КМШ

Задачи

(см. «Квант» №2)

1. См. рис.1.

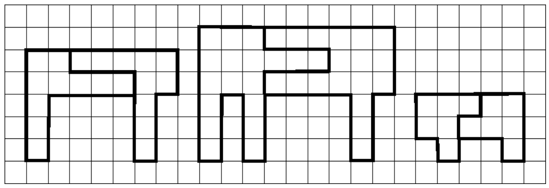

Рис. 1

2. Здесь надо уяснить следующий момент: каждый владелец сотового телефона платит за все звонки, что сделал сам, и плюс еще за все звонки, что поступили ему с обычных телефонов. Так как каждый владелец сотового телефона сделал одинаковое число звонков, а именно 3, то, следовательно, каждому поступило *разное* число звонков с обычных телефонов (ибо заплатили они за разное число разговоров). Пусть владельцев сотовых телефонов было n. Пронумеруем их в порядке возрастания числа поступивших звонков с обычных телефонов. Тогда первому могло вообще не поступить таких звонков, зато второму – не меньше одного, третьему – не меньше двух, …, n-му – не меньше $(n-1)$, а всего, таким образом, не меньше $1 + 2 + \ldots + (n-1)n/2$. С другой стороны, эта сумма наверняка не больше суммарного числа звонков, сделанного владельцами обычных телефонов, т.е. $3(8-n)$, поскольку все сделали по 3 звонка. Поэтому

$$(n-1)n/2 \le 3(8-n),$$

откуда $n(n+5) \le 48$. Выражение в левой части последнего неравенства возрастает с ростом n, и при $n = 5$ оно уже не выполняется (ибо $5(5+5) = 50 > 48$). Поэтому $n \le 4$. Получается, что сотовых телефонов не больше 4. Но в условии уже указаны фамилии четырех владельцев сотовых телефонов. Значит, все остальные, в том числе и упомянутый Джапаридзе, имеют *обычные* телефоны. Таков ответ.

3. Можно:

2	10	3	8
12	11	9	7
14	5	13	6
4	1	15	16

Но найти такое расположение непросто.

4. Не удастся. Поскольку ровно 5 чисел делятся на 2, то среди 6 чисел не более одного нечетного. Следовательно, среди 4 чисел, делящихся на 3, не менее 3 чисел четных. Значит, не менее 3 чисел должны делиться на 6. Противоречие.

5. Треугольники AC_1B_1, C_1BA_1, A_1CB_1 имеют по три равных угла, при этом $\angle B = \angle C = \angle A$ (рис.2). Следовательно, треугольник ABC равносторонний.

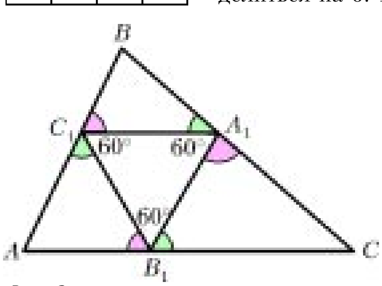

Рис. 2

Конкурс «Математика 6–8»

(см. «Квант» №6 за 2004 г.)

11. Перемножив неравенства

$$1 - x > y,\quad 1 - y > z,\quad 1 - z > x,$$

получим $(1-x)(1-y)(1-z) > xyz$. Чисел, удовлетворяющих условию задачи, не существует.

12. Сначала докажем, что для любого натурального числа k существует степень двойки, которая записывается с помощью k десятичных цифр. Это непосредственно проверяется для небольших значений $k = 1, 2, \ldots$ Пусть a – наибольшее натуральное число такое, что для записи степени 2^a используется ровно k цифр, $k \ge 1$:

$$10^{k-1} < 2^a < 10^k.$$

Тогда следующая степень двойки 2^{a+1} записывается ровно $k + 1$ цифрами.

(На самом деле справедливо более сильное утверждение: для любого натурального k существует ровно три различных степени двойки, записывающихся с помощью k десятичных цифр).

А теперь приступим к решению задачи. Рассмотрим степень двойки 2^n, для записи которой используется ровно $k = 6m + 1$ цифр, где $m \ge 0$ – целое. Тогда

$$\overline{2^{n+1}2^n} = 10^k \cdot 2^{n+1} + 2^n = 2^n\left(2(7+3)^k + 1\right) = 2^n\left(7A + 2\cdot 3^k + 1\right),$$

где A – некоторое натуральное число. Далее,

$$2\cdot 3^k + 1 = 2\cdot 3^{6m+1} + 1 = 6\left(3^6\right)^m + 1 =$$
$$= 6(7\cdot 104 + 1)^m + 1 = 7B + 6 + 1,$$

где B – некоторое натуральное число. Таким образом, число $\overline{2^{n+1}2^n}$ делится на 7.

Поскольку $m \ge 0$ – произвольное целое число, то существует сколь угодно много натуральных чисел n, удовлетворяющих условию задачи.

13. Совместим прямые углы и катеты самого большого треугольника и одного из двух других треугольников (рис.3). Ориентируя катеты оставшегося треугольника параллельно катетам этих треугольников, разместим его вершину в произвольной точке M гипотенузы RS.

Так как четырехугольники $PFMR$ и $MGQS$ – параллелограммы, то из условия задачи следует, что длина ломаной $PFGQ$ равна длине гипотенузы PQ. Значит, точки F и G лежат на PQ, и все три треугольника ORS, MFG и OPQ подобны друг другу.

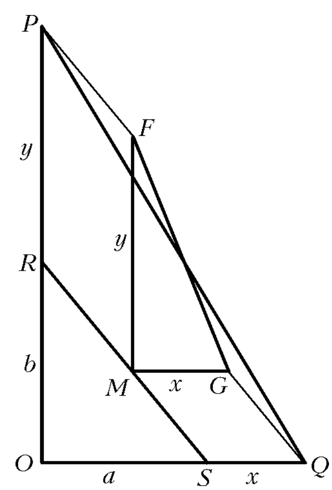

Рис. 3

14. а) Одним кубиком обойтись невозможно. Используем метод «от противного». Допустим, что, поставив один кубик на какую-то клетку, можно прокатить его по всем клеткам доски (посетив, возможно, некоторые из них дважды) так, что каждый раз цвет клетки и соприкасающейся с ней грани совпадали. Обозначим половину белых клеток буквой A, другую половину – буквой B, как на рисунке 4.

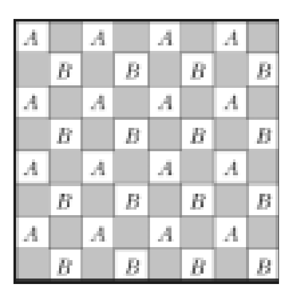

Рис. 4

Возможны три варианта исходного положения кубика перед началом его перекатываний: на какой-либо клетке A, на какой-либо клетке B, на какой-либо черной клетке (эти клетки мы никак не подразделяем и не обозначаем). Пусть первоначально кубик находился на одной из клеток A. Заметим, что, перекатываясь по доске, он может, соблюдая установленные правила, побывать на всех остальных клетках A. В самом деле, перекатившись на соседнюю с исходной клеткой A черную клетку, он может потом попасть на соседнюю с ней другую клетку A, а от нее – на другую ближайшую клетку A, и так далее. Кроме того, он может посетить все черные клетки, соседние с любой A (перекатившись на них, а потом обратно). Однако, соблюдая правила, кубик не сможет попасть ни на какую клетку B. Докажем это. Предположим противное и рассмотрим *первую* клетку B, на которую попал кубик в процессе перекатываний. Откуда он мог попасть на эту клетку? Только из соседней с ней черной клетки. А как он мог перекатиться на эту черную клетку? Только из соседней с ней белой клетки A (но не из другой клетки B, потому что рассматриваемая клетка B – *первая* на маршруте кубика). Однако, когда кубик перекатился с клетки A на соседнюю черную клетку, то нижняя его грань при этом, как полагается, черная, а среди четырех боковых граней две – белые, но они «смотрят» на две соседние клетки A (одна из них – та, с которой кубик только что перекатился на черную клетку). А вот на соседние с ней клетки B «смотрят» две *черные* грани кубика, и перекатиться, соблюдая правила, на клетку B невозможно. Поэтому, стартовав с клетки A, кубик не сможет побывать на всех клетках доски, что и требовалось доказать.

Если первоначально кубик находился на какой-либо клетке B, то рассуждения точно такие же (надо лишь A и B поменять местами). Так что и в этом случае посетить все клетки доски невозможно.

Ну, а если кубик первоначально лежал на какой-то черной клетке? Тогда после первого же перекатывания он окажется либо на клетке A, либо на клетке B. А дальше повторяем все наши предыдущие рассуждения (относящиеся к первому или второму случаю). Посему и здесь обход всех клеток невозможен.

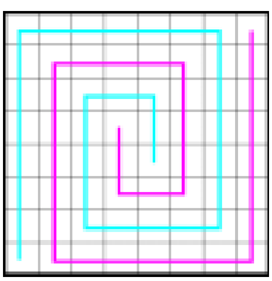

Рис. 5

б) Двух кубиков вполне хватит – см. рисунок 5. Для удобства восприятия черные клетки здесь не окрашены – и так все ясно. Здесь исходными для кубиков являются белые клетки d5 и e4, а маршруты кубиков обозначены красной и синей линиями. При этом (сверх программы) каждая клетка посещается одним кубиком ровно один раз.

