

Материалы вступительных экзаменов 2005 года

Институт криптографии, связи и информатики Академии ФСБ РФ

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультеты прикладной математики и информационной безопасности)

1. Решите неравенство

$$\frac{x-1}{\sqrt{x-1}} < 4 + \sqrt{3} - x.$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2 \log_3^2(x+2y) = \\ = \log_{1/3}(x+2y) \log_{1/3}(x-y) + \log_3^2(x-y), \\ x^2 + xy - 2y^2 = 9. \end{cases}$$

3. Решите неравенство

$$\frac{\log_7 12}{\log_7(x^2-9)} \geq \frac{\log_5(x^2+8x+12)}{\log_5(x^2-9)}.$$

4. Высоты равнобедренного остроугольного треугольника ABC , в котором $AB = BC$, пересекаются в точке O . Найдите площадь треугольника ABC , если $AO = 5$, а высота AD равна 8.

5. Числа $-\sin x$, $4 \sin x \operatorname{ctg} 2x$, $\cos x$ являются членами арифметической прогрессии с номерами k , $k+1$, $k+2$ соответственно. Найдите все значения x и k , при которых седьмой член этой прогрессии равен $\frac{1}{5}$.

6. Для того чтобы успеть на последний электропоезд, семье из четырех человек нужно перейти по пешеходному мосту быстрее чем на 32 минуты. Одновременно по мосту могут идти не более двух человек, причем ввиду темного времени непременно с фонариком. Если мост проходят двое, то они двигаются со скоростью того, кто идет медленнее. Успеют ли на последний поезд все члены семьи, если известно, что в одиночку Юра может перейти мост за 2 минуты, Катя – за 4 минуты, Игорек – за 10 минут, а Мария Ивановна – за 16 минут? Фонарик у семьи только один.

Вариант 2

(факультеты специальной техники и информационной безопасности)

1. Найдите уравнение параболы по трем ее точкам: $A(1; 4)$, $B(2; 9)$, $C(-1; 6)$.

2. Решите неравенство

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_9\left(9x^2-6+\frac{1}{x^2}\right)} \geq \frac{1}{x}.$$

3. Три хозяйки приготовили одинаковые обеды, каждая для своей семьи, на общей печке. Первая положила в топку

3 полена, вторая – 5, а третья, не имевшая поленьев, предложила им 80 рублей. Объясните, как по справедливости хозяйки должны разделить эти деньги, если дрова прогорели полностью.

4. Решите уравнение

$$\sin 3x - \sin x + \cos 2x = 1.$$

5. В треугольнике ABC $AB = 9$, $AC = 6$. Биссектриса треугольника, проведенная из вершины A , равна $\frac{18}{5}$. Найдите угол ABC .

6. Найдите все решения уравнения

$$\sqrt{\log_{4x^2-x} 5} \log_5 \left(\frac{25}{4x^2-x} \right) = 1,$$

удовлетворяющие неравенству $\sin x > \operatorname{ctg} 2x$.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультеты специальной техники и информационной безопасности)

1. Пассажир поезда, движущегося равномерно со скоростью $v_1 = 54$ км/ч, видит в течение промежутка времени $t_0 = 60$ с другой поезд длиной $l = 300$ м, который движется по соседнему пути в том же направлении с большей скоростью. Найдите скорость v_2 второго поезда.

2. На подвижной тележке массой M , находящейся на горизонтальной плоскости, с помощью легкого стержня, который может свободно вращаться вокруг точки O (рис. 1), подвешен маленький шарик массой m . Вначале система покоилась. Шарику кратковременным ударом сообщают горизонтальную скорость v . На какую наибольшую высоту H по сравнению с первоначальным уровнем поднимется шарик? Считать, что угол отклонения стержня от вертикали не превышает 90° . Трением и массой колес тележки пренебречь.

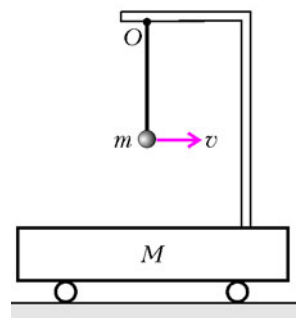


Рис. 1

3. В плоский воздушный конденсатор емкостью C , подключенный к источнику тока с ЭДС \mathcal{E} , медленно вдвинули пластинку из диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ϵ , которая заполнила весь объем между обкладками. Какую работу A против сил электрического поля необходимо было совершить, чтобы вдвинуть пластинку в конденсатор, и какую работу $A_{\text{ст}}$ совершили при этом сторонние силы источника? Сопротивлением подводящих проводов и внутренним сопротивлением источника пренебречь.

4. Горизонтальный цилиндрический сосуд разделен на две части тонким поршнем, который может двигаться без трения.

В левой части сосуда находится некая масса водорода, а в правой – такая же масса кислорода. Во сколько раз η объем левой части сосуда больше объема правой? Молярная масса водорода $M_{\text{в}} = 2$ кг/кмоль, кислорода $M_{\text{к}} = 32$ кг/кмоль. Температуры газов одинаковы.

5. Линейные размеры изображения, полученного в рассеивающей линзе, в два раза меньше линейных размеров самого предмета. Расстояние между предметом и его изображением равно $L = 3$ см. Чему равен модуль $|F|$ фокусного расстояния линзы?

Вариант 2

(факультеты прикладной математики и информационной безопасности)

1. Груз поднимается с помощью лебедки с постоянной скоростью $v = 0,9$ м/с (рис.2). С какой угловой скоростью ω вращается барабан лебедки, если его диаметр $D = 18$ см?

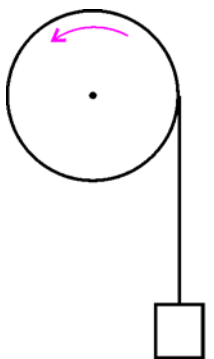


Рис. 2

2. Два гладких шара одинаковых размеров движутся навстречу друг другу по гладкой горизонтальной плоскости. Скорость одного шара, масса которого в k раз больше массы другого, равна v_1 . В результате упругого центрального соударения шар с большей массой остановился ($v_1' = 0$). Найдите скорость v_2' шара меньшей массы после соударения.

3. Плоский воздушный конденсатор емкостью $C = 1$ мкФ подключили к источнику напряжения, в результате чего конденсатор приобрел заряд $q = 10$ мкКл. Расстояние между пластинами конденсатора $d = 5$ мм. Определите напряженность поля E внутри конденсатора.

4. Один моль гелия ($\nu = 1$ моль) совершает работу A в цикле 1–2–3–1, состоящем из процессов адиабатического расширения 1–2, изотермического сжатия 2–3 и изобарического расширения 3–1 (рис.3). Разность наибольшей и наименьшей температур газа в цикле равна ΔT . Найдите работу A_{23} , совершенную газом в изотермическом процессе 2–3.

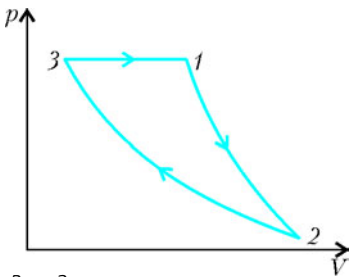


Рис. 3

5. Изображение предмета, помещенного на расстоянии $d = 15$ см от линзы, получается на экране, расположенном на расстоянии $f = 30$ см от нее. Найдите фокусное расстояние линзы F .

Публикацию подготовили А.Леденев, А.Пичкур

Московский государственный институт
электронной техники
(технический университет)

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Упростите выражение

$$\log_{0,01} 100\sqrt[3]{3} + \log_{1000} 10\sqrt{3}.$$

2. Решите уравнение

$$\sin \frac{\pi}{8} \cos x - \cos \frac{\pi}{8} \sin x = \cos \frac{\pi}{4}.$$

3. Из 28 м ткани можно сшить 8 мужских и 4 детских пальто. Сколько метров ткани необходимо для пошива одного мужского пальто, если из 15 м той же ткани можно сшить 2 мужских и 5 детских пальто?

4. Решите неравенство

$$\log_{27} (8 - 3x) \leq \frac{1}{3}.$$

5. Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{\frac{1}{5} - \left| \frac{x}{3} - 1 \right|}.$$

6. Найдите знаменатель геометрической прогрессии с положительными членами, если разность третьего и второго членов прогрессии составляет 231% от ее первого члена.

7. При каких значениях b число 1 является корнем уравнения

$$\sqrt{7x - 2b} = b - 2x?$$

8. В треугольнике ABC $AB = 3$, $BC = 4$, $\angle B = 90^\circ$. На сторонах AB и AC взяты точки M и N соответственно так, что $AM = CN = 1$. Найдите площадь четырехугольника $BMNC$.

9. В шар объема $4\pi\sqrt{3}$ вписан конус, площадь боковой поверхности которого в два раза больше площади основания. Найдите радиус основания конуса.

10. Найдите площадь фигуры на координатной плоскости, координаты точек которой удовлетворяют неравенству

$$|3 - |x|| + |5 - |y|| \leq 6.$$

11. Решите уравнение

$$3^{2x^2-1} - 3^{(x-1)(x+5)} - 2 \cdot 3^{8(x-1)} = 0.$$

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \cos x + \sin x \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right) = 0,5.$$

2. Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{1 - \sqrt{2x - 1}}.$$

3. Вычислите

$$\frac{\log_3 18}{\log_{18} 3} - \log_3 2 \log_3 162.$$

4. Решите неравенство

$$|x - 2| + |x| \leq 1 + x.$$

5. Решите уравнение

$$4^{x-28} + 4^{2x-60} = 80.$$

6. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ точки M и N – середины сторон AF и BC соответственно. Периметр трапеции $ABNM$ равен P . Найдите периметр шестиугольника.

