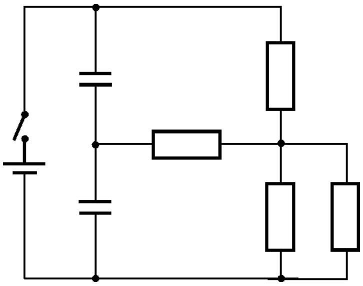


Рис. 2

резисторы также одинаковые, сопротивлением R = 10 кОм каждый. Какой полный заряд протечет через «горизонтальный» резистор? Какое количество теплоты в нем выделится?

А.Зильберман

Ф1986. Катушка содержит $N = 1000$ витков провода и намотана на тороидальный сердечник, сделанный из материала с большой магнитной проницаемостью. Катушка включена в сеть переменного напряжения U = 36 В последовательно с резистором сопротивлением R = 100 Ом. От части катушки ($n = 250$ витков от одного из концов намотки) сделан отвод, и эта часть катушки замкнута проводником, имеющим очень малое сопротивление. Какой ток течет по этому проводнику? Рассеянием магнитного потока пренебречь. Сопротивление провода, которым намотана катушка, считать малым.

З.Рафаилов

Ф1987. Для уменьшения отражения света от поверхности линзы применяют просветляющий слой из материала с меньшим коэффициентом преломления, чем у стекла линзы. Расчет этого слоя обычно производят для длины волны 0,55 мкм, соответствующей зеленому цвету. Как изменится при этом отражение света для красного и фиолетового краев диапазона видимого света?

А.Светов

Решения задач М1951 – М1960, Ф1968 – Ф1972

М1951. *Имеются два разных расположения одних и тех же ладей на шахматной доске, причем известно, что одно получено из другого после двух ходов каждой ладьи. Всегда ли можно указать третье расположение этих же ладей на этой доске, из которого каждое из двух данных расположений достигается одним ходом каждой ладьи?*

Ответ: нет.

Относительно двух первоначальных расположений одной ладьи можно указать два возможных промежуточных ее положения. Если же брать большее количество пар начальных расположений ладей, то пары их возможных промежуточных положений могут иметь пересечения, и может оказаться, что объединение клеток, составляющих эти пары, содержит меньше элементов, чем всего ладей. Вот возможный пример.

Ладья:	1	2	3	4	5
Ее позиция №1:	b4,	c3,	d2,	b3,	c2
Ее позиция №2:	c5,	d4,	e3,	d5,	e4

Имеются всего четыре клетки b5, c4, d3, e2 для расстановки на них пяти ладей.

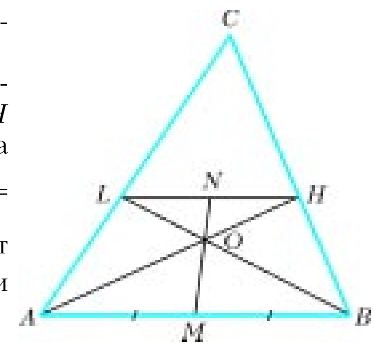
С.Волчёнков

М1952. *Пусть AH – высота, BL – биссектриса, CM – медиана треугольника ABC.*

а) Докажите, что AH, BL и CM пересекаются в одной точке в точности если $LH \parallel AB$.

б) Докажите, что $LH \parallel AB$ в точности если $\dfrac{\sin\angle A}{\cos\angle C} = \operatorname{tg}\angle B$.

а) В этом пункте L и H – произвольные (не обязательно совпадающие с основаниями биссектрисы и высоты) внутренние точки отрезков AC и BC соответственно.



Пусть $LH \parallel AB$, N – точка пересечения MO с LH (см. рисунок). Тогда $\dfrac{LN}{MB} = \dfrac{NO}{OM} = \dfrac{NH}{AM}$, $LN = NH$. Значит, N лежит на медиане CM, откуда и O лежит на CM.

Пусть O лежит на CM. Проведем $LH' \parallel AB$. Так как BL и AH' пересекаются на медиане CM, то $H' = H$. Таким образом, $LH \parallel AB$.