15. Прямоугольник 40×100, стороны которого параллельны сторонам поля, будем называть участком. Докажем, что засеяно не меньше 90% площади поля. Для этого разделим поле на восемь участков и один квадрат со стороной 20, как показано на рисунке 6. Площадь квадрата составляет 10% площади участка. Если его накрыть каким-нибудь участком, то из условия задачи вытекает, что в нем засеяно не меньше 1% площади участка. На каждом участке засеяно не меньше 91% площади. Следовательно, всего засеяно не меньше чем

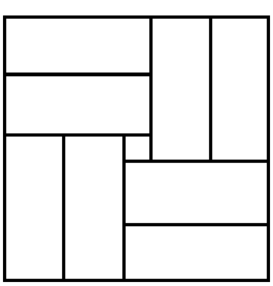

Рис. 6

$$8\times40\times100\times0{,}91+40\times100\times0{,}01=40\times729.$$

Отсюда получается, что в процентах от площади поля рожью засеяли не меньше чем

$$100\%\times(40\times729)/(180\times180)=90\%.$$

Для решения задачи нам остается показать, что можно засеять рожью 90% площади поля с соблюдением условия засева участков. Для этого разделим все поле на 81 клетку со стороной 20, как показано на рисунке 7. Белым цветом показаны те места на поле, которые засеяны рожью. Серый цвет обозначает пустую землю. Все 9 серых прямоугольников равны между собой и одинаково расположены в клетках. Площадь каждого из них составляет 90% площади клетки. Поэтому их общая площадь составляет 10% площади поля, т.е. рожью засеяно ровно 90% площади поля.

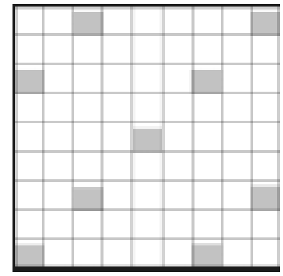

Рис. 7

Легко проверить, что в любом прямоугольнике размером 2×5 со сторонами, параллельными сторонам поля (т.е. в любом участке), площадь, покрашенная в серый цвет, в совокупности не превосходит площади одного серого прямоугольника. Следовательно, на любом участке не меньше 91% его площади засеяно рожью.

Замечание. Вместо серого прямоугольника мы могли бы использовать любую другую фигуру той же площади, которая целиком помещается в клетке.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП КОНКУРСА ИМЕНИ А.П.САВИНА

(см. «Квант» №2)

Командная олимпиада

1. Нет, рядом с числом 18 может стоять только число 7.

2. Обозначим градусные меры дуг окружностей, как показано на рисунке 8. Угол BAD равен, с одной стороны, $x/2$, с другой стороны, $(c-a)/2$. Значит, $x=c-a$. Так как окружности касаются, то $x=b$. Получаем, что $b=c-a$, или $c=a+b$, откуда следует, что BD – диаметр. Значит, угол ABD – прямой.

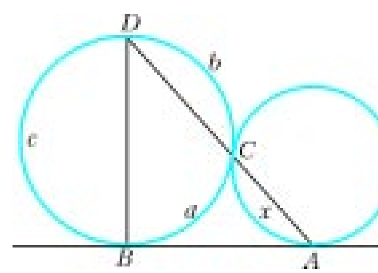

Рис. 8

3. Пусть стороны прямоугольника равны x и y. Тогда $2(x+y)==2004$, откуда $(x-2)(y-2)=2008$. Найдем всевозможные пары натуральных чисел, дающие в произведении 2008. Разложим 2008 на простые множители: $2008=2^3\cdot251$. Значит, одно из чисел в паре есть двойка в степени от 0 до 3. Искомых пар четыре, им соответствуют 4 различных прямоугольника (со сторонами 1 и 2008, 2 и 1004, 4 и 502, 8 и 251).

4. (0, 0), (2, 1), (2, −1).

При $x<0$ корней нет, так как $2^x<1$, $3y^2+1\ge1$.

При $x=0$ получаем $y=0$.

При $x=1$ получаем $3y^2=1$ – нет решений в целых числах.

При $x=2$ имеем $y^2=1$, откуда $y=\pm1$.

Пусть $x\ge3$. Тогда 2^x делится на 8. Квадрат целого числа при делении на 8 дает в остатке 0, 1 или 4, откуда сумма $3y^2+1$ дает остатки 1, 4 или 5, т.е. не кратна 8. Значит, в этом случае решений нет.

5. Рассмотрим дугу окружности, из каждой точки которой отрезок BC виден под одним и тем же углом $\angle BAC=\varphi$. Точка M пересечения медиан треугольника BAC лежит на дуге γ, гомотетичной этой дуге с коэффициентом гомотетии $\frac{1}{3}$ и с центром в середине отрезка BC. Пусть γ' – симметричный образ дуги γ относительно прямой BC. Замечаем, что в случае $\varphi > 60°$ дуга γ' не имеет точек пересечения с описанной окружностью ΔABC ; в случае $\varphi = 60°$ дуга γ' имеет одну точку касания с описанной окружностью ΔABC , при этом касание реализуется только в том случае, если ΔABC равносторонний; в случае $\varphi < 60°$ дуга γ' имеет две точки пересечения с описанной окружностью ΔABC (рис.9).

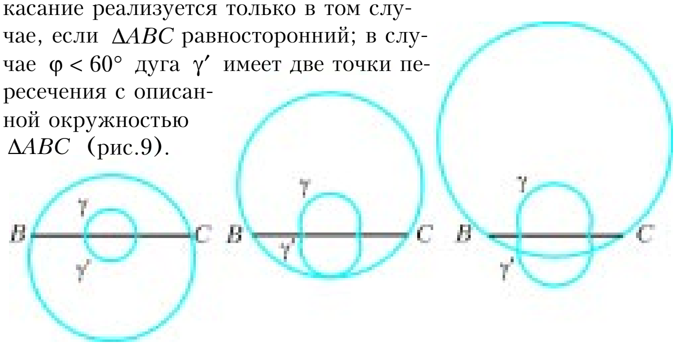

Рис. 9

6. Возьмем два из четырех чисел, заменим каждое из них их полусуммой. При этом значение левой части неравенства не уменьшится. Действительно, пусть c – полусумма x и y, $a = (1-z)(1-t)$, $b = zt$. Поскольку $a \geq b$, то

$$(1-x)(1-y)a - xyb = a - 2ac + (a-b)x(2c-x) \leq$$
$$\leq a - 2ac + (a-b)c^2 = (1-c)(1-c)a - c^2 b .$$

Уравняем теперь z и t, заменив каждое их полусуммой, и аналогично покажем, что левая часть не уменьшится. Тем самым сведем неравенство к случаю двух пар равных чисел. Уравняем числа из разных пар, заменив каждое их полусуммой. Таким образом, достаточно проверить, верно ли неравенство, когда числа x, y, z, t равны. Однако в этом случае имеет место равенство.

7. Докажем утверждение по индукции. Для $N = 1$ и $N = 2$ утверждение очевидно. Пусть мы умеем располагать кольца в любом порядке для $N = k \geq 2$. Рассмотрим ситуацию, когда имеются $k + 1$ кольцо. Расположим все кольца, кроме самого большого, в нужном порядке, не двигая кольцо, второе по величине. Это возможно, так как все кольца, кроме второго по величине, продеваются сквозь самое большое. После этого, по той же самой причине, можно поставить на нужное место самое большое кольцо.

Личная олимпиада

4. Пусть группа имеет вид n, $n + 1$, $n + 2$, …, $n + 9$. Рассмотрим число $n + 10$.
Оно делится на 10, так как n делится на 10.
Оно делится на 9, так как $n + 10 = (n + 1) + 9$, а число $n + 1$ делится 9.
Оно делится на 8, так как $n + 10 = (n + 2) + 8$, а число $n + 2$ делится 8.
. . .
Оно делится на 2, так как $n + 10 = (n + 8) + 2$, а число $n + 8$ делится 2.
Значит, $n + 10$ кратно всем числам от 2 до 10. Следовательно, $n + 10$ кратно НОК(2, 3, …, 10) = 2520, т.е. $n + 10 = 2520k$.
Заметим, что все числа группы четырехзначные. Поэтому $1009 < n + 10 < 10001$, или $1009 < 2520k < 10001$, откуда получаем $k = 1,2,3$. Следовательно, имеется только 3 группы.

5. Рассмотрим момент, когда у Васи наберется 5 закрашенных столбцов, тогда достаточно окрасить все восемь строк (часть строк могла быть окрашена ранее). Таким образом, Вася может сделать не более 13 операций. Каждая операция Васи добавляет на доске не более трех новых красных клеток. Значит, вначале Петя должен сделать не менее $64 - 3\cdot 13 = 25$ красных клеток. С другой стороны, нетрудно понять, что если Петя окрасит 25 клеток, показанных на рисунке 10, то Вася сможет окрасить всю доску.

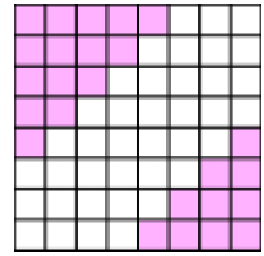

Рис. 10

6. Раскрасим шахматную доску, как показано на рисунке 11 слева. Если шашка изначально стоит на черной клетке, то она может бить только шашки, стоящие на заштрихованных клетках, причем только на тех, которые не примыкают к краю доски. Таких клеток 9, поэтому шашка не сможет съесть одним ходом более 9 шашек. На рисунке справа показано, как можно съесть одним ходом 9 шашек.

