$, то при $x\in(-\infty;2]$ функция убывает, а при $x\in[2;+\infty]$ – возрастает, т.е. $x=2$ – точка минимума, так что $y_{\min}=y(2)=-e^{-2}$. Далее,

$$\lim_{x\to-\infty}(1-x)e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}(1+x)e^{x}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty}(1-x)e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-x)}{e^{x}}=0.$$

Поэтому $E_1=E\left[y|_{(-\infty;2]}\right]=\left[-e^{-2};+\infty\right)$, $E_2=E\left[y|_{[2;+\infty)}\right]=\left[-e^{-2};0\right)$. Тогда $E=E_1\cup E_2=\left[-e^{-2};+\infty\right)$. Нарисуйте эскиз графика функции.

Теорема 3. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a;b]$, *то* $E[f]=\left[\min\limits_{x\in[a;b]}f(x);\max\limits_{x\in[a;b]}f(x)\right]$.

Для отыскания множества значений нужно вычислить наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке. Эти значения задают границы множества значений. Поиск наименьшего и наибольшего значений функции на отрезке проводится по известной схеме. Вычисляются значения функции в критических точках (точках, в которых производная функции обращается в ноль или не существует), а также в граничных точках отрезка. Из этих значений выбираются минимальное и максимальное.

Для периодических функций достаточно вычислить значения функции в критических точках.

Задача 7. *Найдите множество значений функции* $f(x)=10\sin 2x+\cos x$.

Решение. Поскольку

$$f'(x)=20\cos 2x-7\sin x=-40\sin^2 x-7\sin x+20=0,$$

то имеются две возможности:

1) $\sin x=-\dfrac{4}{5}\Rightarrow\cos x=\pm\dfrac{3}{5}\Rightarrow$
$$\Rightarrow f(x)=20\left(-\frac{4}{5}\right)\left(\pm\frac{3}{5}\right)+7\left(\pm\frac{3}{5}\right)=\mp\frac{48}{5}\pm\frac{21}{5}=\pm\frac{27}{5};$$

2) $\sin x=\dfrac{5}{8}\Rightarrow\cos x=\pm\dfrac{\sqrt{39}}{8}\Rightarrow f(x)=\pm\dfrac{39}{16}\sqrt{39}$.

Заметив, что $\dfrac{39\sqrt{39}}{16}>\dfrac{27}{5}$, получаем ответ.

Ответ: $\left[-\dfrac{39}{16}\sqrt{39};\dfrac{39}{16}\sqrt{39}\right]$.

Упражнения

Найдите множество значений функции:

5. $y=(1+\cos x)\sin x$.

6. $y=8\sqrt{3}\cos^3 x+18\sin x$.

7. $y=\dfrac{\sqrt{x^2-2x-8}}{2|x|+1}$.

Представление в виде композиции функций

Нахождение множества значений существенно упрощается, если удается представить исследуемую функцию в виде композиции других функций: $y=f(x)=g(h(x))$. Тогда $E[f]$ является образом функции $g(z)$ на множестве $D[g]\cap E[h]$, т.е. $E[f]=E\left[g|_{D[g]\cap E[h]}\right]$.

Задача 8. *Найдите множество значений функции* $y=\log_{1/2}\left(2x-x^2+3\right)$.

Решение. Для функции $z=h(x)=2x-x^2+3=4-(x-1)^2$ имеем $E[h]=(-\infty;4]$; для функции $y=g(z)=\log_{1/2}z$ имеем $D[g]=(0;+\infty)$. Получим $D[g]\cap E[h]=(0;4]$, значит, $E[f]=[-2;+\infty)$.

Эти формулы приобретают наглядность при использовании графиков. На рисунке 3 изображен график функции $z=h(x)$, множество значений выделено жирно. Повернем ось z из вертикального положения в горизонтальное и поместим ее на рисунке 4, где показан график $y=g(z)$ и выделена область определения этой функции. Видно, что образом промежутка $(0;4]$ является луч $[-2;+\infty)$.