7. Один клиент положил в банк некоторую сумму денег под определенный процент годовых. Другой клиент положил в тот же банк 4320 руб. под тот же процент годовых. Через год после вложения у первого клиента сумма составила 3600 руб., а еще через 2 года стала такой же, какой была у второго клиента через год после вложения. Какую сумму положил в банк первый клиент?

8. Решите систему

$$\begin{cases} 2^{3x-y} + \log_2(x+y) = 6, \\ 4^{3x-y} + \log_4(x+y) = 17. \end{cases}$$

9. Найдите наименьшее значение выражения $|x^2 - 12y^2|$, если x, y – натуральные числа.

10. Решите уравнение

$$\sin 2x - \cos 2x = 1 - \operatorname{ctg} x \cos 2x.$$

11. Решите неравенство

$$\sqrt{x+7} + \sqrt{11-x} \geq 3\sqrt{x^2 - 4x + 20}.$$

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Два тела движутся вдоль оси X . На рисунке 1 приведены графики зависимости проекций скоростей этих тел на ось X от времени. а) Определите ускорения a_1 и a_2 тел. б) Какое

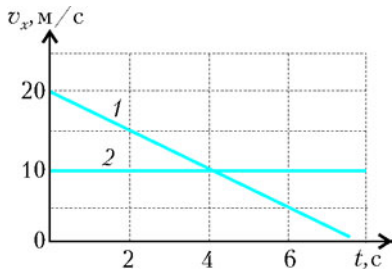


Рис. 1

расстояние L было между телами в момент времени $t = 0$, если минимальное расстояние между ними при таком движении составило $L_{\min} = 30$ м?

2. Груз массой $m = 100$ г, подвешенный на пружине жесткостью $k = 20$ Н/м, совершает вертикальные колебания. С каким ускорением a движется шарик в момент времени, когда пружина растянута на $x = 2$ см?

3. Тело массой $m = 0,5$ кг брошено вертикально вверх. Когда тело поднялось на некоторую высоту, его потенциальная энергия увеличилась на $\Delta E_{\text{п}} = 25$ Дж, а кинетическая энергия уменьшилась в $k = 2$ раза по сравнению с начальной. На какую максимальную высоту H над точкой старта поднимется тело? Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

4. Изотерма кислорода при температуре $t_1 = 47$ °С совпадает с изотермой азота при температуре $t_2 = 7$ °С. Во сколько раз отличаются массы этих газов? Молярная масса кислорода $M_1 = 32$ г/моль, молярная масса азота $M_2 = 28$ г/моль.

5. В вертикальном цилиндрическом сосуде под поршнем, расположенным на высоте $h = 1$ м от дна сосуда, находится идеальный одноатомный газ. Газ медленно нагревают, одновременно насыпая на поршень песок так, чтобы поршень оставался неподвижным. Какое количество теплоты Q получил газ к моменту, когда на поршень высыпали песок массой $m = 1$ кг? Трением между поршнем и сосудом пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

6. Точечный положительный заряд q_1 расположен в вершине A равнобедренного треугольника ABC , в котором $AC = BC = a$, $\angle ACB = \alpha = 30^\circ$. а) Определите модуль E_1 вектора напряженности электрического поля, созданного зарядом q_1 в вершине C . б) Какой точечный заряд q_2 нужно поместить в вершину B , чтобы модуль вектора напряженности суммарного электрического поля зарядов q_1 и q_2 в вершине C был минимальным? Постоянная в законе Кулона равна k .

7. Постоянный ток $I_1 = 300$ мА для пальчиковой батарейки с ЭДС $\mathcal{E} = 1,6$ В является предельным (при больших токах батарейка начинает нагреваться и работает нестабильно). Во сколько раз этот ток меньше тока короткого замыкания, если известно, что напряжение на выводах батарейки при токе I_1 равно $U_1 = 1,3$ В? Чему равно внутреннее сопротивление r батарейки?

8. Замкнутый проволочный виток сопротивлением $R = 0,3$ Ом проносят мимо магнита. При этом магнитный поток Φ через поверхность, ограниченную витком, меняется так, как показано на рисунке 2. а) Определите силу тока в витке в момент времени $t = 4$ с. б) В какой момент времени величина тока в контуре максимальна?

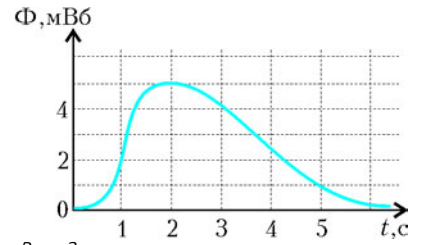


Рис. 2

9. Стеклопальная призма с преломляющим углом $\varphi = 30^\circ$ лежит на плоском зеркале (рис.3). При каком угле падения α луча на верхнюю грань призмы луч после отражения от зеркала сменит направление распространения на прямо противоположное? Показатель преломления стекла считать равным $n = 1,7$.

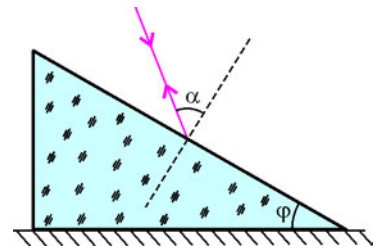


Рис. 3

10. Во сколько раз энергия фотона, соответствующего γ -излучению с частотой $\nu = 3 \cdot 10^{20}$ Гц, больше энергии фотона рентгеновского излучения с длиной волны $\lambda = 2 \cdot 10^{-10}$ м? Скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Вариант 2

(олимпиада-2005)

1. Тело движется прямолинейно с постоянным ускорением, отличным от нуля. За первую секунду движения тело прошло такой же путь $s = 5$ м, что и за вторую секунду. Определите начальную скорость тела.

2. Две шайбы массами m и $2m$, соединенные легкой пружиной, движутся вдоль одной прямой по горизонтальной поверхности (рис.4). В некоторый момент времени скорости шайб направлены одинаково, причем легкая шайба движется замедленно с ускорением $a_1 = 3$ м/с². Определите в этот момент времени величину a_2 и направление вектора ускорения тяжелой шайбы. Растянута или сжата пружина в этот момент? Коэффициент трения между каждой шайбой и поверхностью $\mu = 0,2$. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

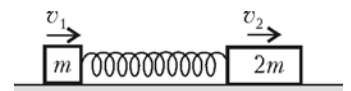


Рис. 4

3. Однородный стержень массой $m = 50$ г свободно вращается вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей через его конец. При вращении кинетическая энергия стержня меняется от минимального значения $E_{\min} = 0,1$ Дж до максимального $E_{\max} = 0,3$ Дж. Определите длину стержня l . Трением и сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

4. В сосудах объемами $V_1 = 10$ л и $V_2 = 20$ л находится воздух при одной и той же температуре. Относительная

влажность воздуха в первом сосуде $\phi_1 = 70\%$. После того как сосуды перенесли в другое помещение и соединили тонкой трубкой, относительная влажность воздуха в обоих сосудах стала $\phi = 20\%$. Изменилась ли (если изменилась, то в какую сторону) температура воздуха в сосудах? Ответ обоснуйте.

5. В стальном герметичном сосуде кубической формы с ребром $a = 1$ м и толщиной стенок $d = 1$ мм находится одноатомный идеальный газ при температуре $T = 300$ К и давлении $p = 10^5$ Па. Во сколько раз теплоемкость сосуда больше теплоемкости находящегося в нем газа? Плотность стали $\rho = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м³, ее удельная теплоемкость $c = 0,46 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К).

6. В схеме, изображенной на рисунке 5, емкость $C = 1$ мкФ, напряжение источника $U = 100$ В. а) Определите заряд каждого конденсатора до замыкания ключа K . б) Какой заряд q пройдет через источник после того, как ключ K будет замкнут?

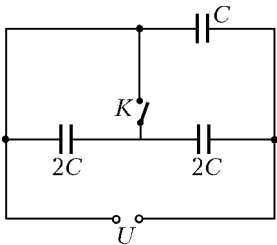


Рис. 5

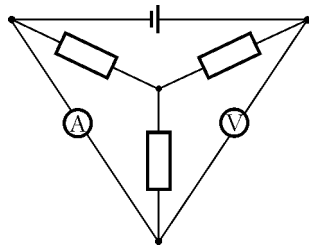


Рис. 6

7. Три одинаковых резистора, источник ЭДС, идеальный амперметр и идеальный вольтметр соединены, как показано на рисунке 6. Амперметр показывает ток $I = 1$ А, вольтметр показывает напряжение $U = 30$ В. Определите сопротивление R каждого резистора.

8. Электронагреватель сопротивлением $R = 20$ Ом подключена к источнику переменного тока. Определите количество теплоты Q , выделяемое печью за время $t = 1$ ч, если амплитуда силы тока равна $I_0 = 10$ А.