б) Поскольку AH – высота, BL – биссектриса, условие $LH \parallel AB$, или $\dfrac{BH}{CH} = \dfrac{AL}{CL}$, можно переписать в виде

$$\frac{c\cos\angle B}{b\cos\angle C} = \frac{c}{a},$$

т.е., поскольку

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\angle A}{\sin\angle B},$$

– в виде

$$\frac{\sin\angle A}{\cos\angle C} = \operatorname{tg}\angle B.$$

А.Полянский, В.Сендеров

М1953. *Из листа клетчатой бумаги вырезали по линиям сетки многоугольник без дыр. Известно, что его можно разрезать по линиям сетки на прямоугольники 2×1. Докажите, что у него есть хотя бы одна сторона четной длины.*

Пусть каждый прямоугольник 2×1 составлен из двух разноцветных клеток – белой и черной. Поскольку многоугольник можно разрезать на такие прямоугольники, то в нем поровну черных и белых клеток. Посчитаем суммарные периметры черных и белых клеток, входящих в многоугольник. Для черных клеток – это та часть периметра, к которой изнутри прилегают черные клетки (будем эту часть называть черными отрезками периметра), и вся сетка, которая лежит внутри многоугольника. Для белых – белые отрезки периметра и вся сетка, которая лежит внутри многоугольника. Тогда белых отрезков периметра столько же, сколько черных. Но если все стороны нечетной длины и граница состоит из одного куска (вот тут и пользуемся тем, что многоугольник без дыр), то все стороны начинаются и заканчиваются отрезком одного и того же цвета. Но тогда такого цвета будет больше.

С.Дориченко

М1954. *Найдите все точные квадраты вида* $\overline{a0\ldots0b}$, *где a и b – отличные от нуля цифры.*

Ответ: 16, 25, 36, 49, 64, 81.

Пусть $a\cdot10^t+b=c^2$, где $t\ge2$; тогда $b = 1$, 4 или 9, откуда $\sqrt{b}\in\boldsymbol{Z}$.

Получили

$$a\cdot10^t=\left(c+\sqrt{b}\right)\left(c-\sqrt{b}\right)=de,$$

где $d,e\in\boldsymbol{N}$, $|d-e|=2$, 4 или 6.

Пусть d делится на 5. Тогда $d\ge2\cdot5^t$, $9\cdot2^{t-1}\ge$ $\ge e\ge2\cdot5^t-6$, $\frac{24}{25}\ge\frac{9}{2}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^t+\frac{6}{5^t}\ge2$.

Противоречие.

В.Сендеров

М1955. *Одна из проекций точки D на стороны треугольника ABC является серединой отрезка между двумя другими. Докажите, что одна из проекций точки C на стороны треугольника ABD также является серединой отрезка между двумя другими.*

Так как проекции точки D на стороны ΔABC лежат на одной прямой, точки A, B, C, D лежат на одной окружности. Пусть для определенности четырехугольник $ABCD$ – выпуклый, и A', B', C' – проекции D на BC, CA, AB. Так как четырехугольник $A'DB'C$ – вписанный, $A'B'=CD\sin\angle ACB$. Аналогично, $B'C'=AD\sin\angle CAB$. Следовательно, условие $A'B'=$ $=B'C'$ равносильно условию $AB\cdot CD=AD\cdot BC$. Отсюда сразу вытекает утверждение задачи.

А.Заславский

М1956. *Существует ли возрастающая арифметическая прогрессия из 2005 натуральных чисел таких, что произведение любых четырех из них делится на куб их суммы? А бесконечная арифметическая прогрессия с такими же свойствами?*

Ответ на первый вопрос положителен. Именно, пусть $\{a_i\}_{i=1}^{2005}$ – произвольная возрастающая арифметическая прогрессия из натуральных чисел, D – некоторое кратное всех чисел вида $(b+c+d+e)^3$, где b, c, d, e – члены этой прогрессии. Тогда, очевидно, $\{Da_i\}_{i=1}^{2005}$ – искомая прогрессия.

Докажем теперь, что *никакая* возрастающая бесконечная последовательность натуральных чисел свойством задачи не обладает. Докажем более сильное утверждение: произведение любых четырех членов такой последовательности не может делиться на их сумму. Предположим противное и обозначим $A=a_1a_2a_3$, $B=$ $=a_1+a_2+a_3$, $x=a_n$, где $n>3$. Имеем: $y=\frac{Ax}{B+x}$ – целое число. С другой стороны, $y\to A$ при $x\to\infty$. Значит, при достаточно больших x имеем $y=A$, откуда $B = 0$. Противоречие.

Вот несколько иное рассуждение: поскольку $y=\frac{A\left((x+B)-B\right)}{x+B}$, число $\frac{AB}{x+B}$ при сколь угодно больших x является целым (вариант: число имеет бесконечно много различных натуральных делителей).