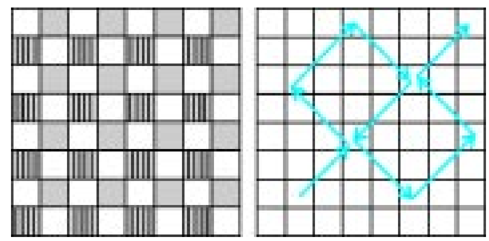

Рис. 11

7. Поскольку $a > x$, $b > z$, то $a + b + \sqrt{ab} > x + z + \sqrt{xz} = c$.

8. Условию задачи удовлетворяют все простые числа N и только они. Проведем индукцию по N. Случаи $N = 1$, 2 очевидны. Пусть $N > 2$ и выполнено предположение индукции. Тогда $d(N) < N$, последовательность для $d(N)$ не содержит точных квадратов, и по предположению индукции $d(N)$ – простое число. Если $d(N) = 2$, то N – простое число. В противном случае $d(N)$ нечетно. Но если число N имеет нечетное число натуральных делителей, то оно является точным квадратом (достаточно заметить, что если N делится на некоторое число x, то N делится и на N/x).

9. Нет. Если $n = a^2 + ab + b^2$, то положим $c = a + b$, $d = b$.

Задачи математических боев

1. Нет, не могло.
Каждый удар Вани или Вовы истребляет или добавляет количество комаров в комнате, кратное 17. Число же 2004 на 17 не делится.

5. Введем понятие *максимальной разности* – так назовем разность между количеством орехов в мешке, где их больше всего, и в мешке, где их меньше всего. Заметим, что если максимальная разность меньше 10, то по принципу Дирихле найдутся два мешка с одинаковым количеством орехов. Максимальная разность не может равняться в точности 10. Действительно, в этом случае количество орехов в мешках задается рядом: n, $n + 1$,$n + 2$, …, $n + 9$, сумма чисел которого равна $10n + 45$, что ни при каких натуральных n не может быть равно общему количеству орехов 1000.
Предположим, что добиться уравнивания количества орехов в каких-то двух мешках невозможно, т.е. максимальная разность при всех перекладываниях будет больше 10. Докажем, что в этом случае при каком-то перекладывании максимальная разность станет меньше 10. Действительно, пусть максимальное число орехов в каком-то мешке равно M, а минимальное (в каком-то другом мешке) – m. Так как во всех мешках число орехов всегда различно, то в каждом из остальных восьми мешков число орехов заключено между $M - 1$ и $m + 1$. Максимальная разность равна $M - m$, и если она не меньше 10, то после проведения операции перекладывания в мешке, где было M орехов, их станет $M - 9$, что, очевидно,

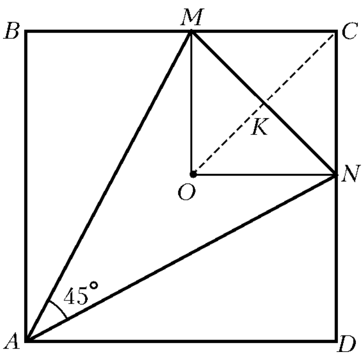

Рис. 12

лежит в пределах от M до $m + 1$. В мешке, где было m орехов, их станет $m + 1$, что также попадает в те же пределы. Число орехов в остальных восьми мешках возрастет на 1, поэтому оно также окажется в пределах от M до $m + 1$. Как видно, после каждой операции перекладывания максимальная разность снижается как минимум на 1.

7. Рассмотрим точку O – центр описанной вокруг треугольника AMN окружности (рис.12). Поскольку угол MON равен 90°, то вокруг четырехугольника $OMCN$ можно описать окружность, причем MN является ее диаметром. Пусть точка K – середина диаметра MN. Поскольку треугольник OMN равнобедренный, то $OK \perp MN$. В треугольнике MCN отрезок CK является высотой и медианой, поэтому $\angle MCK = \angle NCK$, и точка K, так же, как и точка O, лежит на диагонали квадрата $ABCD$.

8. При любом $n > 3$.

Очевидно, что при $n = 3$ средняя тетрадь никогда не покинет своего места. Сначала убедимся в том, что 4 тетради можно расположить в произвольном порядке. Пронумеруем тетради сверху вниз числами от 1 до 4. Для обозначения средней части будем использовать скобки. Например, запись 1, 2, (3), $4 \to 4$, 3, 1, 2 означает, что верхнюю часть, состоящую из тетрадей 1 и 2, поменяли с нижней частью, состоящей из тетради 4. Вот возможные варианты перекладываний стопки из четырех тетрадей:

1, 2, (3), $4 \to 4$, 3, (1), $2 \to 2$, 1, (4), $3 \to 3$, (4,2), $1 \to$
$\to 1$, 4, (2), $3 \to 3$, 2, (1), $4 \to 4$, 1, (3), $2 \to 2$, (3,4), $1 \to$
$\to 1$, 3, (4), $2 \to 2$, 4, (1), $3 \to 3$, 1, (2), $4 \to 4$, 2, 3, 1;
4, (3, 1), $2 \to 2$, 3, (1), $4 \to 4$, 1, (2), $3 \to 3$, 2, (4), $1 \to$
$\to 1$, (4,3), $2 \to 2$, 4, (3), $1 \to 1$, 3, (2), $4 \to 4$, 2, (1), $3 \to$
$\to 3$, 1, 4, 2;
3, (2,4), $1 \to 1$, (2), 4, $3 \to 4$, (3), 2, $1 \to 2$, (1), 3, $4 \to$
$\to 3$, 4, 1, 2.

Таким образом, получены все возможные варианты расположения четырех тетрадей в стопке.

Пусть $n \geq 4$. Покажем, что любые две соседние тетради в стопке можно поменять местами, не нарушая порядка остальных тетрадей. Если эти две тетради лежат в середине стопки, то мысленно склеим все предшествующие им тетради в один блок и все последующие за ними тетради – в другой блок. Оперируя с этими блоками и двумя тетрадями как со стопкой, состоящей из четырех тетрадей, добиваемся нужного расположения. Если же две перекладываемые тетради лежат сверху или снизу стопки, то оставшиеся тетради в стопке произвольным образом разбиваем на два блока, и также применяем алгоритм, использованный ранее для четырех тетрадей. Многократно применяя перекладку соседних тетрадей, можно любую тетрадь переместить на требуемое место.

9. Да. Впишем в окружность с диаметром AB прямоугольный неравнобедренный треугольник ACB. От точки C отложим хорду $CD = = CB$ ($D \neq B$). Треугольник ACD – искомый.

10. Перебрав значения $m < 11$ (этот перебор можно уменьшить, заметив, что число $m = 1$ делится на 3), находим $m = = 4$. Покажем, что при $m > 10$ решений нет. Если $10^k \leq m - 1 < 10^{k+1}$, где натуральное $k > 0$ (т.е. число $m - 1$ $(k + 1)$-значное), то число $(m - 1)^{m+1}$ имеет не менее $(k+1)^{m+1} \geq (k+1)^{10^k}$ десятичных знаков. Однако число $\overline{(m-2)m(m-1)}$ не более чем $3(k + 1)$-значное.

11. 24. Пример для 24 ладей приведен на рисунке 13. Можно доказать, что число 24 – наибольшее.

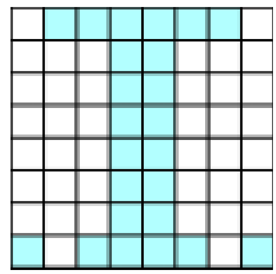
Рис. 13

Рис. 14

12. 24. Изобразим развертку одной из граней куба вместе с четырьмя граничащими с ней гранями (рис.14).

Рассмотрим две суммы: сумму чисел, стоящих в квадрате П и всех его соседях, а также сумму чисел, стоящих в квадрате Р и всех его соседях. Заметим, что среди всех квадратов, образующих эти суммы, шесть квадратов одни и те же. Различие лишь в том, что помимо этих шести квадратов в указанные суммы входят квадраты А и Б (первая сумма) либо квадраты В, Г и К (вторая сумма). Так как суммы, по условию, равны, то должно выполняться равенство

$$В + Г + К = А + Б.$$

Аналогично, «поворачивая» картину три раза на 90°, можем получить еще три равенства:

$$Е + Д + Л = В + Г, \quad Ж + И + М = Е + Д, \quad А + Б + Н = Ж + И.$$

Сложив все 4 равенства, получаем

$$К + Л + М + Н = 0,$$

а поскольку все числа неотрицательные, то К = Л = М = Н = = 0. Итак, числа, стоящие в угловых квадратах рассмотренной грани, равны нулю. Но, очевидно, то же можно утверждать и для всех остальных граней. Таким образом, в четырех квадратах *каждой* грани находятся одни и те же числа – нули, так что непременно найдется $4 \times 6 = 24$ квадрата с одинаковыми числами.

Однако гарантии того, что найдется большее количество таких квадратов, нет. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим такую расстановку чисел в квадратах *каждой* грани, как показано на рисунке 15.

0	1	0
1	2	1
0	1	0

Рис. 15

Нетрудно проверить, что такая расстановка чисел удовлетворяет условию: все суммы одинаковы и равны 6. Но при этом в 24 квадратах стоят нули, в 24 – единицы и в 6 – двойки.

13. $\frac{\pi}{2}$. Заметим, что отношение площади вписанного круга к площади равностороннего треугольника

равно $\dfrac{\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2}{\frac{\sqrt{3}}{4}} = \dfrac{\pi\sqrt{3}}{9}$. Площадь правильного шестиугольника

со стороной 1 равна $6\dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. Поэтому сумма площадей

всех кругов равна $\dfrac{\pi\sqrt{3}}{9}\,\dfrac{3\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\pi}{2}$.