9. На каком расстоянии d друг от друга нужно расположить два стеклянных аквариума с водой, чтобы луч света,

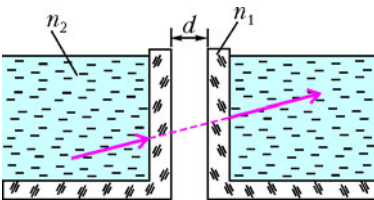


Рис. 7

падающий из воды на стенку одного из аквариумов, проник в другой аквариум без смещения (рис.7)? Показатель преломления стекла $n_1 = 1,6$, показатель преломления воды $n_2 = 4/3$. Стенки аквариумов параллельны, толщина каждой стенки $h = 1$ см. Угол падения луча считать малым.

Публикацию подготовили А.Берестов, И.Горбатый, И.Кожухов, С.Куклин, Т.Олейник, Т.Соколова

Московский государственный технический университет им. Н.Э.Баумана

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Два тела движутся равномерно по окружности в одну сторону. Первое тело проходит окружность за 3 с быстрее второго и догоняет второе тело каждые полторы минуты. За какое время каждое тело проходит окружность?

2. Решите уравнение

$$2 \cos^2 x = 3 \sin x.$$

Найдите его корни, лежащие в промежутке $[-3\pi/2; \pi/2]$.

3. Решите уравнение

$$3 \cdot 9^{\sqrt{x}} - 82 \cdot 3^{\sqrt{x}} + 27 = 0.$$

4. Решите неравенство

$$\log_2 \frac{x^2 - 4x}{x - 6} \leq 4.$$

5. Найдите угол между касательными к графику функции $y = x^2 \sqrt{3}/24$, проходящими через точку $M(4; -2\sqrt{3})$.

6. Определите все значения a , при которых уравнение

$$(x + a)^2 - 2a - 2 = |x| - |x - 2|$$

имеет хотя бы один корень, и решите его при каждом a .

7. Найдите площадь сечения правильной треугольной пирамиды $TABC$ плоскостью, которая проходит через середину бокового ребра TA , пересекает сторону основания AB в точке M так, что $BM = 2AM$, и параллельна медиане основания AD , если сторона основания пирамиды равна 3, а расстояние от вершины пирамиды T до секущей плоскости равно $1/4$.

Вариант 2

1. Когда из котлована выкачали $3/8$ находившейся в нем воды, насос заменили на более мощный, и вся работа двух насосов по осушению котлована заняла 15 ч. Если бы оба насоса работали одновременно, котлован осушили бы за 5 ч. За какое время можно выкачать воду из котлована каждым из насосов в отдельности?

2. Решите уравнение

$$\sqrt{1 - \cos x} = \sqrt{2} \sin x.$$

3. Решите уравнение

$$\log_4 (10x - 54) = 1 + \log_2 (x - 12).$$

4. Решите неравенство

$$\frac{x - 6\sqrt{x} + 5}{\sqrt{x} - 1} > x - 25.$$

5. На графике функции $y = 0,25x^2 - x + 8$ укажите такую точку A , чтобы площадь треугольника с вершинами A , $O(0; 0)$ и $B(5; 5)$ была наименьшей. Найдите эту площадь.

6. Определите все значения p , при которых уравнение

$$(x + p)^2 = 4(p + 1) + 8 \frac{|x|}{x}$$

имеет ровно два различных корня. Укажите эти корни при каждом из найденных значений p .

7. Найдите объемы частей, на которые делит правильную треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ плоскость, параллельная диагонали BA_1 боковой грани ABB_1A_1 , проходящая через вершину основания A и центр описанной около призмы сферы, если радиус сферы равен $\sqrt{5}$, а стороны основания призмы равны $\sqrt{6}$.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Алюминиевое кольцо подвешено на двух нитях (рис. 1). Северный полюс магнита приближается с некоторой скоростью к кольцу, двигаясь вдоль его оси перпендикулярно

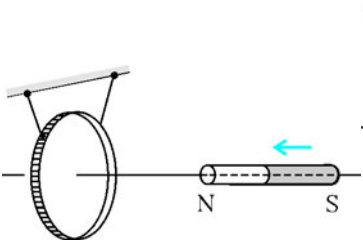


Рис. 1

плоскости кольца. Кольцо при этом будет притягиваться к магниту или отклоняться от него? Ответ поясните.

2. На рисунке 2 показан ход луча через собирающую линзу. Найдите построением положение главных фокусов линзы.

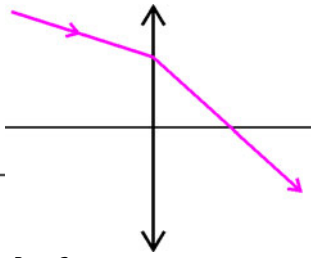


Рис. 2

3. По струне слева направо бежит поперечная гармоническая волна со скоростью $v = 40$ м/с (рис.3). Длина волны $\lambda = 60$ см, амплитуда $A = 2$ мм. Найдите скорость v_O точки O струны в момент времени, соответствующий рисунку.

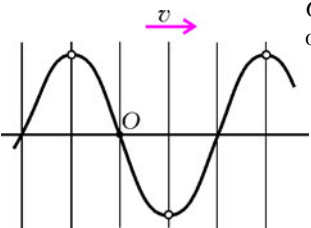


Рис. 3

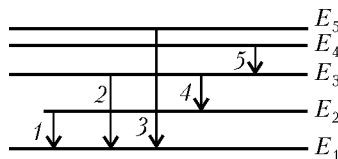


Рис. 4

4. На рисунке 4 представлена схема энергетических уровней атома. Какой цифрой обозначен переход с излучением фотона, имеющего максимальный импульс?

5. Призма 1, имеющая массу m , была положена на призму 2, имеющую массу $4m$ и угол с горизонтом $\alpha = 30^\circ$ (рис.5). Верхняя призма начала скользить по нижней и в некоторый момент времени двигалась по ней с относительной скоростью $v_{1\text{отн}}$. Каковую скорость относительно горизонтальной поверхности имела в этот момент нижняя призма? Силами трения пренебречь.

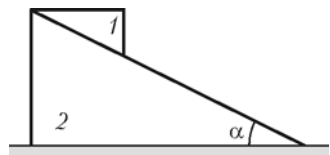


Рис. 5

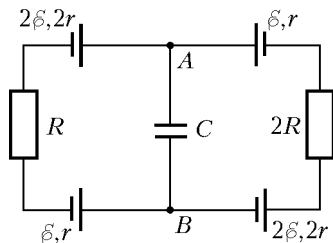


Рис. 6

6. В схеме, приведенной на рисунке 6, найдите энергию конденсатора. Параметры элементов схемы, изображенных на рисунке, считать известными.

7. Трос длиной L движется по инерции внутри горизонтальной трубы, которая изгибается в вертикальной плоскости под углом $\alpha = 30^\circ$. Когда трос, поднимаясь по трубе, остановился, в наклонной части трубы оказалась половина его длины. Определите, сколько времени прошло от начала подъема троса до момента, когда в наклонной части трубы оказалась четвертая часть его длины. Силами трения пренебречь.

Вариант 2

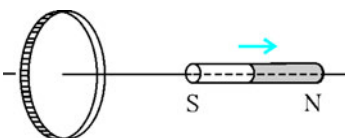


Рис. 7

1. Южный полюс магнита удаляется с некоторой скоростью от металлического кольца, двигаясь вдоль его оси перпендикулярно плоскости кольца (рис.7). Укажите направ-

ление индукционного тока в кольце. Ответ поясните.

2. Как изменится период колебаний в колебательном контуре (рис.8), состоящем из воздушного конденсатора и катушки индуктивности, если пространство между обкладками конденсатора заполнить диэлектриком? Ответ поясните.

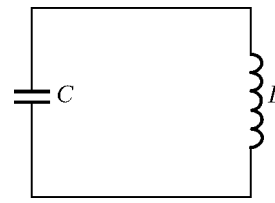


Рис. 8

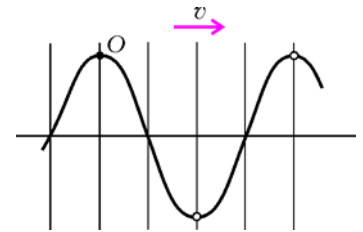


Рис. 9

3. По струне слева направо бежит поперечная гармоническая волна со скоростью $v = 40$ м/с. Длина волны $\lambda = 60$ см, амплитуда $A = 2$ мм. Найдите ускорение a точки O струны в момент времени, соответствующий рисунку 9.

4. Какой максимальный заряд q может накопиться на удаленном от других тел медном шарике радиусом $r = 3$ см при облучении его электромагнитным излучением с длиной волны $\lambda = 0,14$ мкм? Работа выхода для меди $A = 4,47$ эВ.

5. В сферическую полость поместили гантель – два шарика массой m каждый, соединенные невесомым жестким стержнем, – под углом $\alpha = 45^\circ$ к вертикали, как показано на рисунке 10. Определите силу давления нижнего шарика на стенку полости сразу же после того, как гантель отпустили. Радиус шариков гантели много меньше радиуса сферы. Силами трения пренебречь.

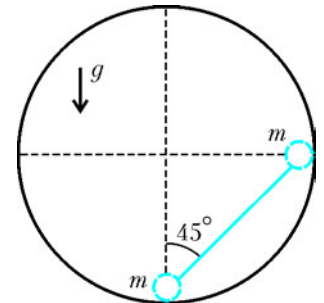


Рис. 10

6. На $V-T$ -диаграмме изображен цикл 1-2-3-4-1, совершаемый двумя молями азота и состоящий из двух изохор и двух изобар (рис.11). Известно, что точки 2 и 4 лежат

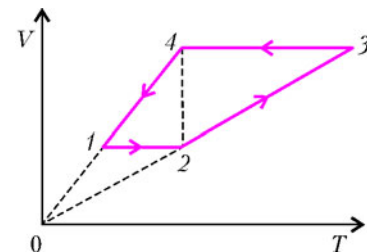


Рис. 11

на одной изотерме, а средние квадратичные скорости молекул азота составляют в точке 1 $v_1 = 300$ м/с, а в точке 3 $v_3 = 700$ м/с. Определите работу, совершаемую газом за цикл. Молярная масса азота $M = 0,028$ кг/моль.