Попробуем ответить еще на некоторые близкие к задаче вопросы.

При каких натуральных n существует такая бесконечная возрастающая

а) последовательность натуральных чисел,

б) арифметическая прогрессия из натуральных чисел,

что произведение любых *n последовательных* ее членов делится на их сумму?

Нетрудно построить как последовательность а) для любого $n>0$, так и прогрессию б) для любого нечетного n. Несколько сложнее доказать, что ни для какого четного n прогрессий б) не существует.

Заметим, что если в условиях пункта б) потребовать делимости на сумму вторых либо более высоких степеней членов, то окажется, что ни при каком натуральном n искомой прогрессии не существует. Рассматривая ситуацию, когда числитель и знаменатель также возводятся в некоторые натуральные степени, мы придем к следующему утверждению: «прогрессию с делением» можно построить в точности если n нечетно, степени слагаемых в знаменателе – первые, а степень числителя не ниже степени знаменателя.

Возможны и другие близкие формулировки. Например, существует такая бесконечная арифметическая прогрессия из натуральных чисел, что произведение любых n первых ее членов делится на их сумму.

И.Акулич, В.Сендеров

М1957. *Из полного набора домино выбрали несколько костяшек и выложили по правилам в один ряд. Докажите, что костяшки всего набора можно выложить в один ряд, в котором выбранные костяшки идут в том же порядке (может быть, не подряд).*

Рассмотрим полный граф на 7 вершинах и занумеруем вершины числами от 0 до 6. Каждый путь в этом графе соответствует некоторой цепочке выложенных по правилам доминошек. Если удалить из графа ребра, соответствующие выложенной цепи, то степень каждой вершины, кроме начальной и конечной, уменьшится на четное число, т.е. останется четной. В каждой компоненте такого графа будет существовать эйлеров цикл, кроме одной, куда попадут начальная и конечная вершины удаленной цепи. В этой компоненте будет существовать эйлеров путь между указанными вершинами.

Построим следующий эйлеров обход исходного графа.

1. Пройдем компоненту, содержащую начальную и конечную вершины цепи по эйлерову пути от конечной вершины цепи до начальной.
2. Продолжим путь вдоль цепи до ближайшей компоненты связности.
3. Обойдем эту компоненту по эйлерову циклу.
4. Повторим пункты 2 и 3, если есть еще непройденные ребра.

Так как вдоль цепи встретятся все компоненты, то все будет пройдено, т.е. будет построена цепочка из всех костяшек полного набора, внутри которой костяшки ранее выложенной цепочки идут в том же порядке.

С.Волчёнков

M1958. *Можно найти пару натуральных чисел x и y, для которых x^2+xy+y^2 является квадратом целого числа, а также пару натуральных чисел x и y, для которых x^2-xy+y^2 является квадратом.*
Докажите, что нельзя найти пару натуральных чисел x и y, для которых оба числа x^2+xy+y^2 и x^2-xy+y^2 являются квадратами.

Докажем более сильное утверждение: произведение четырех натуральных чисел $z\pm a$, $z\pm 2a$, где $a>0$, не может быть точным квадратом.
Предположим противное. Тогда либо

$$\begin{cases} z^2-a^2=b^2, \\ z^2-4a^2=c^2, \end{cases} \qquad (1)$$

либо

$$\begin{cases} z^2-a^2=3b^2, \\ z^2-4a^2=3c^2. \end{cases}$$

Во втором случае из второго уравнения имеем $z=2z_1$, $c=2c_1$, где $z_1,c_1\in\boldsymbol{N}$. Подставляя это в равенства $a^2=b^2-c^2$, $z^2=4b^2-c^2$, мы приходим к системе $b^2-4c_1^2=a^2$, $b^2-c_1^2=z_1^2$ вида (1).
Рассмотрим первый случай.
Без ограничения общности считая $(z,a,b)=1$, из первого уравнения видим, что z нечетно. Поэтому из второго уравнения $a=uv$, $z=u^2+v^2$; подставим в первое:

$$u^4+u^2v^2+v^4=b^2. \qquad (2)$$

(Разумеется, вторую систему легко свести к такому уравнению и непосредственно.)
Докажем методом спуска, что (2) неразрешимо в натуральных числах.
Без ограничения общности будем считать, что $(u,v)=1$, а u – нечетно; тогда $v=2v_0$ (иначе $3\equiv b^2\,(\mathrm{mod}\,4)$) и $b^2+(uv)^2=\left(u^2+v^2\right)^2$. Существуют m,n такие, что $(m,n)=1$, $uv_0=mn$, $u^2+v^2=m^2+n^2$. Так как $(u,v_0)=(m,n)=1$, то существуют A,B,C,D такие, что $(C,D)=1$, $u=AC$, $v_0=BD$, $m=AD$, $n=BC$. Имеем $\left(A^2-B^2\right)C^2=\left(A^2-4B^2\right)D^2$. Обозначим $\delta=\left(A^2-B^2,A^2-4B^2\right)$; $\delta=1$ либо $\delta=3$.
Пусть $\delta=1$. Так как $(C,D)=1$, то $C^2=\pm\left(A^2-4B^2\right)$, $D^2=\pm\left(A^2-B^2\right)$.
Если «–», то $A^2+C^2=4B^2$. Но $u=AC$ нечетно, откуда A, C нечетны, $A^2+C^2\equiv 2\,(\mathrm{mod}\,4)$. Если «+», то $C^2+(2B)^2=A^2$, $D^2+B^2=A^2$. Так как $(A,C)=1$, то существуют U,V такие, что $UV=B$, $U^2+V^2=A$; $D^2=A^2-B^2=U^4+U^2V^2+V^4$, где $UV=B<2BD=v\le uv$.
Пусть $\delta=3$. Тогда

$$3C^2=\pm\left(A^2-4B^2\right),\ 3D^2=\pm\left(A^2-B^2\right).$$

Если «+», то $3\equiv 3C^2\equiv A^2\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,4)$.
Если «–», то $4B^2=4A^2+12D^2=A^2+3C^2$, $A^2+(2D)^2=C^2$. Существуют U,V такие, что $UV=D$, $U^2+V^2=C$. Но $C^2-D^2=B^2$, $U^4+U^2V^2+V^4=B^2$, где $UV=D<2BD=v\le uv$.
Замечание 1. Произведение четырех натуральных чисел $z\pm a$, $z\pm 3a$, где $a>0$, также не может быть точным квадратом. Это утверждение, как легко видеть, эквивалентно теореме 1 из решения задачи M1934. Далее, этим же свойством обладает и любая четверка $\{z\pm 2a, z\pm 3a\}$. Действительно, в противном случае мы имеем либо

$$\begin{cases} z^2-9a^2=b^2, \\ z^2-4a^2=c^2, \end{cases} \qquad (3)$$

либо

$$\begin{cases} z^2-9a^2=5b^2, \\ z^2-4a^2=5c^2. \end{cases}$$

Во втором случае $a^2=c^2-b^2$, $z^2+(2b)^2=9c^2$. Последнее равенство дает $z=3z_1$, $b=3b_1$, где $z_1,b_1\in\boldsymbol{N}$, – и мы приходим к системе $c^2-4b_1^2=z_1^2$, $c^2-9b_1^2=a^2$ вида (3). В первом случае, без ограничения общности считая $(z,a)=1$, имеем из второго уравнения $a=uv$, $z=u^2+v^2$. Подставив в первое, получаем $u^4-7u^2v^2+v^4=b^2$. Однако в 1912 году американский математик Г.К.Поклингтон доказал, что это уравнение не имеет решений в натуральных числах.
В то же время, наборы чисел $1^2,5^2,7^2$ и $4\cdot1^2,4\cdot4^2,4\cdot7^2,4\cdot8^2$ дают примеры систем натуральных квадратов, каждая из которых имеет целый центр симметрии. Нетрудно показать, что обладающая этим свойством система натуральных квадратов может содержать любое количество элементов.
Замечание 2. Из доказанного при решении задачи утверждения следует, что натуральные числа $z\pm 2a$, $z\pm 4a$, где $a>0$, не могут одновременно быть точными квадратами. Далее, из предыдущего замечания ясно, что этим же свойством обладают и четверки $\{z\pm 2a, z\pm 3a\}$ и $\{z\pm 2a, z\pm 3\cdot(2a)\}$. Случай $\{z\pm 2a, z\pm 5a\}$ рассуждениями, аналогичными проведенным выше при рассмотрении случая $\{z\pm 2a, z\pm 3a\}$, сводится к уравнению $u^4-23u^2v^2+v^4=b^2$. Это уравнение не имеет решений в натуральных числах (это тоже доказал Поклингтон). Таким образом, мы получаем следующее.
Предложение. Пусть x, y, k – натуральные числа, $k\ne 2$, $k<7$. Тогда хотя бы одно из чисел $x^2+kxy+y^2$ и $x^2-kxy+y^2$ не является точным квадратом.
Замечание 3. Уравнения вида

$$x^4+kx^2y^2+y^4=z^2, \qquad (4)$$

где k – фиксированное целое число, $x,y,z\in\boldsymbol{N}$, не раз уже естественно возникали при решении числовых задач из «Задачника «Кванта». Так, в решении M1934 фигурировал случай $k=-1$, $x\ne y$, а в решении M1883