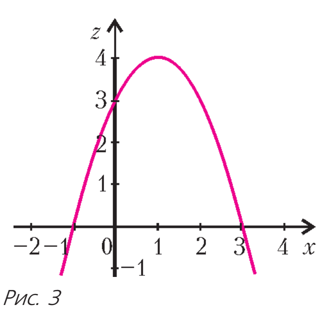

Рис. 3

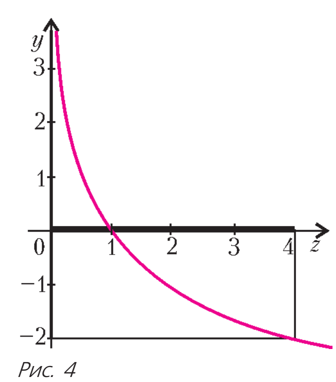

Рис. 4

Для сравнения решите эту задачу первым и вторым методами.

Давайте теперь еще раз решим задачу 3. Функция $y = \sqrt{15 + 2x - x^2} = f(x)$ представляется в виде $f(x) = g(h(x))$, где $y = g(z) = \sqrt{z}$, $z = h(x) = -x^2 + 2x + 15 = 16 - (x-1)^2$. Далее, $E[h] = (-\infty; 16]$; $D[g] = [0; +\infty)$; $E[h] \cap D[g] = [0; 16]$. Функция $g(z)$ возрастающая, поэтому $E[f] = [g(0); g(16)] = [0; 4]$. (Самостоятельно нарисуйте графики в системах координат Oxz и Oyz.)

Упражнения

Найдите первым и третьим методами множество значений функции:

8. $y = \lg\left(\frac{2x+5}{x-1} - 1\right)$.

9. $y = \sqrt{\frac{2x+1}{x-3} - 1}$.

10. $y = \log_3(1 - 2\cos x)$.

Задача 9. *Найдите множество значений функции* $y = 2\cos x - \cos 2x$.

Решение. На первый взгляд не видно, композицией каких функций является $y(x)$. Преобразуем ее: $y = 2\cos x - \cos 2x = 2\cos x - 2\cos^2 x + 1$. Далее, $y(z) = -2z^2 + 2z + 1 = -2\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}$; $z = \cos x$. Тогда $E[z] = [-1; 1]$. Ищем наибольшее и наименьшее значения $y(z)$ на отрезке $[-1; 1]$.

Получаем *ответ*: $[-3; 3/2]$.

Упражнения

Найдите множество значений функции:

11. $y = 4\cos^2 x + 3\sin^2 2x$.

12. $y = 2\sin x \cos 2x + 7\sin x$.

Если исходная функция представлена как композиция нескольких функций: $y = f_1(\ldots f_{n-1}(f_n(x))\ldots)$, то сначала нужно вычислить множество значений внутренней функции $E_n = E[f_n(x)]$. Затем вычислить образ $E_{n-1} = f_{n-1}(D[f_{n-1}] \cap E_n)$ и так далее.

Упражнение 13. Найдите множество значений функции $y = 7 + 3x - x^2 - 2\sqrt{-x^2 + 3x + 4}$.

Задача 10. *При каких значениях a уравнение* $2\cos^2\left(2^{2x-x^2}\right) = a + \sqrt{3}\sin\left(2^{2x-x^2+1}\right)$ *имеет хотя бы одно решение?*

Решение. Переформулируем задачу: найдем множество значений функции $f(x) = 2\cos^2\left(2^{2x-x^2}\right) - \sqrt{3}\sin\left(2 \cdot 2^{2x-x^2}\right)$. Представим ее как композицию функций:

$$f(u) = 2\cos^2(u) - \sqrt{3}\sin(2u) =$$

$$= 1 + \cos(2u) - \sqrt{3}\sin(2u) = 1 + 2\cos\left(2u + \frac{\pi}{3}\right); \; u(z) = 2^z;$$

$$z(x) = 2x - x^2 = 1 - (x-1)^2.$$

Тогда $E[z] = (-\infty; 1]$, $E[u] = (0; 2]$. (Нарисуйте соответствующие графики.)

Поскольку $4 + \frac{\pi}{3} \geq 2u + \frac{\pi}{3} > \frac{\pi}{3}$, то $-1 \leq \cos\left(2u + \frac{\pi}{3}\right) < \frac{1}{2}$, и $E(f) = [-1; 2)$.

Ответ: $[-1; 2)$.