7. Небольшой шарик, имеющий массу $3m$ и заряд q , находится на высоте h над землей. На одной вертикали с ним на высоте $3h$ находится второй шарик массой $2m$ и зарядом q . Шарики одновременно бросили в одну сторону в горизонтальном направлении с одинаковыми скоростями v . Нижний шарик коснулся земли на расстоянии L от вертикали бросания. На какой высоте в этот момент находился второй шарик? Сопротивлением воздуха и влиянием индуцированных на земле зарядов пренебречь.

Публикацию подготовили Л.Паршев, Ю.Струков

Московский инженерно-физический
институт

(олимпиада Федерального агентства
по атомной энергии РФ)

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. Решите неравенство

$$\frac{1}{\frac{1}{x-1} + \frac{3}{x-2}} \geq (x-1)(x-2).$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} |x+2| + \sqrt{4y-y^2} = 4, \\ (x+2)^2 + 4y - y^2 = 10. \end{cases}$$

3. Решите неравенство

$$\sin 3 \leq (\sin 3)^{12x-x^2}.$$

4. При всех действительных значениях параметра a решите уравнение

$$\arccos x - \arcsin 4x = \arcsin a.$$

5. Точки K и L лежат соответственно на смежных ребрах B_1C_1 и C_1D_1 верхнего основания $A_1B_1C_1D_1$ прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$), а точки M и N лежат соответственно на смежных ребрах AD и AB нижнего основания $ABCD$, при этом $AB=AD$, $CC_1=7$. Отрезки KL и MN параллельны диагонали основания $BD=12$. Расстояние от MN до точки A равно 1, а расстояние от KL до точки C_1 равно a . Точка $P \in CC_1$, $C_1P=2$. Найдите:

- объем пирамиды C_1KLP в случае $a=5$;
- площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через прямые KL и MN , в случае $a=5$;
- максимальную площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через прямые KL и MN , в случае если $a \in [4; 6]$.

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + 3 \sin 2x.$$

2. Двое рабочих, работая вместе, за четыре часа полностью выполняют задание. Известно, что за три часа первый рабочий выполняет на одну треть задания больше, чем второй рабочий выполняет за два часа. За сколько часов выполнит задание один второй рабочий?

3. Решите неравенство

$$\log_5(\sqrt{7}-2)^{x^2+3x+2} \leq \log_{25}(\sqrt{7}-2)^{x^2+6x+5}.$$

4. При всех действительных значениях параметра a решите неравенство

$$\arcsin\left((x-2)^2 + (a+2)^2\right) \geq \frac{\pi}{6};$$

среди всех решений найдите x , при котором произведение $(a+2)(x-2)$ принимает наибольшее значение.

5. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $AB=7$, $BC=6$, $AA_1=9$. На ребрах CC_1 и BB_1 взяты точки E и F соответственно так, что $C_1E=3$, а $BF=2$. Найдите: а) площадь треугольника A_1EF ; б) сумму расстояний от точки G , взятой на отрезке A_1D , до прямых AA_1 и EF при условии, что она минимальна.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. Ускорение свободного падения на поверхности некоторой планеты равно g . Найдите ускорение свободного падения на поверхности другой планеты, масса которой в k раз больше, а радиус в n раз меньше, чем у первой.

2. На краю горизонтального диска находится тело массой m , привязанное нитью длиной l к оси диска (рис.1). Нить составляет с осью угол α . Диск вращается вокруг своей оси, при этом тело вращается вместе с ним. При какой угловой скорости тело оторвется от диска?

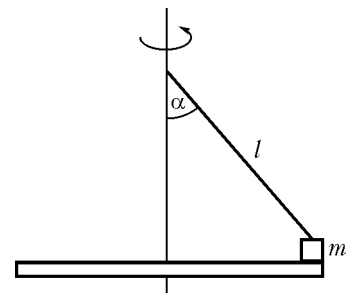


Рис. 1

3. Две открытые с обоих концов в атмосферу трубы с площадями сечений S_1 и S_2 ($S_1 > S_2$) состыкованы между собой (рис.2). В них вставлены соединенные стержнем поршни, которые при температуре T_0 отстоят на одинаковые расстояния от стыка труб. Между поршнями находится идеальный газ. При какой температуре газа правый поршень сместится влево так, что расстояние от него до стыка труб будет втрое меньше расстояния от стыка до левого поршня? Ответ обоснуйте.

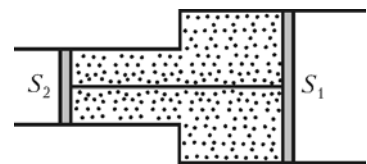


Рис. 2

4. В цилиндрический сосуд площадью сечения $S=100 \text{ см}^2$ налита жидкость плотностью $\rho=1 \text{ г/см}^3$. В сосуде плавает кубик со стороной $a=7 \text{ см}$, погрузившись на k -ю часть своего объема ($k=2/3$). Две грани кубика параллельны поверхности жидкости. Какую работу нужно совершить, чтобы медленно погрузить кубик в жидкость на n -ю часть объема ($n=4/5$)? При погружении кубика в жидкость две его грани остаются параллельными поверхностям жидкости. Ускорение свободного падения $g=10 \text{ м/с}^2$.

5. Однородно заряженный куб с ребром a создает в своей вершине A (рис.3) электрическое поле напряженностью E_0 .

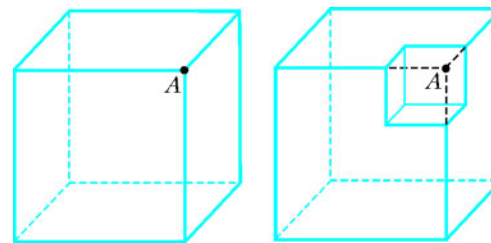


Рис. 3

Из куба удаляют кусок в форме меньшего куба с ребром a_1 ($a_1 < a$), а к заряду оставшейся части куба добавляют удвоенный заряд удаленного куска, распределяя его равномерно. Чему теперь равна напряженность электрического поля в точке A ?

Вариант 2

1. На рисунке 4 изображены точечный источник света S , его изображение S' в тонкой линзе и главная оптическая ось линзы. С помощью построения найдите положение линзы и ее фокусов. Построение обоснуйте.

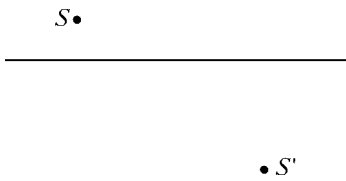


Рис. 4

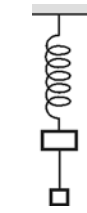


Рис. 5

2. Два тела с разными массами связаны невесомой нитью и подвешены за тело с большей массой к пружине, привязанной к потолку (рис.5). Если нить между телами перерезать, тело с большей массой будет в первый момент иметь ускорение a_1 . Какое ускорение будет иметь в первый момент тело с меньшей массой, если тела подвесить к пружине за него, а затем перерезать нить?

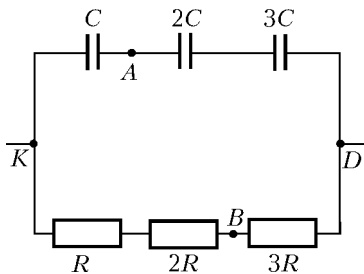


Рис. 6

3. В схеме, представленной на рисунке 6, найдите разность потенциалов $\Phi_A - \Phi_B$ между точками A и B. Разность потенциалов между точками K и D известна: $\Phi_K - \Phi_D = \Delta\phi$, значения сопротивлений и емкостей приведены на рисунке.

4. Известно, что КПД двигателя, работающего по циклическому процессу 1-2-3-4-1, график которого в координатах $p-V$ представляет собой параллелограмм (рис.7), равен η . Найдите КПД двигателя, работающего по циклическому процессу 1-3-4-1. Рабочее тело двигателя – одноатомный идеальный газ.

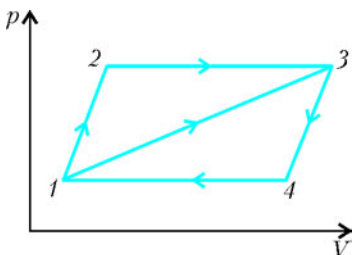


Рис. 7

5. Тело составлено из четырех склеенных полушаров (рис.8). Центры всех полушаров лежат на одной прямой, при этом центры нижнего полушара и центрального верхнего совпадают, расстояния от центров крайних верхних полушаров до центра нижнего равны. Радиус нижнего полушара $R_1 = 8$ см, его плотность $\rho_1 = 1$ г/см³, радиус центрального верхнего полушара $R_2 = 3$ см, его плотность $\rho_2 = 15$ г/см³, крайние верхние полушары одинаковы, их радиусы $R_3 = 4$ см, плотности $\rho_3 = 4$ г/см³. Будет ли положение тела, изображенное на рисунке, устойчивым? Ответ обоснуйте.