– уравнение $u^4 + v^4 = 2z^2$, где $u \neq v$. Последнее уравнение, как показывает замена $x = \dfrac{u+v}{2}$, $y = \dfrac{|u-v|}{2}$, эквивалентно уравнению (4), где $k = 6$. Эти уравнения, как и фигурирующие в решении настоящей задачи, не имеют решений.

Однако нетривиальные решения существуют не только в случае $k = \pm 2$. Так, при $k = 8$ решением является тройка $(x, y, z) = (2, 1, 7)$, при любом $k = -t^2$, где $t \in \mathbf{N}$, – тройка $(t, 1, 1)$, при $k = -15$ – тройка $(24, 95, 1951)$. Ясно, что любое уравнение (4), имеющее решение в натуральных числах, имеет бесконечно много таких решений.

В.Произволов, В.Сендеров

М1959. *Имеются n квадратных трехчленов с буквенными коэффициентами и прозрачный мешок, содержащий 3n натуральных чисел. Двое ходят поочередно: каждый своим ходом берет из мешка число и заменяет им какой-либо из еще не замененных буквенных коэффициентов. Первый игрок хочет, чтобы каждый из n трехчленов имел хотя бы один целый корень. Может ли второй игрок всегда (при любом содержимом мешка и любой стратегии первого) этому помешать, если а) n = 1; б) n = 2; в) n > 2?*

а) Нет. В случае $M = \{1, 2, 3\}$ первому достаточно первым своим ходом сделать коэффициент при x равным 3.

б) Да. Второму достаточно первым своим ходом сделать вторым коэффициентом уцелевшего трехчлена наименьшее из уцелевших чисел.

в) Да – аналогично б).

Н.Агаханов, В.Сендеров

М1960. *Проекции внутренней точки правильного тетраэдра на грани соединены отрезками с вершинами своих граней. В результате поверхность тетраэдра оказалась разделенной на шесть областей. Каждая пара областей, содержащих пару противоположных ребер тетраэдра, окрашивается в свой цвет: желтый, синий или красный (рис.1). Докажите, что площадь, занятая каждым цветом, одна и та же.*

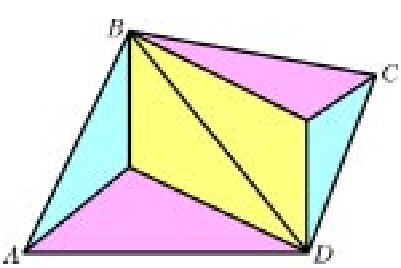


Рис. 1

Проекции внутренней точки P на грани правильного тетраэдра $ABCD$ с ребром 1 обозначим через A_1, B_1, C_1 и D_1. Из каждой из этих четырех точек в своей грани опустим по три перпендикуляра на стороны этой грани. Затем сделаем развертку поверхности тетраэдра в виде параллелограмма (рис.2).

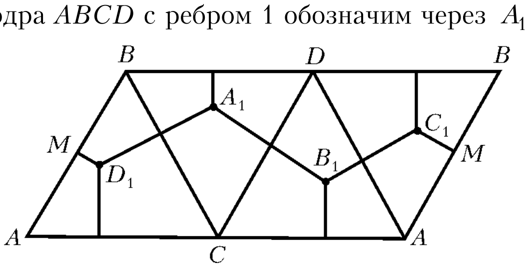


Рис. 2

Легко доказать, что (на развертке)

$$MD_1 + A_1B_1 + C_1M = D_1A_1 + B_1C_1 = 4r,$$

где r – радиус вписанной в грань окружности. Отсюда сразу следует утверждение задачи, что любым цветом закрашена ровно треть поверхности тетраэдра.

В.Произволов

Ф1968. *Капля ртути на чистой горизонтальной поверхности стекла и капля воды на ворсистой поверхности травинки подобны друг другу по форме. Оцените отношение масс этих капель. Плотности ртути и воды равны $\rho_р = 13{,}6$ г/см^3 и $\rho_в = 1$ г/см^3, а их коэффициенты поверхностного натяжения составляют $\sigma_р = 0{,}46$ Н/м и $\sigma_в = 0{,}07$ Н/м соответственно.*

Введем какой-нибудь характерный размер капли, по которому можно полностью определить ее размеры, если известна форма капли. Например, выберем в качестве такого размера высоту капли H.