14. Воспользуемся сначала неравенством $xy \leq \dfrac{x^2 + y^2}{2}$, а затем неравенством между средним арифметическим и средним гармоническим:

$$\frac{1}{xy+1}+\frac{1}{yz+1}+\frac{1}{zx+1}\ge$$
$$\ge\frac{1}{\frac{x^2+y^2}{2}+1}+\frac{1}{\frac{y^2+z^2}{2}+1}+\frac{1}{\frac{z^2+x^2}{2}+1}\ge$$
$$\ge\frac{9}{\frac{x^2+y^2}{2}+1+\frac{y^2+z^2}{2}+1+\frac{z^2+x^2}{2}+1}=\frac{3}{2}.$$

15. $m > 1$, n – любое.
Так как $8\equiv 1(\bmod 7)$, то $8^{8^{\dots^8}}\equiv 1(\bmod 7)$ при любом количестве восьмерок. Поскольку $9\equiv 2(\bmod 7)$ и девятка возводится в степень, кратную 3, то $9^{9^{\dots^9}}=2^{9^{\dots^9}}=2^{3k}=8^k\equiv 1(\bmod 7)$, если только количество девяток больше 1. Если же девятка одна, то разность сравнима с 1 по модулю 7.

16. Победит Света. Исходное количество клеток кратно 3, каждая же девочка своим ходом закрашивает число клеток, дающее при делении на 3 остаток 1.

17. Рассмотрим гомотетию с центром в точке B, переводящую точку B_1 в точку D такую, что $DA\perp BA$, $DC\perp CB$. Центр описанной вокруг четырехугольника $ABCD$ окружности лежит на диаметре BD. Следовательно, центр описанной вокруг треугольника ABC окружности лежит на прямой BB_1. Рассуждая аналогично, получаем, что он должен лежать на прямых AA_1 и CC_1. Следовательно, прямые BB_1, AA_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

18. Следует. **19.** 32.

22. 4009. **23.** $x = 1$ или $x = 2$.

26. Да, например: 8, 1, 15, 10, 6, 3, 13, 12, 4, 5, 11, 14, 2, 7, 9. **27.** 13.

29. 18. На любой горизонтали или вертикали шахматной доски не могут стоять ладьи разного цвета. Поскольку всего горизонталей и вертикалей на доске 16, то на каждый из 3 цветов может приходиться самое большее 5 полос. Эта ситуация реализуется (см. рис.16, на котором буквами К, С, Ж отмечены красные, синие и желтые ладьи).

К	К						
К	К						
К	К						
		С	С				
		С	С				
		С	С				
				Ж	Ж	Ж	
				Ж	Ж	Ж	

Рис. 16

30. Да, следует. Если углы $\beta, \gamma, \beta', \gamma'$ острые, то воспользуйтесь подобием треугольников с углами

$$\frac{\pi}{2}-\beta,\ \frac{\pi}{2}-\gamma,\ \beta+\gamma\ ,\quad \frac{\pi}{2}-\beta',\ \frac{\pi}{2}-\gamma',\ \beta'+\gamma',$$

а если β и β' (или γ и γ') тупые – подобием треугольников с углами $\beta-\frac{\pi}{2}$, $\gamma+\frac{\pi}{2}$, α и $\beta'-\frac{\pi}{2}$, $\gamma'+\frac{\pi}{2}$, α' (или треугольников с углами $\gamma-\frac{\pi}{2}$, $\beta+\frac{\pi}{2}$, α и $\gamma'-\frac{\pi}{2}$, $\beta'+\frac{\pi}{2}$, α').

31. Отметим на сторонах единичного квадрата отрезки длины x, y, z, t (рис.17). А теперь воспользуйтесь тем, что сумма катетов всегда больше гипотенузы.

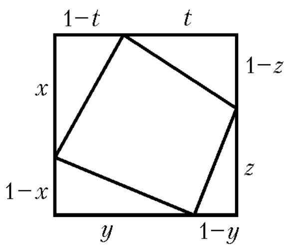

Рис. 17

32. Подходят первые 2^{40} строк. Заменим в треугольнике Паскаля все нечетные числа единицей, а четные – нулями. По индукции можно доказать, что в строке с номером 2^k $(k\ge 0)$ в таком треугольнике стоят одни единицы. Кроме того, треугольник, объединяющий все строки с 1-й по 2^{k+1}-ю, можно разбить на 4 треугольника A, B, C, D такие, что треугольник A объединяет все строки с 1-й по 2^k-ю, треугольники A, C, D полностью идентичны (заполнены одними и теми же числами в одном и том же порядке), а треугольник B заполнен одними нулями (рис.18). По индукции также доказывается, что сумма чисел в треугольнике A равна 3^k. Эта

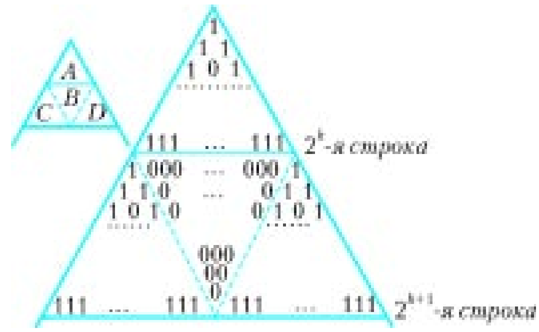

Рис. 18

сумма совпадает с количеством нечетных чисел в соответствующем треугольнике Паскаля. Поскольку всего чисел в треугольнике A ровно $2^{k-1}\left(2^k+1\right)$, то доля нечетных чисел среди них составляет $\frac{3^k}{2^{k-1}\left(2^k+1\right)}$. При $k = 40$ доля нечетных чисел

$$\frac{3^{40}}{2^{39}\left(2^{40}+1\right)}\le\frac{3^{40}\cdot 2}{2^{80}}\le\left(\frac{243}{1024}\right)^8\cdot 2\le\left(\frac{1}{4}\right)^8\cdot 2\le\left(\frac{1}{16}\right)^2<\frac{1}{100}.$$

Калейдоскоп «Кванта»

Вопросы и задачи

1. Осторожно наполните стакан водой чуть выше краев. Поверхностное натяжение воды придаст свободной поверхности на краях небольшую выпуклость, и пробка сдвинется к центру.

2. Бросьте небольшое количество мыльной пены на чистую воду – комочки пены разбегутся в стороны.

3. Если прикоснуться к мокрой ткани рукой, то несколько маленьких капель, удерживаемых, как в решете, силами поверхностного натяжения, сливаются в одну большую каплю, которую эти силы уже не способны удержать.

4. Во втором. Капля удерживается поверхностным натяжением воды, а оно с ростом температуры заметно уменьшается.

5. Керосин очень хорошо смачивает практически все тела, поэтому пылинки, попав на его поверхность, сразу тонут.

6. Вода смачивает дерево и подтекает под дощечку. Ртуть не смачивает стекло и не подтекает под пластинку, а давление на пластинку сверху удерживает ее от всплытия.

7. Причина сцепления пластинок в воздухе – образование между ними водяной «лепешки» с вогнутой боковой поверхностью (рис.19). Погружение пластинок в воду приведет к исчезновению этой поверхности, а вместе с ней – и стягивающего усилия.

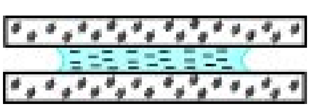
Рис. 19

8. Пленка собирается в капельку, которая из-за малой толщины пленки имеет очень малый диаметр.

9. Пламя отклонится в сторону под действием струйки воздуха, вытекающего через соломинку из стягиваемого поверхностными силами пузыря. Отклонение пламени будет тем сильнее, чем меньше диаметр пузыря.

10. Есть. Жидкость стекает к основанию пузыря, его верхушка быстро утоньшается и рвется вероятнее всего.

11. Вода смачивает мел, входит в его поры и вытесняет из них воздух.

12. Жир смачивает и материю, и бумагу. Но в бумаге капилляры тоньше, чем в материи, и расплавленный жир активнее втягивается именно в бумагу.

13. Из-за капиллярных эффектов вода между двумя близко расположенными спичками поднимается вверх. Давление в воде между спичками оказывается ниже атмосферного. Это и приводит к тому, что спички сближаются.

14. Коромысло весов, на котором подвешена трубка, опустится под действием капиллярных сил.

15. После открывания трубки на нижнем ее конце образуется мениск такой же формы, как и на верхнем. Поэтому высота столбика воды, оставшейся в трубке, будет равна $2h$, если $l \ge h$, и $l + h$, если $l \le h$.

16. Поверхности капелек, обращенные к узкому концу капилляра, имеют меньший радиус кривизны, чем обращенные к

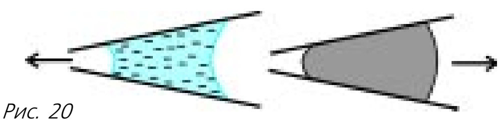

Рис. 20

широкому концу (рис.20). «Отрицательное» давление слева под поверхностью смачивающей капилляр воды будет меньше, чем справа, и столбик воды переместится к узкому концу трубки. Давление слева под поверхностью несмачивающей капилляр ртути будет больше, чем справа, что приведет к выталкиванию столбика ртути к широкому концу.

17. Жидкость заполняет весь капилляр, так как сила поверхностного натяжения не уравновешивается силой тяжести жидкости в капилляре.