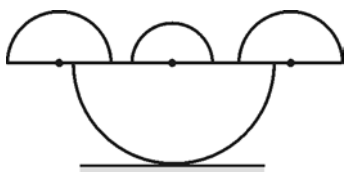


Рис. 8

Публикацию подготовили С.Муравьев, О.Нагорнов

Новосибирский государственный университет

ФИЗИКА

Письменные экзамен

Физический факультет

Каждый вариант состоял из трех типов задач. Первые три задачи – расчетные, различной степени трудности: от почти стандартных до сравнительно сложных, требующих смека-

ки, глубоких знаний, умения ориентироваться в непривычной или усложненной ситуации.

Четвертая задача – задача-оценка. Для ее решения необходимо разобраться в рассматриваемом физическом явлении, сформулировать простую (так как нужна только оценка) физическую модель этого явления, выбрать разумные числовые значения физических величин и, наконец, получить численный результат, более или менее соответствующий реальности. В тексте задачи подчеркивается, что абитуриент может сам выбрать необходимые для решения задачи величины и их числовые значения.

Пятая задача – задача-демонстрация, при решении которой надо объяснить физическое явление, демонстрируемое в аудитории. Среди различных факторов, влияющих на процесс, необходимо выделить главный.

Вариант 1

1. К источнику постоянного напряжения подсоединена нагрузка, имеющая постоянное сопротивление. На подводящих проводах выделяется энергия, составляющая долю $\beta_1 = 0,1$ от общей энергии, получаемой от источника. Во сколько раз нужно увеличить сечение подводящих проводов, чтобы уменьшить долю потерь в проводах до $\beta_2 = 0,01$?

2. Невесомые стержни связаны невесомыми пружинами жесткостью k_0 у верхней и нижней пружиной и жесткостью k у средних пружиной, присоединенных к телу массой m (рис.1).

Исходно пружины не деформированы. Под действием силы, приложенной к правому стержню, система начинает двигаться с постоянным ускорением a , направленным вдоль пружиной. Найдите, на сколько при этом возрастет расстояние между стержнями.

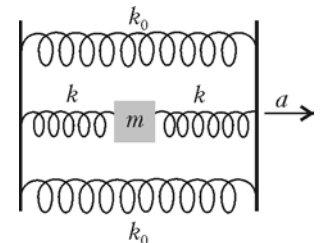


Рис. 1

3. Незаряженные проводящие пластины имеют по два обширных плоских параллельных участка площадью S_1 и S_2 с малыми зазорами d_1 и d_2 между ними (рис.2). Протяженность области изгиба мала в сравнении с размерами пластин. Перпендикулярно плоскости симметрии пластин включают внешнее однородное электрическое поле напряженностью E . Найдите напряженности E_1 и E_2 полей внутри зазоров между плоскими участками.

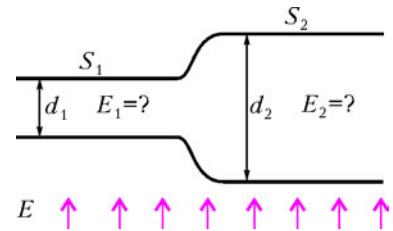


Рис. 2

4. Стальную пластинку погружают плашмя в воду в глубоком озере и отпускают. Оцените, во сколько раз возрастет разность давлений на нижнюю и верхнюю поверхности пластинки на большой глубине по сравнению с начальным моментом движения.

5. Сосуд с плоским дном установлен с небольшим наклоном, в сосуде – холодная вода. Чашку ставят вверх дном до соприкосновения ее с дном сосуда. Она остается на месте. Заменяют холодную воду нагретой. Поставленная таким же образом чашка через некоторое время начинает соскальзывать. Объясните явление.

Вариант 2

1. Капля, падающая вертикально, пролетает мимо окна высотой h за время t . Найдите ее скорости при пролете мимо нижнего и верхнего краев окна. Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения равно g .

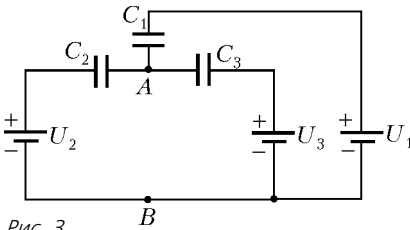


Рис. 3

2. Батареи с напряжениями U_1 , U_2 и U_3 соединили так, что они имеют общий «минус» (рис.3). Плюсы этих батарей подсоединили к трем обкладкам исходно незаряженных конденсаторов с емкостями C_1 , C_2 и C_3 , а три другие обкладки конденсаторов соединили проводниками в точке А. Каково напряжение между точками А и В?

3. В вертикальном теплоизолированном цилиндре находится гелий, давление которого уравнивает поршень массой M с подвешенным к нему грузом массой m (рис.4). Выше поршня – вакуум. Поршень находится на высоте H , а груз – на высоте H_0 над дном цилиндра. Груз отрывается, падает на дно и прилипает к нему. На сколько поднимется поршень, когда снова установится равновесие? Считать, что вся выделенная энергия пошла на нагрев газа. Объем груза мал по сравнению с объемом гелия. Ускорение свободного падения равно g .

Рис. 4

4. Оцените, на сколько масса стакана с тяжелой водой (D_2O) больше массы стакана с обычной водой.

5. Из бумаги склеены два одинаковых конуса, пример выкройки конуса приведен на рисунке 5. Один конус обрезают по краю и вкладывают в него обрезки. Если конусы одновременно отпустить с одной и той же высоты, один из них при падении заметно отстает от другого. Если из меньшего конуса убрать обрезки, то отпущенные одновременно конусы достигают пола одновременно. Объясните, почему так происходит.

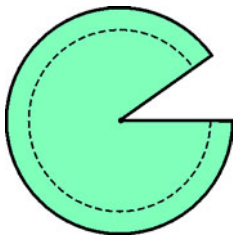


Рис. 5

Публикацию подготовили
Е.Балдин, И.Воробьев, Г.Меледин

Российский государственный педагогический университет им. А.И.Герцена

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Математический факультет

Вариант 1

1. Разложите число 16 на множители так, чтобы их сумма была равна 10. Найдите частное от деления большего множителя на меньший.

2. При каких значениях переменной x значения функции

$$y = 4 \log_{1/9}^2 x + 2,5 \left| \log_{1/3} x \right| - 1,5$$

не меньше 0?

3. Найдите наибольшее целое значение y , для которого

$$2^{2y} \cdot 6^y \geq 2^y \cdot 3^{3y}.$$

4. Найдите все решения уравнения

$$\cos 7x - \cos(2\pi - x) - \cos\left(\frac{3}{2}\pi - 3x\right) = 0.$$

5. При каких k уравнение

$$kx^2 + 2(k+1)x + 2k = 0$$

имеет корни одного знака?

6. Решите неравенство

$$\sqrt{5x - x^2} \geq x - 2.$$

7. Найдите сумму всех трехзначных натуральных чисел, кратных 5.

8. Из точки А окружности радиуса 8 проведены две равные хорды АВ и АС, образующие угол 60° . Найдите расстояние от центра этой окружности до прямой ВС.

9. Один из катетов равнобедренного прямоугольного треугольника лежит в плоскости α , а другой образует с ней угол, равный 45° . Найдите угол, который образует гипотенуза с плоскостью α .

Вариант 2

1. Половину пути мотоциклист ехал с намеченной скоростью 45 км/ч. Затем задержался на 10 мин, а поэтому, чтобы наверстать потерянное время, он увеличил скорость на 15 км/ч. Каков весь путь мотоциклиста?

2. Определите сумму нечетных чисел первой сотни.

3. Решите уравнение

$$8^4 \sqrt{6-x-x^2} - 16^6 \sqrt{x^2-4} = 0.$$

4. Решите неравенство

$$\log_9 x^2 - 6 \log_x 3 \leq 1.$$

5. Найдите наименьшее целое решение неравенства

$$(x+1)\sqrt{16-x^4} \geq 0.$$

6. Вычислите

$$\frac{2 \sin \alpha + \left(\sin \alpha + \sin \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) \right)^2 - 1}{-2 \cos \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha \right) - \sin 2\alpha},$$

если $\cos \alpha = 0,5$.

7. При каких значениях b уравнение

$$x + 2 = \frac{1 + 3b}{x}$$

имеет два корня?

8. Найдите длину основания равнобедренного треугольника, площадь которого равна 25, а углы α при основании таковы, что $\operatorname{tg} \alpha = 4$.

9. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна $3\sqrt{3}$, боковая грань наклонена к плоскости основания под углом 30° . Найдите объем пирамиды.

Публикацию подготовили
О.Корсакова, Н.Подходова

Российский государственный технологический университет им. К.Э.Циолковского (МАТИ)

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$\sqrt{x^2 - 9x - 22} \sqrt{x^2 - 4x - 21} = 0.$$

2. Решите уравнение

$$\log_2^2 x^4 + 3 \log_2 x^2 - 1 = 0.$$

3. Решите неравенство

$$\sqrt{2x\sqrt{4x^2+3}} \geq \sqrt{4x^2+3} - 4x.$$

4. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ проведены диагонали AC и BD . Найдите отношение $\angle ADB : \angle DBC$, если $\angle CAB : \angle ABC : \angle BCA = 1 : 16 : 3$, $\angle DAC = 54^\circ$ и $DA = DC$.

5. При каких значениях параметра c уравнение

$$3 \sin x + 3 \cos x + 2 \sin 2x + c = 0$$

имеет решение?