Форма капли заданного объема V, который пропорционален H^3, определяется условием минимума суммарной потенциальной энергии капли. Эта энергия складывается из энергии E_1, связанной с поверхностным натяжением жидкости, и энергии E_2, обусловленной полем тяжести:

$$E_1 \sim \sigma H^2, \quad E_2 \sim \rho g H^4.$$

Одна из составляющих суммарной энергии пропорциональна отношению V/H, а другая – произведению VH. Отношение E_1/E_2 для капель одинаковой формы должно быть одинаково, поскольку именно им и определяется форма капли. Поэтому должно выполняться следующее соотношение:

$$\frac{\sigma_в H_в^2}{\rho_в g H_в^4} = \frac{\sigma_р H_р^2}{\rho_р g H_р^4}.$$

Отсюда получаем

$$\frac{H_р^2}{H_в^2} = \frac{\sigma_р \rho_в}{\sigma_в \rho_р}.$$

Отношение масс капли ртути и капли воды, таким образом, равно

$$\frac{M_р}{M_в} = \frac{\rho_р H_р^3}{\rho_в H_в^3} = \frac{\rho_р}{\rho_в}\left(\frac{\sigma_р \rho_в}{\sigma_в \rho_р}\right)^{3/2} = \left(\frac{\rho_в}{\rho_р}\right)^{1/2}\left(\frac{\sigma_р}{\sigma_в}\right)^{3/2} =$$

$$= \left(\frac{1}{13{,}6}\right)^{1/2}\left(\frac{0{,}46}{0{,}07}\right)^{3/2} \approx 0{,}271 \cdot 16{,}85 \approx 4{,}6.$$

С.Варламов

Ф1969. *Горизонтальный закрытый теплоизолированный цилиндр разделен на две части тонким теплопроводящим поршнем, который прикреплен пружиной к одной из торцевых стенок цилиндра. Слева и справа от поршня находятся по ν молей идеального одно-*

атомного газа. Начальная температура системы T, длина цилиндра $2l$, собственная длина пружины $l/2$, удлинение пружины в состоянии равновесия x. В поршне проделали отверстие. На сколько изменится температура системы после установления нового состояния равновесия? Теплоемкостями цилиндра, поршня и пружины пренебречь. Считать, что трения нет.

В исходном состоянии сила упругости пружины была уравновешена разностью сил давления газов, находящихся по разные стороны от поршня:

$$\frac{\nu RT}{3l/2 - x} - \frac{\nu RT}{l/2 + x} = -kx ,$$

где k – жесткость пружины. Отсюда находим жесткость пружины:

$$k = \frac{\nu RT}{x}\left(\frac{1}{l/2 + x} - \frac{1}{3l/2 - x}\right).$$

После того, как в поршне проделали отверстие, давления по разные стороны от поршня стали одинаковыми, а удлинение пружины стало нулевым. При этом потенциальная энергия $E = kx^2/2$, которая была запасена в сжатой пружине, пошла на изменение внутренней энергии газа:

$$\frac{kx^2}{2} = \frac{3}{2}\cdot 2\nu R\Delta T .$$

Отсюда находим искомое изменение температуры газа:

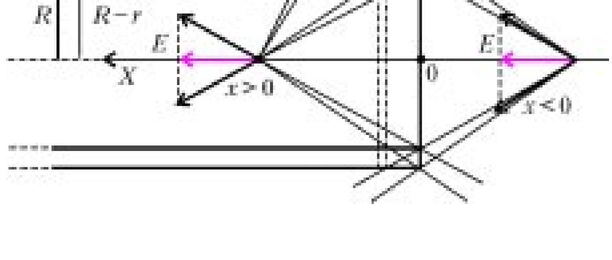
$$\Delta T = \frac{kx^2}{6\nu R} = \frac{x}{6}\left(\frac{1}{l/2 + x} - \frac{1}{3l/2 + x}\right)T =$$

$$= \frac{2x}{3}\frac{l - 2x}{(l + 2x)(l - 2x)}T .$$

О.Шведов

Ф1970. *Две очень длинные цилиндрические трубы имеют одну и ту же длину, а их радиусы равны R и $R - r$, причем $r \ll R$. Труба меньшего радиуса вставлена в бóльшую так, что их оси и торцы совпадают. Трубы заряжены равномерно по площади электрическими зарядами: внутренняя с поверхностной плотностью заряда $+\sigma$, а внешняя – с поверхностной плотностью $-\sigma$. На оси этой системы вблизи от одного из торцов измеряют напряженность электростатического поля E. Найдите, как зависит E от расстояния x до этого торца.*

Выберем на оси системы точку, расположенную вблизи одного из торцов, и построим произвольно ориентированную коническую поверхность с вершиной в этой точке и малым телесным углом (см. рисунок).