Микроопыт

Водяная струя как бы стянута пленкой. Под влиянием внешних воздействий, например пальца, эта пленка деформируется, и в ней начинаются поверхностные (капиллярные) колебания, придающие струе форму гармошки.

ФИБОНАЧЧИЕВЫ КРОЛИКИ

(см. «Квант» №2)

1. Пусть φ_p – простое число; если $p = mk$ (m, $k > 1$), то φ_{mk} делится на φ_m; приходим к противоречию. Но при $p = 19$ имеем $\varphi_{19} = 4181 = 37 \cdot 113$.

2. При $m + 1 \ge n$ получим $0 \le N - (\varphi_n + \varphi_m) \le N - (\varphi_n + \varphi_{n-1}) = N - \varphi_{n+1}$, что невозможно.

3. Из общего решения $L_n = c_1\Phi^{n-1} + c_2\widehat{\Phi}^{n-1}$, учитывая начальные условия $L_1 = 1$, $L_2 = 3$, получаем $c_1 = \Phi$, $c_2 = \widehat{\Phi}$, откуда $L_n = \Phi^n + \widehat{\Phi}^n$. Так как $\Phi^2 + 1 = \Phi\sqrt{5}$, $\widehat{\Phi}^2 + 1 = \widehat{\Phi}\sqrt{5}$, то

$$\varphi_{n+1} + \varphi_{n-1} = \left(\Phi^{n+1} - \widehat{\Phi}^{n+1} + \Phi^{n-1} - \widehat{\Phi}^{n-1}\right)\Big/\sqrt{5} = L_n .$$

4. При $n = 0$ и $n = -1$ равенство выполняется; предположим, что оно верно для всех $k \le m$, тогда

$$\varphi_{-(m+1)} = \varphi_{-(m-1)} - \varphi_{-m} = (-1)^m \varphi_{m-1} - (-1)^{m-1}\varphi_m = (-1)^m \varphi_{m+1} .$$

5. *Указания.* а) Сложите равенства $\varphi_1 = \varphi_3 - \varphi_2$, $\varphi_2 = \varphi_4 - \varphi_3$, $\varphi_3 = \varphi_5 - \varphi_4$, …, $\varphi_n = \varphi_{n+2} - \varphi_{n+1}$.

б) Сложите равенства $\varphi_1 = \varphi_2$, $\varphi_3 = \varphi_4 - \varphi_2$,… …, $\varphi_{2n-1} = \varphi_{2n} - \varphi_{2n-2}$.

в) Вычтите из равенства пункта а) равенство пункта б).

г) Так как $\varphi_k\varphi_{k+1} - \varphi_{k-1}\varphi_k = \varphi_k(\varphi_{k+1} - \varphi_{k-1}) = \varphi_k^2$, то остается сложить эти равенства при всех k от 1 до n.

д) $\varphi_{n+1}^2 - \varphi_n^2 = (\varphi_{n+1} + \varphi_n)(\varphi_{n+1} - \varphi_n) = \varphi_{n+2}\varphi_{n-1}$.

е) $\varphi_{n-1}\varphi_{n+1} - \varphi_n^2 = \varphi_{n-1}(\varphi_n + \varphi_{n-1}) - \varphi_n^2 =$
$= \varphi_{n-1}^2 - \varphi_n(\varphi_n - \varphi_{n-1}) = -\left(\varphi_{n-2}\varphi_n - \varphi_{n-1}^2\right) = \ldots$
$\ldots = (-1)^{n-1}\left(\varphi_0\varphi_2 - \varphi_1^2\right) = (-1)^n$.

ж) $\varphi_n^2 - \varphi_n\varphi_{n-1} - \varphi_{n-1}^2 = \varphi_n\varphi_{n-2} - \varphi_{n-1}^2 =$
$= (\varphi_{n-1} + \varphi_{n-2})\varphi_{n-2} - \varphi_{n-1}^2 = -\left(\varphi_{n-1}^2 - \varphi_{n-1}\varphi_{n-2} - \varphi_{n-2}^2\right) = \ldots$
$\ldots = (-1)^{n-1}\left(\varphi_2^2 - \varphi_2\varphi_1 - \varphi_1^2\right) = (-1)^{n-1}$.

з) Поскольку $\Phi^3 - 1 = 2\Phi$, $\Phi + 1 = \Phi^2$, $\widehat{\Phi}^3 - 1 = 2\widehat{\Phi}$, $\widehat{\Phi} + 1 = \widehat{\Phi}^2$, то получим $\varphi_1^3 + \varphi_2^3 + \ldots + \varphi_n^3 =$

$$= \Big(\Phi^3 + \Phi^6 + \ldots + \Phi^{3n} + \ +3\left(\Phi - \Phi^2 + \ldots + (-1)^{n+1}\Phi^n\right) +$$
$$+\ 3\left(-\widehat{\Phi} - \widehat{\Phi}^2 + \ldots + (-\widehat{\Phi})^n\right) - \widehat{\Phi}^3 - \widehat{\Phi}^6 - \ldots - \widehat{\Phi}^{3n}\Big)\Big/5\sqrt{5} =$$
$$= \Big(\Phi^{3n+2} - \widehat{\Phi}^{3n+2} - \Phi^2 + \widehat{\Phi}^2 + 6(-\Phi)^{n-1} - 6\left(-\widehat{\Phi}\right)^{n-1} +$$
$$+\ 6\Phi^{-1} - 6\widehat{\Phi}^{-1}\Big)\Big/10\sqrt{5} = \left(\varphi_{3n+2} + (-1)^{n-1}\cdot 6\varphi_{n-1} + 5\right)\Big/10 .$$

6. Доказательство проведем индукцией по m. При $m = 1$ равенство справедливо, верно оно и при $m = 2$: $\varphi_{n+2} = \varphi_{n+1} + \varphi_n = \varphi_{n-1} + \varphi_n + \varphi_n = \varphi_2\varphi_{n-1} + \varphi_3\varphi_n$. Пусть оно выполняется при $m \le k$, в частности при $m = k$ имеем $\varphi_{n+k} = \varphi_k\varphi_{n-1} + \varphi_{k+1}\varphi_n$. Положим $m = k + 1$, тогда $\varphi_{n+k+1} = \varphi_{n+k} + \varphi_{n+k-1} = \varphi_k\varphi_{n-1} + \varphi_{k+1}\varphi_n + \varphi_{k-1}\varphi_{n-1} + \varphi_k\varphi_n = \varphi_{k+1}\varphi_{n-1} + \varphi_{k+2}\varphi_n$. а) При $m = n$ формула дает $\varphi_{2n} = \varphi_n(\varphi_{n-1} + \varphi_{n+1}) = (\varphi_{n+1} - \varphi_{n-1})(\varphi_{n+1} + \varphi_{n-1})$. б) Положите в формуле $n = m + 1$.
в) Пусть $m = 2n$, тогда $\varphi_{3n} = \varphi_{n-1}\varphi_{2n} + \varphi_n\varphi_{2n+1} = \varphi_{n-1}\left(\varphi_{n+1}^2 - \varphi_{n-1}^2\right) + \varphi_n\left(\varphi_n^2 + \varphi_{n+1}^2\right) = \varphi_{n+1}^3 + \varphi_n^3 - \varphi_{n-1}^3$.
г) Пусть $m > n$, заменим в исходной формуле $n + m$ на m: $\varphi_m = \varphi_{m-n}\varphi_{n-1} + \varphi_{m-n+1}\varphi_n$, тогда $d = \text{НОД}(\varphi_m, \varphi_n) = \text{НОД}(\varphi_{m-n}, \varphi_n)$, так как $\text{НОД}(\varphi_{n-1}, \varphi_n) = 1$. Продолжим далее вычитать из большего индекса меньший (такой процесс впервые описал Евклид и показал, что в результате пара чисел (m, n) приводится к паре (ks, k), где $k = \text{НОД}(m, n)$). Откуда $d = \text{НОД}(\varphi_{ks}, \varphi_k) = \varphi_k$.

7. Пусть длины сторон треугольника равны $\varphi_n, \varphi_m, \varphi_k$, $n > m > k$. Тогда $\varphi_k + \varphi_m \le \varphi_{m-1} + \varphi_m = \varphi_{m+1} \le \varphi_n$, что противоречит неравенству треугольника.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НА МАКСИМУМ И МИНИМУМ

(см. «Квант» №2)

1. Куб. *Указание*. Воспользуйтесь неравенством

$$x^2 + y^2 + z^2 \ge xy + yz + zx .$$

2. Параллелепипед, основанием которого служит квадрат, а боковое ребро равно диагонали основания.

3. Высота параллелепипеда равна $\frac{1}{3}$ высоты пирамиды.

4. Высота цилиндра наибольшего объема равна $\frac{1}{3}$ высоты конуса.

5. $\frac{4}{3}R$. **6.** $4R$. **7.** $V_{\max} = \frac{2\pi b^2}{9\sqrt{3}}$ при $\alpha = \operatorname{arcctg}\sqrt{2}$.

8. $V = \frac{1}{12}x^2\sqrt{4 - 2x^2}$, $0 < x < \sqrt{2}$; $V_{\max} = \frac{2\sqrt{3}}{27}$ при $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

9. $V = \frac{1}{6}x\sqrt{3 - x^2}$, $0 < x < \sqrt{3}$; $V_{\max} = \frac{1}{4}$ при $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

10. Пусть $\angle BAC = \varphi$, $AO = x$. Применив теорему Пифагора к треугольникам AOB м AOC и теорему косинусов к треугольникам BOC и ABC, выразим $\cos\varphi$:

$$\cos\varphi = \frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 9x + 8}} .$$

Пусть $\varphi = 45°$, тогда $x = 1$.