Вариант 2

(олимпиада-2005)

1. Две команды, каждая из трех спортсменов, участвуют в эстафете, состоящей из трех этапов одинаковой длины. Спортсмены первой команды на всех этапах бегут с одинаковой скоростью. На 1-м этапе спортсмен второй команды бежит медленнее своего соперника на 1 км/ч, на 2-м этапе спортсмены обеих команд бегут с одинаковой скоростью, а на 3-м этапе спортсмен второй команды бежит быстрее своего соперника на 1 км/ч. Определите команду-победительницу.

2. Решите неравенство

$$|2x - 1| - |x| + |x + 1| > 315 - 100\pi.$$

3. Покажите, что если $p > 0$ и $q > 0$, то квадратные трехчлены $x^2 + px - q$ и $-x^2 + px + q$ имеют действительные корни, причем между корнями каждого из них находится один из корней другого.

4. В треугольнике ABC с отношением сторон $AB : AC = 2$ проведены медиана BD и биссектриса AE , а через точку их пересечения проведена прямая CF . Найдите отношение площадей треугольников DEF и ABC .

5. При каком наибольшем значении a уравнение

$$2 \sin x + b \sin 2x + a = 1 - 2 \cos x$$

имеет решение для всех b ?

6. Найдите все целые решения уравнения

$$xy^2 - x^3 + y^2 - x^2 = 16.$$

7. Докажите неравенство

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2003}{2004} < \frac{1}{\sqrt{2005}}.$$

8. Найдите область значений функции

$$y = \sqrt{7x - x^2} - \sqrt{35 + 2x - x^2}.$$

9. Изобразите множество точек $(x; y)$, задаваемых неравенством

$$x^2 - 4|x| + y^2 - 4|y| + \frac{8}{3} \leq 0,$$

и найдите его площадь.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(олимпиада-2005)

Выберите правильный ответ

1. Автомобиль трогается с места, в течение 8 с равноускоренно разгоняется и, набрав скорость 50 м/с, затем движется с постоянной скоростью. Через какое время автомобиль окажется на расстоянии 1 км от начальной точки?

- 1) 16 с; 2) 18 с; 3) 20 с; 4) 24 с; 5) 28 с.

2. Тело бросают с поверхности земли, его начальная скорость направлена под углом 30° к горизонту. Найдите дальность броска L , если в полете тело поднималось на максимальную высоту h над землей. Сопротивлением воздуха пренебречь.

- 1) $L = \sqrt{3}h$; 2) $L = 2\sqrt{3}h$; 3) $L = 4\sqrt{3}h$; 4) $L = 2h$; 5) $L = 4h$.

3. Два шара движутся навстречу друг другу по одной прямой. Массы шаров m_1 и $m_2 = 2m_1$. Кинетическая энергия первого шара равна 4 Дж. Какой кинетической энергией должен обладать второй шар, чтобы в результате соударения шары остановились?

- 1) 1 Дж; 2) 2 Дж; 3) 4 Дж; 4) 8 Дж; 5) 12 Дж.

4. В баллоне находится идеальный газ при температуре 60°C и давлении 100 кПа. Из баллона выпускают половину газа, а оставшийся нагревают на 60°C . Каким станет давление в баллоне?

- 1) 100 кПа; 2) 169 Па; 3) 236 кПа; 4) 59 кПа; 5) 75 кПа.

5. Одно и то же количество идеального газа переходит из состояния 1 в состояние 2 тремя различными способами (рис. 1). В каком из трех процессов a, b, c изменение внутренней энергии газа максимально?

- 1) a ; 2) b ; 3) c ; 4) ΔU одинаково во всех процессах; 5) $\Delta U = 0$ во всех процессах.

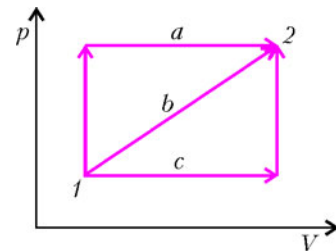


Рис. 1

6. Имеются два заряженных конденсатора: емкость первого 100 мкФ, напряжение на нем 200 В; емкость второго 400 мкФ, напряжение на нем 300 В. Одноименные пластины конденсаторов соединяют тонкими проводниками. Какое напряжение установится в системе?

- 1) 240 В; 2) 250 В; 3) 260 В; 4) 280 В; 5) 290 В.

7. К источнику ЭДС с внутренним сопротивлением 4 Ом подключен реостат. Укажите два значения сопротивления реостата, при которых на нем выделяется одна и та же мощность. Сопротивлением проводов пренебречь.

- 1) 1 Ом и 5 Ом; 2) 1 Ом и 16 Ом; 3) 2 Ом и 6 Ом; 4) 2 Ом и 10 Ом; 5) 2 Ом и 16 Ом.

8. Сила тока через катушку индуктивности изменяется в соответствии с графиком на рисунке 2. Во сколько раз отличаются энергии магнитного поля катушки в моменты времени $t_1 = 0,4$ с и $t_2 = 2$ с?

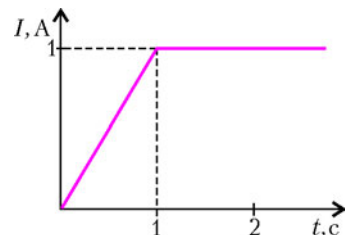


Рис. 2

- 1) в 2,5 раза; 2) в 5 раз; 3) в 6,25 раз; 4) в 7,5 раз; 5) в 25 раз.

9. При колебаниях маятника его координата изменяется по закону $x(t) = 0,05 \sin 10t$ (м). Найдите скорость маятника в начальный момент $t = 0$.

- 1) 0,05 м/с; 2) 0,1 м/с; 3) 0,5 м/с; 4) 2 м/с; 5) 0.

10. На дифракционную решетку по нормали падает монохроматический свет. Известно, что период решетки в 10 раз больше длины волны падающего света. Под каким углом дифракции будет наблюдаться максимум 1-го порядка?

- 1) $\arcsin 0,1$; 2) $\arcsin 0,05$; 3) $\arcsin 0,01$; 4) 10° ; 5) 30° .

Вариант 2

Выберите правильный ответ

1. Массы тел, изображенных на рисунке 3, равны $m_1 = 1$ кг, $m_2 = 2$ кг, $m_3 = 3$ кг; нити невесомые и нерастяжимые. К первому телу приложена горизонтальная сила $F = 6$ Н. Найдите силу натяжения нити, которая связывает тела массами m_1 и m_2 . Трения нет.

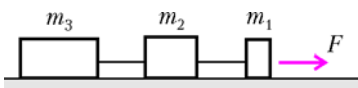


Рис. 3

1) 6 Н; 2) 2 Н; 3) 3 Н; 4) 4 Н; 5) 5 Н.
2. Тело бросают с начальной скоростью, направленной под углом 60° к горизонту, сообщив ему кинетическую энергию 20 Дж. Найдите кинетическую энергию тела в верхней точке траектории. Сопротивлением воздуха пренебречь.

1) 5 Дж; 2) 10 Дж; 3) 20 Дж; 4) 17,3 Дж; 5) 0.

3. Тележка едет без трения по столу. На тележку быстро насыпают песок, масса которого равна массе тележки. Сравните кинетическую энергию тележки с песком K_2 с начальной кинетической энергией тележки K_1 .

1) $K_2 > K_1$ в 2 раза; 2) $K_2 > K_1$ в 4 раза; 3) $K_2 = K_1$; 4) $K_2 < K_1$ в 2 раза; 5) $K_2 < K_1$ в 4 раза.

4. Когда из баллона выпустили некоторое количество газа, давление в баллоне уменьшилось в 4 раза, а абсолютная температура газа понизилась на 25%. Какую часть газа выпустили?

1) $1/2$; 2) $2/3$; 3) $3/4$; 4) $3/5$; 5) $4/5$.

5. Расширяясь, одноатомный идеальный газ совершил работу 200 Дж. Как изменилась внутренняя энергия газа, если в ходе расширения он не получал и не отдавал тепло?

1) Уменьшилась на 200 Дж; 2) не изменилась; 3) увеличилась на 200 Дж; 4) увеличилась на 300 Дж; 5) увеличилась на 500 Дж.

6. Плоский воздушный конденсатор отключают от источника и заполняют диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 4$. Как изменится при этом энергия электрического поля конденсатора?

1) Увеличится в 4 раза; 2) увеличится в 2 раза; 3) уменьшится в 4 раза; 4) уменьшится в 2 раза; 5) не изменится.

7. Два резистора сопротивлениями R_1 и R_2 соединены параллельно. Сила тока через резистор сопротивлением R_1 равна 2 А, напряжение на резисторе сопротивлением R_2 равно 4 В. Что можно сказать о величинах сопротивлений резисторов?

1) $R_1 = 2$ Ом; 2) $R_2 = 2$ Ом; 3) $R_1 = R_2 = 2$ Ом; 4) $1/R_1 + 1/R_2 = 2$ Ом; 5) $R_1 + R_2 = 0,5$ Ом.

8. Заряженная частица движется в однородном магнитном поле по окружности радиусом R . Сила, действующая на частицу со стороны магнитного поля (сила Лоренца), равна F . Найдите работу этой силы за один оборот.

1) $2RF$; 2) πRF ; 3) $2\pi RF$; 4) сила не совершает работы; 5) работа зависит от скорости частицы.