Если эта поверхность пересекает и положительно и отрицательно заряженные цилиндры, то «вырезаемые из них заряды пропорциональны соответствующей поверхностной плотности зарядов на цилиндрах, квадратам расстояний до этих зарядов и некоторой одинаковой функции, зависящей только от параметров телесного угла. Указанные заряды создают в выбранной точке нулевое суммарное поле, поскольку оно пропорционально величинам этих зарядов и обратно пропорционально квадратам расстояний от зарядов до этой точки. Если точка наблюдения расположена внутри цилиндров (считаем, что при этом $x > 0$, т.е. ось X направлена внутрь цилиндров, а начало отсчета находится на их торце), то нескомпенсированными окажутся только участки положительно заряженного внутреннего цилиндра в форме кольца вблизи торца цилиндра. Если же $x < 0$, т.е. точка наблюдения находится вне цилиндров, то нескомпенсированными окажутся участки отрицательно заряженного внешнего цилиндра, также имеющие форму кольца. Заметим, что другой торец цилиндров, согласно условию задачи, находится очень далеко и полем от него можно пренебречь.

Поле кольца радиусом R, имеющего равномерно распределенный по длине заряд Q, на оси кольца на расстоянии x от его плоскости направлено вдоль оси и равно

$$E = \frac{Qx}{4\pi\varepsilon_0\left(R^2 + x^2\right)^{3/2}} .$$

Ширина положительно заряженного кольца (при $x > 0$) равна, как видно из рисунка, $\frac{r}{R}x$, а ширина отрицательно заряженного кольца (при $x < 0$) равна $\frac{r}{R - r}(-x) \approx \frac{r}{R}(-x)$, поскольку $r \ll R$. Заряды колец равны, соответственно,

$$Q_+ = \sigma\cdot 2\pi(R - r)\frac{r}{R}x \approx 2\pi\sigma rx$$

и

$$Q_- \approx -\sigma\cdot 2\pi R\frac{r}{R}(-x) \approx 2\pi\sigma rx .$$

Заметим, что отрицательный знак Q_- при такой записи получается автоматически – за счет того, что в данном случае $x < 0$. Объединяя оба выражения для любых значений x, можно записать

$$Q = 2\pi\sigma rx .$$

Подставляя это значение Q в выражение для напряженности поля заряженного кольца, получаем, что проекция вектора напряженности электрического поля на ось X вблизи торца цилиндров равна

$$E \approx \frac{\sigma rx^2}{2\varepsilon_0\left(R^2 + x^2\right)^{3/2}} .$$

С.Варламов

Ф1971. *Имеется бесконечная сетка, составленная из одинаковых проволочек (рис.1). Известно, что сопро-*

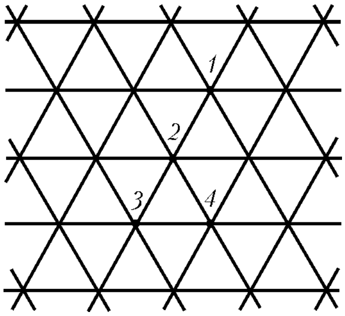


Рис. 1

тивление, измеренное между точками 1 и 2 этой сетки, равно R, а между точками 1 и 3 – r (на самом деле, эти сопротивления связаны определенным образом, но не будем усложнять себе задачу). Найдите сопротивление между точками 1 и 4, выразив его через R и r.