Чтобы найти наибольшее значение φ, заметим, что

$$\cos\varphi = \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+9x+8}} = \frac{2\sqrt{6}}{7}\,\frac{6\left(x^2+1\right)+\left(x^2+8\right)}{2\sqrt{6}\left(x^2+1\right)\left(x^2+8\right)} \geq \frac{2\sqrt{6}}{7}$$

в силу неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом, причем равенство достигается при $6\left(x^2+1\right) = x^2+8$, т.е. при $x=\sqrt{0{,}4}$. Наибольшее значение φ равно $\arccos\frac{2\sqrt{6}}{7} \approx 45^\circ 30'$.

ПРАВИЛО ДЕКАРТА

1. Это последовательности, которым соответствуют группы плюсов и минусов вида а) $++\ldots+--\,-\ldots-$ или $--\,-\ldots-++\ldots+$;
б) $++\ldots+--\ldots-++\ldots+$ или $--\ldots-++\ldots+--\ldots-$.
2. Поскольку числа a и $c \neq 0$ имеют разные знаки, по теореме Виета уравнение имеет ровно один положительный корень. Если же $c = 0$, то уравнение $ax^2+bx=0$ тоже имеет положительный корень.
3. Ни одного или два (с учетом кратности).
4. Один корень. Одна перемена знака. Рассмотрите функцию

$$f(x) = x^4+2x^2+3x-1-\frac{1}{x}.$$

Она возрастает, заведомо отрицательна при малых x и положительна при $x > 1$.
5. Один.
6. $\operatorname{sgn} a_l = -\operatorname{sgn} b_l$, $\operatorname{sgn} a_k = -\operatorname{sgn} b_k$.
7. Это утверждение очевидно.
8. а) Один; б) два. *Указание*. Число отрицательных корней многочлена $f(x)$ равно числу положительных корней многочлена $f(-x)$.
9. См. указание к предыдущему упражнению.
10. $\{0, 1\}$. *Указание*. При $x < 0$ слева стоит отрицательное число, а справа – положительное, поэтому равенства быть не может. В силу правила Декарта, больше одного положительного корня быть не может. Но один корень очевиден: $x = 1$.
11. При $x \leq 0$ слева, очевидно, стоит отрицательное число, следовательно, все корни уравнения положительны. Но число положительных корней рассматриваемого уравнения равно числу положительных корней уравнения $(x+1)\left(x^5+2x^3-x^2+x-1\right)=0$. Раскрывая скобки, получим $x^6+x^5+2x^4+x^3-1=0$. В силу правила Декарта, число корней этого уравнения не превосходит 1. Но один корень заведомо есть, так как левая часть отрицательна при $x = 0$ и положительна при достаточно больших значениях x.
12. Очевидными преобразованиями неравенство приводится к виду $a^2-ab+b^2-1 \leq 0$. Рассмотрим многочлен $f(x) = x^2-bx+b^2-1$. Легко проверяются неравенства $f(0) \leq 0$ и $f(1) \leq 0$. Из условия $f(0) \leq 0$ и правила Декарта следует, что этот многочлен не может иметь более одного положительного корня. А если бы для какого-то $x_0 \in [0;1]$ выполнялось неравенство $f(x_0) > 0$, то этот многочлен имел бы как минимум два корня: один на интервале $(0;x_0)$ другой – на интервале $(x_0;1)$.
13. Рассмотрим многочлен $f(x) = \left(3\left(a^2+b^2\right)-2ab\right)x^2 - 2ab(a+b)x-3\left(1-a^2b^2\right)$. По условию, $1-a^2b^2 \geq 0$, так что последовательность его коэффициентов содержит одну перемену знаков и, кроме того, $f(0) < 0$. Поэтому достаточно доказать, что $f(1) \leq 0$, т.е.

$$3\left(a^2+b^2\right)-2ab-2ab(a+b)-3\left(1-a^2b^2\right) \leq 0.$$

Рассмотрим функцию $g(x) = \left(3-2a-3a^2\right)x^2-\left(2a+2a^2\right)x - 3\left(1-a^2\right)$. По условию, $1-a^2 \geq 0$, следовательно, уравнение $g(x)=0$ имеет не более одного положительного корня, и $g(0) \leq 0$. Поэтому достаточно доказать, что $g(1) \leq 0$, т.е. $4a^2-4a \leq 0$. Последнее неравенство проверяется легко.
14. Рассмотрим функцию $f(x) = (1-a)^x+(1+a)^x-2^x$. Очевидно, $f(1)=0$, а согласно правилу Декарта эта функция имеет не более одного корня. Остается заметить, что при очень больших значениях x она отрицательна. Впрочем, можно использовать и очевидное неравенство $f(2) < 0$.
15. Рассмотрим квазимногочлен $f(x) = \frac{1}{1+a}(1+a)^x + \frac{1}{1-a}a^x - \frac{1}{1-a}$. Он имеет три члена, значит, не может иметь больше двух корней. Но $f(1) = f(2) = 0$. А поскольку $f(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$, неравенство $f(x) > 0$ выполняется при $x > 2$ и $x < 1$.
16. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{b_1^q b_1^x + b_2^q b_2^x + \ldots + b_k^q b_k^x}{k} - \frac{b_1^q+b_2^q+\ldots+b_k^q}{k}\,\frac{b_1^x+b_2^x+\ldots+b_k^x}{k}.$$

Она имеет одну перемену знака (сообразите, почему!) и очевидный корень $x = 0$. Остается разобраться со знаком этой функции при очень больших x, что уже несложно.
17. Квазимногочлен $f(t) = \sum\left|\pm x_1 \pm x_2 \pm \ldots \pm x_n\right|^t - 2^n\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\right)^{t/2}$ согласно правилу Декарта имеет не больше двух корней. Очевидно, что $t = 0$ – корень. Убедиться, что $t = 2$ – тоже корень, можно, просто раскрывая скобки.
18. Рассмотрим квазимногочлен

$$f(x) = \frac{p_1b_1^x+p_2b_2^x+\ldots+p_kb_k^x}{p_1+p_2+\ldots+p_k} - \left(\frac{p_1b_1+p_2b_2+\ldots+p_kb_k}{p_1+p_2+\ldots+p_k}\right)^x,$$

а дальше дословно повторим рассуждения, использованные при доказательстве неравенства Коши.
19. Рассмотрите квазимногочлен

$$f(x) = \frac{b_1^x+b_2^x+\ldots+b_k^x}{k} - \left(\sqrt{\frac{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_k^2}{k}}\right)^x.$$

20. Рассмотрим квазимногочлен $f(x) = ba^x+cb^x+dc^x+ad^x - \left(ab^x+bc^x+cd^x+da^x\right)$. Согласно правилу Декарта он имеет два корня (0 и 1) и отрицателен при $x < 0$. Значит, его производная в нуле положительна, что и дает нужное неравенство.
21. Рассмотрим квазимногочлен $f(x) = ab^x+ba^x - (a+b)\left(\frac{a+b}{2}\right)^x$. Число $\frac{a+b}{2}$ лежит между числами a и b, поэтому многочлен имеет 0 или 2 корня. Но $f(0)=0$, следовательно, корней ровно два. При очень больших x значения этого квазимногочлена положительны, а $f(1) < 0$. Значит, второй корень больше 1. А тогда $f'(0) < 0$, откуда и получается нужное неравенство.
22. В силу правила Декарта, квазимногочлен

$$f(x) = a_1^x b_1^{1-x} + a_2^x b_2^{1-x} + \ldots + a_k^x b_k^{1-x} - \left(a_1+a_2+\ldots+a_k\right)^x\left(b_1+b_2+\ldots+b_k\right)^{1-x}$$

имеет не более двух корней, а два его корня $x = 0$ и $x = 1$ очевидны. Остается выяснить знак производной этой функции в точке 1.
23. Если выполняется только одно из данных по условию неравенств, то доказываемое неравенство очевидно: его левая часть неположительна, а правая неотрицательна. Значит, можно считать, что выполняются оба данных неравенства.

Допустим сначала, что числа $a_1,\ldots,a_k$ и $b_1,\ldots,b_k$ положительны. Тогда мы вправе рассмотреть квазимногочлен

$$f(x)=\left(a_0^2\right)^x\left(b_0^2\right)^{1-x}-\left(a_1^2\right)^x\left(b_1^2\right)^{1-x}-\ldots-\left(a_k^2\right)^x\left(b_k^2\right)^{1-x}-$$
$$-\left(a_0^2-a_1^2-\ldots-a_k^2\right)^x\left(b_0^2-b_1^2-\ldots-b_k^2\right)^{1-x}.$$

Он имеет два корня $x=1$ и $x=0$ и, значит, положителен при $x=1/2$. Случай, когда не все числа $a_1,\ldots,a_k$ и $b_1,\ldots,b_k$ положительны, легко сводится к уже рассмотренному.

24. Для доказательства правого неравенства нужно рассмотреть квазимногочлен

$$f(x)=(4a+1)^x+(4b+1)^x+(4c+1)^x+(4d+1)^x-4\cdot 2^x,$$

а для доказательства левого – квазимногочлен

$$g(x)=3-(4a+1)^x-(4b+1)^x-(4c+1)^x-(4d+1)^x+5^x.$$

25. Если мы положим $p_i=\dfrac{a_i^2}{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_k^2}$, то увидим, что доказываемое неравенство обобщает неравенство Швейцера.