Можно встретить рекомендации для вычисления границ изменения функции с использованием классических неравенств, например неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим. Для двух переменных оно имеет вид $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, $a, b \geq 0$. С его помощью можно, например, показать, что $x + \frac{1}{x} \geq 2$, $x > 0$. Но с помощью этого неравенства можно получить, вообще говоря, лишь оценку для множества значений. В данном случае оно совпадает с множеством значений $[2; +\infty)$. А скажем, для функции

$$y = \frac{\sqrt{2}\left(3x^2 + 10\right)}{2\sqrt{x^2+2}\sqrt{x^2+4}} = \sqrt{\frac{2x^2+8}{x^2+2}} + \sqrt{\frac{x^2+2}{2x^2+8}}$$

множество значений $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}; \frac{5}{2}\right] \subset [2; +\infty)$ (докажите это).

Тригонометрические подстановки

Пусть для функции $y = f(x)$ удалось найти функцию $x = g(t)$, $t \in D[g]$ такую, что $D[f] \subset E[g]$, а новая функция $y = f(g(t)) = p(t)$ проще для исследования, чем исходная. При этом $E[f] = E[p]$. В качестве $x = g(t)$ подбирают тригонометрическую функцию. Сам вид тригонометрических формул позволяет добиться существенных упрощений.

Задача 11. *Найдите все значения a, при которых уравнение* $x\sqrt{1 - 4x^2}\left(1 - 8x^2\right) = a$ *имеет решение.*

Решение. Так как $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$, выберем функцию $x = \frac{1}{2}\sin t$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Тогда

$$x = \frac{1}{2}\sin t\sqrt{1 - \sin^2 t}\left(1 - 2\sin^2 t\right) = \frac{1}{2}\sin t\cos t\cos 2t = \frac{1}{8}\sin 4t.$$

Ответ: $a \in \left[-\frac{1}{8}; \frac{1}{8}\right]$.

Замечание. Благодаря удачному выбору области определения для функции $g(t)$ мы существенно сократили решение: $\sqrt{1 - \sin^2 t} = |\cos t| = \cos t$, так как $\cos t \geq 0$ при $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Можно дать следующие рекомендации для упрощения радикалов:

$\sqrt{a^2 - x^2}$ $\quad x = a\sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ или $x = a\cos t, t \in [0; \pi]$;

$\sqrt{a^2 + x^2}$ $\quad x = a\,\mathrm{tg}\,t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ или $x = a\,\mathrm{ctg}\,t, t \in (0; \pi)$;

$\sqrt{x^2 - a^2}$ $\quad x = \frac{a}{\sin t}, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$ или

$$x = \frac{a}{\cos t}, t \in [0; \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}.$$

Но это не более чем рекомендации. Они могут и не привести к успеху.

Упражнения

Найдите множество значений функции:

14. $y = \frac{x\sqrt{x^2+4} - x^2}{x^2+4}$.

15. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x - x\sqrt{x^2-1}}}$.

16. $y = \log_{16}\left(\dfrac{5-12x}{\sqrt{x^2+1}} - 5\right)$.

Задача 12. *Найдите множество значений функции* $z = y\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{4-y^2}$.

Решение. Пусть $x = \sin u$, $y = 2\sin v$, $u, v \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Тогда $z = 2\sin v\cos u + 2\sin u\cos v = 2\sin(u+v)$.

Ответ: $[-2;2]$.

Еще раз решим задачу 5.

Задача 5. *Числа* x *и* y *удовлетворяют равенству* $7x^2 - 4xy + 4y^2 = 12$. *Найдите все значения, которые может принимать сумма* $x^2 + y^2$.

Решение. Пусть $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $r \ge 0$, $\varphi \in [0;2\pi)$. Тогда $x^2 + y^2 = r^2$. Преобразуем ограничение: $7r^2\cos^2\varphi - 4r^2\sin\varphi\cos\varphi + 4r^2\sin^2\varphi = 12$, $r^2(3\cos^2\varphi - 2\sin 2\varphi + 4) = 12$, $r^2(11 + 3\cos 2\varphi - 4\sin 2\varphi) = 24$, $r^2 = \dfrac{24}{5\cos(2\varphi+\psi)+11}$, где $\psi = \arccos\frac{3}{5}$, $E[r^2] = \left[\frac{24}{5+11}; \frac{24}{-5+11}\right] = \left[\frac{3}{2}; 4\right]$.