9. Амплитуда колебаний математического маятника 25 см, его максимальная скорость 0,44 м/с. Найдите длину маятника. Колебания можно считать гармоническими.

1) 0,57 м; 2) 1,76 м; 3) 2,6 м; 4) 3,2 м; 5) 5,7 м.

10. Найдите максимально возможный угол преломления луча, который входит в стекло из воздуха. Показатель преломления стекла 1,5, показатель преломления воздуха 1.

1) 45° ; 2) 60° ; 3) 90° ; 4) $\arcsin(3/4)$; 5) $\arcsin(2/3)$.

Публикацию подготовили Е. Веденская, В. Галкин, М. Кузьмин, Т. Медина, А. Миронов, В. Мирошкин, Л. Муравей, Е. Никулин, В. Панферов, А. Покровский

Российский государственный университет нефти и газа им. И.М.Губкина

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Упростите выражение

$$\frac{a - 0,25}{\sqrt{a} - 0,5} - \frac{a\sqrt{a} - 0,125}{a + 0,5\sqrt{a} + 0,25}$$

2. Найдите наибольшее целое решение неравенства

$$\sqrt{3(10 - x)} > 4 - x$$

3. Сумма 7-го и 16-го членов арифметической прогрессии равна 11. Найдите сумму первых 22 членов этой прогрессии.

4. Решите уравнение

$$|-x^2 - 4| = -4x$$

5. Решите уравнение

$$2^x + 2^{x+2} = 20$$

6. Вычислите

$$\frac{3^{-\log_3 2} - 1}{\log_2 \sqrt{2}}$$

7. Вычислите

$$\cos 95^\circ \cos 5^\circ + 0,5(\sin 10^\circ + 1)$$

8. Найдите в градусах наибольший отрицательный корень уравнения

$$\operatorname{tg}(75^\circ + x) + \operatorname{tg}(15^\circ - x) = 2$$

9. Найдите наибольшее целое значение параметра a , при котором через начало координат проходят три различные прямые, касающиеся графика функции

$$y = x^3 + 10,8x^2 - 25x + a$$

10. Сколько целых чисел входит в область решений неравенства

$$\log_{|x|}(4x + 140) \geq 2?$$

11. В прямоугольный треугольник с гипотенузой 1,84 и периметром 4 вписана окружность. Вторая окружность проходит через вершины острых углов так, что вписанная окружность касается ее изнутри. Найдите радиус второй окружности.

12. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ противоположные боковые ребра пирамиды образуют угол φ , $\cos \varphi = 0,25$. Около пирамиды $SABCD$ описан шар радиуса 9. Найдите радиус шара, описанного около пирамиды $MABCD$, где M – середина какого-нибудь бокового ребра пирамиды.

Вариант 2

1. Упростите выражение

$$\left(\frac{2\sqrt{3}xy}{x^2y^2 - \sqrt{3}} + \frac{xy - \sqrt{3}}{2xy + 2\sqrt{3}} \right) \frac{2xy}{xy + \sqrt{3}} - \frac{xy}{xy - \sqrt{3}} + 1$$

и найдите его значение при $x = 19/31$, $y = 98/15$.

2. Решите уравнение

$$\sqrt{0,5(x^2 - 11x + 32)} = x - 6$$

3. Произведение 6-го и 46-го членов геометрической про-

грессии равно 0,81. Найдите 26-й член этой прогрессии, если известно, что он положителен.

4. Найдите наибольшее целое отрицательное решение неравенства

$$|x + 7,5| > 10.$$

5. Найдите наибольшее целое решение неравенства

$$\frac{(\sqrt{3})^{x-17}}{5^{x-17}} > \frac{3\sqrt{3}}{125}.$$

6. Вычислите

$$\log_{3,8} 10 \cdot \lg \sqrt[3]{3,8}.$$

7. Вычислите

$$\frac{2 \sin^2 50^\circ - 1}{2 \operatorname{ctg} 95^\circ \cos^2 175^\circ}.$$

8. Найдите в градусах наименьший положительный корень уравнения

$$\cos \frac{\pi}{3} \sin 4x - \sin \frac{\pi}{3} \cos 4x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

9. При каком значении параметра a существует единственная прямая, касающаяся графика функции $y = x^2 + a$ и графика функции $y = \frac{\sqrt{6}}{9} x^3$?

10. Найдите меньший корень уравнения

$$\frac{x}{90} = \left(\frac{10}{3}\right)^{\log_x 300}.$$

11. Около прямоугольного треугольника с гипотенузой 64 описана окружность. В него же вписана окружность, касающаяся гипотенузы в точке M . Окружность радиуса 9 касается вписанной окружности снаружи в точке M и описанной окружности – изнутри. Найдите радиус вписанной окружности.

12. Перпендикуляр, опущенный из центра основания O правильной четырехугольной пирамиды на ее боковую грань, пересекает эту грань в точке N , а вписанную в пирамиду сферу – в точке M . Известно, что $OM = ON = 2$. Найдите объем пирамиды.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Внимание! Если единицы не указаны, выразите ответ в единицах СИ. Ускорение свободного падения g считайте равным 10 м/с^2 (кроме особо оговоренных случаев).

Вариант 1

1. За две секунды движения тело прошло путь 20 м, при этом его скорость, не меняя направления, увеличилась в 3 раза по сравнению с первоначальной. Каково было ускорение тела?

2. На наклонной плоскости длиной 15 м и высотой 9 м лежит груз массой 15 кг. Коэффициент трения равен 0,8. Какую минимальную силу надо приложить к грузу вдоль плоскости, чтобы сдвинуть груз вниз?

3. Шар массой 100 г, двигавшийся со скоростью 5 м/с, сталкивается абсолютно неупруго с шаром массой 150 г, двигавшимся в том же направлении со скоростью 4 м/с. Найдите скорость шаров после удара. Ответ дайте в см/с.

4. Однородный стержень с прикрепленным на одном из его концов грузом массой 7,5 кг находится в равновесии, если точка опоры отстоит от груза на $1/7$ длины стержня. Чему равна масса стержня?

5. При изобарном расширении газ совершил работу 200 Дж, а его внутренняя энергия увеличилась при этом на 500 Дж. Затем газу в изохорном процессе сообщили такое же количество теплоты, как и в первом случае. На сколько увеличилась внутренняя энергия газа в результате этих двух процессов?

6. Какую работу (в мДж) надо совершить, чтобы переместить заряд 50 мкКл в однородном поле напряженностью 2 кВ/м на расстояние 0,7 м, если перемещение происходит под углом 60° к силовым линиям поля? В ответе укажите модуль полученной величины.

7. Три источника постоянного тока с ЭДС 1 В, 3 В и 5 В и внутренними сопротивлениями 1 Ом каждый соединены последовательно и замкнуты накоротко. Определите силу тока в цепи.

8. Изображение предмета в собирающей линзе получено в натуральную величину. Во сколько раз уменьшится размер изображения, если расстояние от предмета до линзы увеличить в 4 раза?

9. Демонстрационная установка состоит из наклонной плоскости, плавно переходящей в «мертвую петлю» радиусом R . Установка закреплена на тележке, стоящей на горизонтальной плоскости. Груз массой 0,2 кг съезжает с высоты $2,5R$, отсчитанной от нижней точки петли. Чему равна сила давления груза на поверхность в верхней точке петли? Трением пренебречь. Масса установки вместе с тележкой вдвое больше массы груза.

10. Объем цилиндра откачивающего поршневого насоса в 4 раза больше объема откачиваемого сосуда. За сколько ходов поршня давление в сосуде упадет от атмосферного (100 кПа) до 800 Па? Температура постоянна.

11. Два иона, имеющие одинаковые заряды, но различные массы, влетели в однородное магнитное поле. Первый начал двигаться по окружности радиусом 8 см, второй – по окружности радиусом 2 см. Во сколько раз масса первого иона больше, чем масса второго, если известно, что они прошли одну и ту же разность потенциалов?

12. К динамометру, закрепленному вертикально, подвесили груз. При этом груз стал совершать гармонические колебания с циклической частотой 5 с^{-1} . На сколько сантиметров окажется растянутой пружина динамометра после полного прекращения колебаний груза?

Вариант 2

1. Мяч брошен с некоторой высоты вертикально вниз со скоростью 4,5 м/с. Найдите среднюю скорость движения мяча за первые пять секунд движения. Ускорение свободного падения $9,8 \text{ м/с}^2$.

2. В лифте, поднимающемся с ускорением $1,4 \text{ м/с}^2$, на пружине жесткостью 700 Н/м висит груз массой 0,5 кг. Чему равно (в мм) удлинение пружины? Ускорение свободного падения $9,8 \text{ м/с}^2$.

3. Тело массой 2 кг поднимают с земли вертикально вверх, прикладывая силу 30 Н. Какую мощность развивает эта сила через 2 с после начала подъема?

4. Определите массу (в тоннах) льдины, плавающей в воде, если объем выступающей части льдины 4 м^3 . Плотность льда 900 кг/м^3 , плотность воды 1000 кг/м^3 .

5. На электроплитке мощностью 1200 Вт нагревается до кипения 2,4 кг воды за 20 мин. Начальная температура воды 2° C , удельная теплоемкость воды $4200 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{K)}$. Определите КПД (в процентах) установки.

6. Две параллельные металлические пластины, находящиеся на расстоянии 5 см друг от друга в вакууме, заряжены до разности потенциалов 2 кВ. Какая сила будет действовать на

заряд 300 мкКл, помещенный между пластинами? Поле между пластинами считать однородным.