26. Их условия задачи легко следует, что для любого $i=1,2,\ldots,n$ выполняются неравенства $a_i\le\dfrac{\sqrt{n^2-n+1}}{n}$. Поэтому последовательность коэффициентов квазимногочлена

$$f(x)=(n-1)\left(\frac{1}{n}\right)^x-a_1^x-a_2^x-\ldots-a_n^x+\left(\frac{\sqrt{n^2-n+1}}{n}\right)^x$$

содержит две перемены знака. Коэффициенты подобраны так, что значения квазимногочлена равны нулю в точках 0 и 2. Значит, его производная в точке ноль неположительна. Это дает нижнюю оценку произведения, которая достигается, когда квазимногочлен обращается в тождественный ноль, т.е., когда все числа a_i, кроме одного, равны $1/n$, а это последнее равно $\dfrac{\sqrt{n^2-n+1}}{n}$. Таким образом находится наименьшее значение. Наибольшее находится из неравенства Коши.

ТЕПЛОЕМКОСТЬ РАВНОВЕСНЫХ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ

1. $C=C_p-\dfrac{\alpha RV}{\beta+2\alpha V}$, где C_p – молярная теплоемкость при постоянном давлении.

2. Газ охлаждается; $C=C_V-R$, где C_V – молярная теплоемкость при постоянном объеме.

3. $C=\nu\left(3C_V-2C_p\right)=-0{,}677$ Дж/К, где $\nu=\dfrac{p_1V_1}{RT_1}=0{,}163$ моль – количество молей гелия, $C_V=\dfrac{3}{2}R$ и $C_p=\dfrac{5}{2}R$.

4. $A_{12}=\dfrac{3}{2}A$.

XIII МЕЖДУНАРОДНАЯ ОЛИМПИАДА «ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЙ МАРАФОН»

Письменный индивидуальный тур

Математика

1. а) Может. Например, $111111111^2=12345678987654321$.
б) Нет. Если число оканчивается на 789, то при делении на 8 оно дает в остатке 5, а квадраты нечетных чисел дают остаток 1 при делении на 8.

2. $2R\cos\dfrac{\alpha}{2}$.

3. $\left(1;0;\sqrt{2}\right)$. *Указание.* Из неравенства $ab\le\dfrac{a^2+b^2}{2}$, справедливого при любых a и b, следует, что левая часть уравнения не больше чем 3, причем равенство возможно лишь при $x=\sqrt{1-y^2}$, $y=\sqrt{2-z^2}$, $z=\sqrt{3-x^2}$.

4. а) 3; б) 2 и 8. *Указания.* а) Первое число Фибоначчи, делящееся на 9, это $f_{12}=144$, причем на 9 делятся все числа вида f_{12n}, но они же (и только они) делятся на 16.
б) На 16 делятся числа вида f_{12n}, но они же делятся на 9.

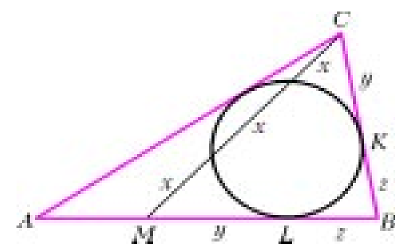

Рис. 21

5. а) Нет; б) может; в) нет. *Указание* (рис. 21). а) Если CM – высота, то $CK^2=2x^2$, $ML=2x^2$, откуда $CK=ML$, но тогда $BC=MB$, что невозможно.
б) Если CM – медиана, то по формуле для медианы

$$9x^2=\frac{1}{4}\left(2(3y+z)^2+2(y+z)^2-4(y+z)^2\right).$$

А так как $y^2=2x^2$, имеем после преобразований $y=4z$. Пусть $z=1$, тогда $y=4$. Отсюда $AB=10$, $AC=13$, $BC=5$. Осталось убедиться в том, что медиана CM делится вписанной окружностью на равные части.
в) Если CM – биссектриса, то $\angle CMB=\angle ACM$, что невозможно.

6. $-\left[\dfrac{n}{2}\right]$. *Указание.* Воспользуйтесь тем, что

$$\sum_{n\ge i>j\ge 1}x_ix_j=\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^2}{2}-\frac{\sum\limits_{i=1}^{2}x_i^2}{2}\ge-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2\ge-\frac{n}{2}.$$

При четном $n=2k$ минимум достигается, например, при $x_{2i-1}=1$, $x_{2i}=0$. При нечетном – при $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=0$, …, $x_n=0$.

7. а) Нет; б) нет; в) и г) да. *Указание.* Предположим, что лист бумаги удалось разрезать на фигурки нужного вида. Покрасим черным цветом клетки листа, как показано на рисунке 22. Каждая из фигурок содержит не более одной покрашенной клетки. Пусть x – число «уголков», а y – число «зигзагов». Тогда $x+y\ge n^2$, $3x+4y=(2n-1)^2$, откуда $x\ge 4n-1$. Отсюда следует, что требуемых разрезаний не существует при $n=2$ и $n=3$. Например, при $n=3$ потребовалось бы не меньше 11 «уголков». Однако в квадрате 5×5 всего 25 клеток. Если $n=4$, то $x\ge15$. Значит, для квадрата 7×7 понадобится в точности 15 уголков и 1 «зигзаг». Такое разрезание возможно (рис.23). Как «продолжить» разрезания на большие n, показано на том же рисунке.

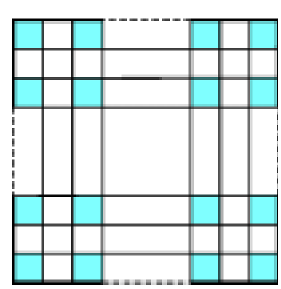
Рис. 22

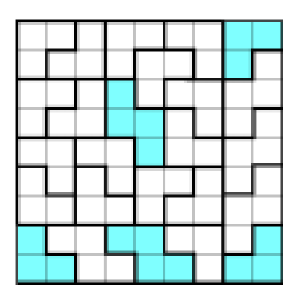
Рис. 23

Физика

1. Ускорение мотоциклиста определяется силой трения. Чтобы набирать скорость максимально быстро, он должен в каждый момент времени иметь максимально возможное тангенциальное ускорение. Для этого полное ускорение также должно быть максимально большим, т.е. равным $a = F_{\text{тр}}/m = \mu g$, где μ – коэффициент трения. Обозначив α угол между вектором ускорения и вектором скорости, выразим тангенциальное и нормальное ускорения:

$$a_\tau = v'(t) = a\cos\alpha\ ,\ \ a_n = \frac{v^2}{R} = a\sin\alpha\ .$$

Продифференцировав второе уравнение по времени, получим

$$\frac{2vv'}{R} = a\cos\alpha\cdot\alpha'\ .$$

Учитывая, что $v' = a\cos\alpha$, а $v/R = \omega = \varphi'$, где φ – угол поворота радиуса-вектора мотоциклиста, получим $\varphi' = \alpha'/2$. Значит, в каждый момент времени $\varphi = \alpha/2$. В момент достижения максимальной скорости $\alpha = \pi/2$. Следовательно, в этот момент $\varphi = \pi/4$, т.е. мотоциклист прошел восьмую часть окружности.

2. $v = \left(\dfrac{v_1^6 + v_2^6}{v_1^4 + v_2^4}\right)^{1/2} = 143$ м/с.

3. В проекциях на координатные оси уравнение движения частицы имеет вид $ma_x = -kx$, $ma_y = -ky$, т.е. движение по каждой оси происходит по закону гармонических колебаний с частотой $\omega_1 = \sqrt{k/m}$, амплитудой R_0 и максимальной скоростью $v_0 = \omega_1 R_0$, равной линейной скорости движения частицы по окружности. Выберем оси координат так, чтобы в тот момент, когда k скачком уменьшается в два раза, частица находилась на оси y, тогда $x = 0$, $y = R_0$. После этого движение в проекциях на оси будет происходить по закону гармонических колебаний с частотой $\omega_2 = \omega_1/\sqrt{2}$, причем вдоль оси y амплитуда колебаний останется равной R_0, а вдоль оси x амплитуда станет равной $A_x = v_0/\omega_2 = \sqrt{2}\,v_0/\omega_1 = \sqrt{2}R_0$. Движение частицы будет происходить по эллипсу с минимальным и максимальным удалениями от центра R_0 и $\sqrt{2}R_0$ соответственно.

4. Будем считать, что тепло, выделяющее при кристаллизации на границе воды и льда, уходит через лед наружу за счет разности температур ΔT между нижней и верхней кромками льда (т.е. пренебрежем потоком тепла от воды). Тогда запишем

$$\lambda\rho_{\text{л}}dh = \gamma\frac{\Delta T}{h}dt\ ,$$

где λ – удельная теплота плавления льда, γ – теплопроводность льда, h – толщина слоя льда. Отсюда

$$h^2 = \frac{2\gamma\Delta T}{\lambda\rho_{\text{л}}}t + C\ .$$

Поскольку в начальный момент толщина льда была равна нулю, получаем, что $h \sim \sqrt{t}$. Через 10 часов толщина льда будет в $\sqrt{2}$ раз больше, чем через 5 часов, т.е. составит примерно 7 см.

5. $T' = \dfrac{2T_1 + 3T_2}{5} = 322$ К. **6.** $a = \dfrac{mg}{m + \varepsilon_0 SdB^2}$.