Ответ: $\left[\frac{3}{2}; 4\right]$.

Упражнение 4. Найдите множество значений функции $z = x^2 + 2y^2$, если $x^2 - xy + 2y^2 = 1$.

Геометрическая интерпретация

Если удается увидеть в задаче на вычисление множества значений функции геометрическое содержание, то это позволяет существенно продвинуться в решении задачи.

Задача 3. *Найдите множество значений функции* $y = \sqrt{15 + 2x - x^2}$.

Решение. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}(x-1)^2 + y^2 = 4^2,\\ y \ge 0.\end{cases}$$

Уравнение системы – уравнение окружности радиуса 4 с центром в точке $(1;0)$, неравенство – верхняя полуплоскость. Пересечение двух этих множеств показано на рисунке 5.

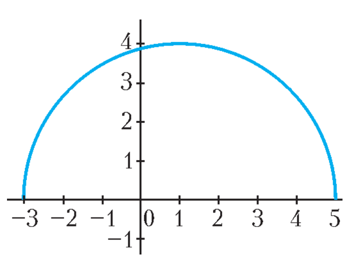

Рис. 5

Ортогональная проекция верхней полуокружности на ось ординат является отрезком $[0;4]$.

Задача 13. *Найдите множество значений функции* $y = \sqrt{x^2 - 2x + 4} + \sqrt{x^2 - 3x + 9}$.

Решение. Функция

$$y = \sqrt{(x-1)^2 + \left(0 - \sqrt{3}\right)^2} + \sqrt{(x-3/2)^2 + \left(0 + 3\sqrt{3}/2\right)^2}$$

представляет собой сумму расстояний от точки $(x;0)$, лежащей на оси Ox, до точек $A\left(1;\sqrt{3}\right)$ и $B\left(3/2; -3\sqrt{3}/2\right)$. Эта сумма не меньше, чем длина отрезка $AB = \sqrt{19}$.

Ответ: $\left[\sqrt{19}; +\infty\right)$.

Задача 14. *Пусть* x *и* y *удовлетворяют системе*

$$\begin{cases}y - x \le 5,\\ y + 4x \le -5,\\ 3y + 2x \ge -5.\end{cases}$$

Найдите все значения, которые могут принимать $x^2 + y^2$ *и* $\dfrac{y}{x}$.

Решение. Система неравенств описывает треугольник на плоскости xOy. Его вершины: $A(-4;1)$, $B(-2;3)$, $C(-1;-1)$ (рис.6); $x^2 + y^2$ – это квадрат расстояния от точки треугольника $(x;\,y)$ до начала координат. Наименьшее расстояние – расстояние до прямой BC. Выражение $x^2 + (-4x-5)^2 = 17x^2 + 40x + 25$ принимает наименьшее значение $\frac{25}{17}$ при $x = -\frac{20}{17} \in [-2;-1]$. Наибольшее расстояние – длина отрезка $AO = 17$. Поскольку $\dfrac{y}{x}$ – тангенс угла наклона прямой, проходящей через начало координат и точку треугольника $(x;y)$, наибольшее и наименьшее значения достигаются на прямых CO и BO.

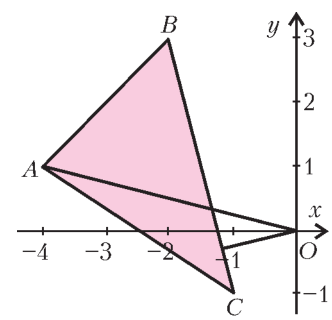

Рис. 6

Ответ: $\left[\frac{25}{17}; 17\right]$, $\left[-\frac{3}{2}; 1\right]$.

Упражнение 17. Пусть x и y удовлетворяют неравенству $3|x-6| + 2|y+3| \le 12$. Найдите все значения, которые могут принимать $x^2 + y^2$ и $\dfrac{y}{x}$.

Замечание от редакции. Методы решения задач, связанных с множеством значений семейств функций, зависящих от параметра, рассмотрены также в статье В.Голубева и К.Мосевича «Семейства функций», опубликованной в журнале «Квант» №2 за 2006 год.