7. В однородном магнитном поле находится плоский виток площадью $0,001 \text{ м}^2$, расположенный перпендикулярно линиям поля. Какой величины ток (в мкА) потечет по витку, если индукция поля будет убывать с постоянной скоростью $0,05 \text{ Тл/с}$? Сопротивление витка 2 Ом .

8. Математический маятник длиной $0,1 \text{ м}$ совершает гармонические колебания с амплитудой $0,07 \text{ м}$. Определите наибольшее ускорение грузика маятника.

9. На чашку весов массой 200 г , подвешенную на пружине, с высоты 30 см падает груз массой 800 г . Найдите амплитуду (в см) колебаний чашки с грузом после абсолютно неупругого удара. Жесткость пружины 400 Н/м .

10. Идеальный газ нагревают сначала изобарно от 300 К до 450 К , а затем – изохорно до 600 К . После этого газ изобарно сжимают до первоначального объема. Чему равна конечная температура газа (в кельвинах)?

11. При ремонте электроплитки длина спирали была увеличена на $0,25$ первоначальной длины. На сколько процентов уменьшилась мощность плитки?

12. Собирающая линза дает на экране четкое изображение предмета, увеличенное в 2 раза. Расстояние между предметом и экраном на 15 см больше двойного фокусного расстояния линзы. Найдите (в см) расстояние от линзы до экрана.

Публикацию подготовили Б.Писаревский, А.Черноуцан

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(физико-механический факультет)

1. Упростите выражение

$$\frac{(x-2)^2}{(x-1)(x^2-x-2)} + \frac{x^2+2x-8}{(x+1)(x^2-3x+2)}.$$

2. Решите уравнение

$$x + 2\sqrt{x} = 8.$$

3. Найдите произведение общих корней уравнений

$$x^2 + 4x + 2 = 0 \text{ и } x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0.$$

4. Найдите наименьший из общих положительных периодов функций $\sin^2 9x$ и $\text{tg}^2 6x$.

5. Найдите функцию $y = f(x)$, график которой симметричен графику функции $y = \frac{1}{x}$ относительно точки $(-1; 1)$.

6. Найдите множество значений функции

$$y = \frac{x^2 + 5}{x + 2}.$$

7. Решите уравнение

$$\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} = \sqrt[3]{2x+3}.$$

8. Решите неравенство

$$\sqrt{\left(\frac{x}{4} + \frac{1}{x}\right)^2} - 1 \leq \frac{x}{4} - \frac{1}{x}.$$

9. Найдите радианную меру угла

$$\alpha = \text{arccctg} \frac{\text{tg} \frac{\pi}{8} - \text{ctg} \frac{\pi}{8}}{2}.$$

10. Решите уравнение

$$\text{tg} x - \frac{1}{\cos x} = 1.$$

11. Решите уравнение

$$3\text{arctg}^2 x + \text{arccctg}^2 x = \frac{\pi^2}{4}.$$

12. Решите уравнение

$$2^{\sqrt{-x}} \cdot 3^{-\sqrt{-x}} = 2^x \cdot 3.$$

13. Найдите сумму корней уравнения

$$3 \lg x = \lg(4x^2 - 5).$$

14. Решите неравенство

$$\frac{2 - \log_x(5x - 6)}{\log_x(x - 1)} \leq 0.$$

15. Известно, что числа $0, 105, 280$ являются членами некоторой арифметической прогрессии. Какое наибольшее значение может принимать разность этой прогрессии?

16. На параболе $x = -\frac{y^2}{4} - 1$ найдите все точки, касательные в которых являются также касательными к параболе $y = \frac{x^2}{4} + 1$.

17. На графике функции $y = \sin x - \cos x$ найдите все точки, имеющие наибольшую ординату.

18. Длина основания равнобедренного треугольника равна 2 , а длина боковой стороны равна 3 . К одной из боковых сторон проведена высота, а к другой – биссектриса. Найдите отношение длин отрезков, на которые биссектриса делит высоту.

19. У правильной треугольной пирамиды известны радиус вписанного шара, равный 2 , и высота, равная 6 . Найдите длину стороны основания.

20. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} (x+a)^2 + y^2 = 1, \\ x^2 + (y-a)^2 = 1 \end{cases}$$

имеет не менее двух различных решений?

Вариант 2

(физико-технический факультет)

1. Убедитесь, что при $x = 5\sqrt{5} + 9$ выражение $\sqrt{x - 6\sqrt{-9}} - \sqrt{x - 9}$ принимает целое значение. Укажите это значение.

2. Найдите число $a > 0$, составляющее 50% от $a^2 - 48$.

3. Какое число больше: $a = \sqrt[3]{22} - 2\sqrt[3]{2}$ или $b = \sqrt[3]{33} - 3$?

4. Найдите $\text{tg} x$, если

$$\frac{\sin x + 3 \cos x - \sqrt{5}}{\sqrt{\sin x + 1}} = 0.$$

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2^{x-1} + 3y = 10, \\ 3 \cdot 2^x - 10y = 4. \end{cases}$$

6. Решите уравнение

$$\sqrt{x+1} = 5 - 3|x-2|.$$

7. Укажите целое число, являющееся значением выражения

$$\log_3 8 \cdot \log_{\sqrt{2}} 125 \cdot \log_5 9.$$

8. Решите уравнение

$$|4 \sin^2 x - 1| = 4 \cos 2x - 2.$$

9. Решите неравенство

$$\frac{|x+1|-2}{x-1} \geq 1.$$

10. Найдите центр симметрии графика функции

$$y = \log_3(3x - 3 + 3\sqrt{x^2 - 2x + 2}).$$

11. В арифметической прогрессии третий член – натуральное число, меньше 7, седьмой член – натуральное число, а сумма первых двенадцати членов равна 33. Найдите пятый член этой прогрессии.

12. Сумма первых восьми членов геометрической прогрессии равна учетверенной сумме первых четырех членов. Найдите знаменатель прогрессии.

13. При каких целых значениях n число

$$A = \frac{n^2 - 3n + 1}{2n^2 - 14n + 19}$$

является целым?

14. Найдите наименьший положительный период функции

$$y = 4 \cos^4 3x - 2 \cos 6x.$$

15. Найдите множество значений функции

$$y = \frac{9 \sin^2 x + 27 \sin x + 24}{3 \sin x + 4}.$$

16. Составьте уравнения тех касательных графика функции $y = \sqrt{x^2 + 2}$, которые образуют с осями координат треугольник площади $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

17. Решите уравнение

$$\arccos \frac{2}{x} = \arctg \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{2}.$$

18. Зная длины сторон $AB = 3$, $BC = 6$, $AC = 3\sqrt{7}$ треугольника ABC , найдите в градусах величину угла AOC , где O – центр окружности, вписанной в треугольник.

19. Куб со стороной 3 вписан в конус так, что одна из граней куба лежит в плоскости основания конуса. При какой высоте конус имеет наименьший объем?

20. При каких значениях параметра a уравнение

$$a(x-2)^2 = 24(2|x-4|+1)$$

имеет ровно три решения?

*Публикацию подготовили
И. Комарчев, А. Моисеев, С. Преображенский*

Санкт-Петербургский государственный
университет

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

*(математико-механический факультет, факультет
прикладной математики – процессов управления)*

1. Найдите первый член конечной арифметической прогрессии, состоящей из десяти членов, такой, что после вычеркивания одного из них сумма оставшихся равна 18,

сумма всех членов, находящихся перед вычеркнутым, равна 7, а вычеркнутый член меньше 2.

2. Решите неравенство

$$\frac{3x}{2\sqrt{5-x}-\sqrt{x}} - \frac{3x-2\sqrt{5-x}}{\sqrt{x}} \leq 2.$$

3. Решите уравнение

$$\cos x(2 \sin x - 3) = 2\sqrt{3} \cos 2x + 2 \sin x.$$

4. Медиана AM треугольника ABC пересекает вписанную в него окружность, радиус которой равен r , в точках P и Q . Найдите площадь треугольника, если известно, что хорда PQ в два раза длиннее каждого из отрезков AP и MQ .

5. К сфере, вписанной в треугольную пирамиду, проведем касательные плоскости, параллельные граням пирамиды. Вокруг четырех пирамид, отсекаемых этими плоскостями от исходной пирамиды, описаны сферы. Радиусы трех из них равны 10. Найдите радиус четвертой сферы, если известно, что радиус описанной сферы исходной пирамиды равен 19.

Вариант 2

*(экономический факультет: прикладная информатика
(в экономике), математические методы в экономике)*

1. Числа $-\frac{9}{64}$ и 18 являются членами геометрической прогрессии. Найдите ее знаменатель, если известно, что он лежит на интервале $(-2; -\frac{4}{5})$ и тринадцатый член прогрессии равен $\frac{9}{8}$.

2. Решите неравенство

$$\log_9(2+x)^2 + \log_3(2-x) < \log_3 4.$$

3. Решите уравнение

$$\cos x + \sin 3x = \sin 4x + \cos 4x + 1.$$

4. Точка D лежит на стороне BC треугольника ABC . Радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABD и ACD , одинаковы. Найдите угол BAC , если известно, что $BD : CD = 2 : 3$ и $AB = AD$.

5. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$\sqrt{10 + (7-a)x - x^3} - \sqrt{4-ax} = 2 - \sqrt{10 + 7x - x^3}$$

имеет ровно два решения.

Публикацию подготовили А. Громов, Ю. Чуриш