7. Будем решать задачу в предположении небольшого отклонения формы планеты от сферической. Во вращающейся системе отсчета на любой элемент планеты помимо силы тяготения mg действует еще центробежная сила инерции, равная $m\omega^2 r$ и направленная от оси вращения (r – расстояние до оси). Поскольку все точки поверхности должны иметь одинаковый потенциал, работа по переносу пробной массы m из центра планеты на поверхность должна быть одинаковой для экватора и полюса. Отсюда получим

$$\int\limits_0^{R_0} m\omega^2 r\,dr - mg\Delta R = 0\ ,\ \text{или}\ \ \frac{\Delta R}{R_0} = \frac{4\pi^2 R_0}{2gT^2} = 0{,}05\ .$$

Устный командный тур

Математика

1. 5 часов. **2.** ab. **3.** Нет.

4. 11. *Указание.* Разрежем доску на квадратики 2×2. В каждом из них должны быть заняты по меньшей мере 2 клетки (иначе из квадратика можно вырезать «уголок»). Поэтому должны быть заняты 32 клетки, т.е. число «уголков» не меньше 11. А 11 уголков вырезать можно (рис.24).

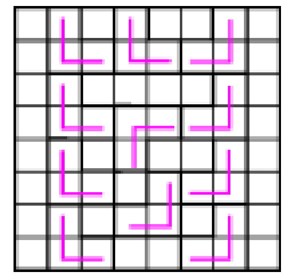

Рис. 24

5. $\left(\dfrac{3\pi}{8}; \dfrac{3\pi}{8}; \dfrac{\pi}{4}\right)$, $\left(\dfrac{3\pi}{10}; \dfrac{3\pi}{10}; \dfrac{2\pi}{5}\right)$, $\left(\dfrac{3\pi}{7}; \dfrac{3\pi}{14}; \dfrac{5\pi}{14}\right)$.

6. Второе число больше. *Указание.*

$$\left(\frac{5}{7}\right)^{100} + \left(\frac{6}{7}\right)^{100} < \left(\frac{5}{7}\right)^3 + \left(\frac{6}{7}\right)^3 < 1\ .$$

7. Можно. Например: 2, 2, 2, 2, −9, 2, 2, 2, 2, −9, 2, 2, 2, 2, −9, 2, 2.

8. Делится. *Указание.* Пусть $x = 2^{50}$. Тогда

$$4x^4 + 1 = 4x^4 + 4x^2 + 1 - 4x^2 = \left(2x^2 + 2x + 1\right)\left(2x^2 - 2x + 1\right).$$

9. 45°. *Указание.* На перпендикуляре к AC в точке M (рис.25) отложим отрезок $MK = MC$. Треугольник AMK равен треугольнику MCB и треугольнику KNL. Отсюда следует, что $AK = KN$, а $\angle AKN = 90°$.

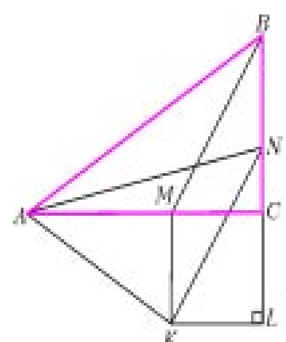

Рис. 25

10. а) Первый игрок; б) тоже первый игрок. *Указание.* а) Первый игрок соединяет диаметрально противоположные точки, а затем применяет «симметричную» стратегию: на каждый ход второго отвечает проведением хорды, симметричной только что проведенной хорде второго игрока относительно диаметра из первого хода. б) Первый соединяет точки с номерами 1 и 3. Оставшиеся точки для наглядности расположите в вершинах правильного 2002-угольника (номера диаметрально противоположных точек будут при этом иметь разную четность). На каждый ход второго игрока первый отвечает ходом, симметричным относительно центра окружности.

Физика

1. Скорость тени равна скорости движения поверхности Земли за счет суточного вращения, т.е. примерно 1100 км/ч.

2. 2500 кг/м³.

3. Поскольку стержень невесомый, момент сил, действующих на него со стороны грузов, должен быть равен нулю. Следовательно, грузы не взаимодействуют со стержнем и движутся равномерно по прямой со скоростью $v = \omega\cdot 0{,}8l$. Пройдя расстояние $s = \sqrt{l^2 - (0{,}8l)^2} = 0{,}6l$, они достигнут концов стержня за время $t = s/v = 0{,}75\ \omega^{-1}$.

4. Мощность теплоотдачи при 100 °С равна P. При увеличении напряжения в два раза мощность нагревателя возрастает до $4P$, причем P тратится на теплоотдачу, а $3P$ – на испарение воды. Из уравнения $3Pt = r\frac{m}{2}$ найдем $t \approx 21$ мин .

5. Наведенный на шарике заряд Q находится из условия равенства нулю потенциала его центра:

$$k\frac{q}{r} + k\frac{Q}{R} = 0 .$$

При поднесении второго заряда наведенный заряд увеличится в 3 раза. Если вначале на шарик действовала сила F притяжения к заряду q, то теперь на него действуют две взаимно перпендикулярные силы: $3F$ со стороны первого заряда и $12F$ со стороны второго. Равнодействующая этих сил равна $3\sqrt{17}F$. Значит, сила увеличится в $3\sqrt{17}$ раза.

6. На уровне воды в сосуде.

7. Глубина погружения увеличится.

8. $\mu < \frac{\sqrt{3}}{3}$.

9. Площадь поверхности таблетки уменьшается гораздо медленнее, чем ее объем.

История научных идей и открытий

Математика

1. $\frac{\pi a^2}{2}$. *Указание.* CD – высота прямоугольного треугольника ADB.

2. Гаусс пытался выяснить, действительно ли сумма углов треугольника равна 180°, т.е. применима ли в реальной практике геометрия Евклида.

3. $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$.

4. *Указание*. Рассмотрите остатки от деления на 6.

5. Речь идет о Пьере Симоне Лапласе, которого Наполеон Бонапарт назначил министром внутренних дел, а потом не знал, что с ним делать.

Физика

1. 1) В 1609 году. 2) Галилео Галилей и Иоганн Кеплер. 3) Галилей – в Падуе, Кеплер – в Праге. 4) Труд – в шлифовании линз, доведении их поверхностей до сферических; издержки – в большой стоимости стекла для линз, которое должно быть особо однородным. 5)Галилей использовал плосковыпуклую и плосковогнутую линзы с примерно одинаковыми фокусными расстояниями, а Кеплер – две плосковыпуклые линзы, причем длиннофокусную для окуляра и короткофокусную для объектива. 6) Телескоп Кеплера – он давал бóльшую яркость изображения. 7) Обнаружение спутников Юпитера и спутника Сатурна, открытие пятен на Солнце, гор на Луне, фаз Венеры.

2. 1) Уильям Гильбер. 2) Идея о передаче силового взаимодействия через пространство, а не только при непосредственном соприкосновении тел. 3) Роберт Гук. Открыл закон упругости, сконструировал круговой пружинный маятник для ручных часов; усовершенствовал воздушный насос; провел систематизированные исследования микроскопического мира, которые привели, в частности, к открытию клетки.

3. 1) Бенджамин Франклин; стодолларовая купюра. 2) Создал первую теорию электричества, исследовал атмосферное электричество и изобрел громоотвод. 3) Участвовал в работе над Декларацией независимости и Конституцией США. 4) Лион Фейхтвангер; «Лисы в винограднике». 5) М.В.Ломоносов; Георг Рихман, который погиб при проведении опытов с «притягиванием» молнии к громоотводу.

4. Фрэнсис Астон. 2) Открытие большого числа изотопов химических элементов и изучение их свойств. 3) Точные измерения масс атомов позволили измерить дефекты масс атомных ядер, знание которых было необходимо для практического использования ядерной энергии.

5. 1) Никола Тесла. 2) В США. 3) Разработал ряд конструкций электродвигателей, электрогенераторов, высокочастотных трансформаторов; построил радиоантенну. 4) Тесла – единица магнитной индукции; 1 Тл = 1 кг$/\left(\text{А}\cdot\text{с}^2\right)$.

ВСЕРОССИЙСКАЯ СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО ФИЗИКЕ

1. $\alpha = \pi - \arcsin\frac{u\sin\varphi}{v} - \varphi$ или $\alpha = \pi - \varphi$.

2. $v_m = 2v_0$. **3.** $\alpha = 56°$.

4. $N = \frac{27}{256}\sigma T_1^4 S$, где σ – постоянная Стефана–Больцмана.

5. $E_k = \frac{\pi R^3\sigma^2}{2\varepsilon_0}$. **6.** $Q = \frac{1}{2}q\frac{\varphi_2^2}{\varphi_1}$. **7.** $L = 0{,}52\frac{\mu_0 l}{4\pi}$.

8. $I_1 = 0$, $I_2 = \frac{I_m}{4}$.

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Редакция журнала «Квант»
kvant.info
Московский центр непрерывного математического образования
kvant. mccme.ru
Московский детский клуб «Компьютер»
math.child.ru
Костромской центр дополнительного образования «Эврика»
ceemat.ru

журнал Квант ©

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ
А.А.Егоров, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ
В.А.Акатьева, Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, Е.Я.Силина

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР
Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА
Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»; тел.: 930-56-48;
e-mail: admin@kvant.info, math@kvant.info, phys@kvant.info

Диапозитивы изготовлены ООО «Европолиграфик»
Заказ №
Отпечатано на ГУ РПП, г. Ржев, ул. Урицкого, 91
При участии ЗАО «РИЦ «Техносфера», тел.: (095) 234-01-10