Во время измерений потенциалы в очень далеких точках (узлах сетки) равны нулю. Поэтому, если мы соединим их хорошо проводящим проводом, то ничего не изменится. Назовем этот провод «бесконечность». Пусть во время измерений сопротивления напряжение между точками *1* и *2*, измеренное идеальным вольтметром, равно U, а ток в измерительной цепи, содержащей источник питания и идеальный амперметр, равен I. Возьмем теперь два одинаковых источника, каждый из которых дает фиксированный ток I. Первый источник подключим к точке *1* и «бесконечности» так, чтобы ток I тек по сетке от точки *1* к «бесконечности». При этом распределение тока по разным направлениям (по шести проводникам, подключенным к точке *1*) равномерно. Второй источник подсоединим к точке *2* и «бесконечности» так, чтобы он снимал с точки *2* ток I, текущий к ней по сетке из «бесконечности». В силу линейности цепи, ток в любой ее точке теперь будет суммой токов двух источников, для каждого из которых распределение тока симметрично относительно точки, к которой он подключен. Также мы видим, что получили исходную схему.

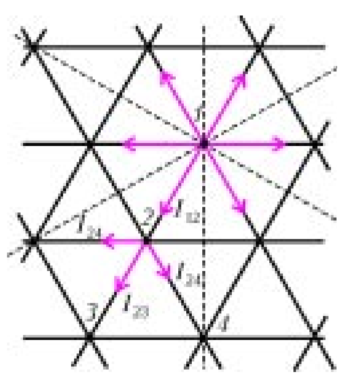


Рис. 2

Рассмотрим случай, когда один источник подключен к точке *1* и «бесконечности». На рисунке 2 показаны участки (пунктирные линии их пересекают), где ток не идет из соображений симметрии. Очевидно, что

$$I_{12} = I_{23} + 2I_{24} \text{ и } I = 6I_{12}.$$

При измерении $R_{12} = R$ ток, текущий по проволочке *1–2*, равен $2I_{12}$, поскольку токи двух источников складываются. Напряжение между точками *1* и *2* равно $2r_0I_{12}$, где r_0 – сопротивление одной проволочки. Отсюда

$$R_{12} = R = \frac{2r_0I_{12}}{I} = \frac{r_0}{3}.$$

При измерении $R_{13} = r$ напряжение между точками *1* и *3* равно $2r_0\left(I_{12} + I_{23}\right)$, поскольку текущий по проволочкам *1–2* и *2–3* суммарный ток одинаков и равен $I_{12} + I_{23}$, а сопротивление равно

$$R_{13} = r = \frac{2r_0\left(I_{12} + I_{23}\right)}{I} = R(1 + a).$$

Отсюда для $a = I_{23}/I_{12}$ находим

$$a = \frac{r - R}{R}.$$

Аналогично получаем, что при измерении R_{14} текущий по проволочками *1–2* и *2–4* суммарный ток одинаков и равен $I_{12} + I_{24}$, напряжение между точками *1* и *4* равно $2r_0\left(I_{12} + I_{24}\right)$, и сопротивление равно

$$R_{14} = \frac{2r_0\left(I_{12} + I_{24}\right)}{I} = R(1 + b).$$

Для $b = I_{24}/I_{12}$ из этого уравнения находим

$$b = \frac{R_{14} - R}{R}.$$

Поскольку

$$I_{12} = I_{23} + 2I_{24}, \text{ или } 1 = a + 2b,$$

то подставляя в последнее уравнение a и b, выраженные через R, r и R_{14}, получаем

$$1 = \frac{r - R}{R} + \frac{2\left(R_{14} - R\right)}{R},$$

откуда

$$R_{14} = 2R - \frac{r}{2}.$$

Е.Антышев

Ф1972. *На высоте h от горизонтальной плоскости находится тонкое непроводящее кольцо массой m и радиусом R, по которому равномерно распределен заряд q. В момент времени t = 0 кольцо начинает падать без начальной скорости, сохраняя в полете горизонтальное положение. Одновременно с началом падения кольца включается магнитное поле, ось симметрии которого совпадает с осью кольца. Вблизи кольца магнитное поле однородно, направлено вертикально, а его индукция нарастает по закону* $B = kt^2$, *где k – постоянная величина. Упав на плоскость, кольцо быстро останавливается и прилипает к ней. Найдите количество теплоты, которое при этом выделится в данной системе. Сопротивлением воздуха пренебречь, ускорение свободного падения равно g.*

При падении кольца поток вектора магнитной индукции через него будет изменяться, вследствие чего возникнет вихревое электрическое поле, силовые линии которого лежат в плоскости кольца. Это поле будет действовать на распределенный по кольцу заряд, и кольцо будет раскручиваться.

Согласно закону электромагнитной индукции Фарадея, при изменении потока $\Phi = BS$ через кольцо площадью $S = \pi R^2$ возникает ЭДС индукции

$$\mathcal{E} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\pi R^2 \frac{\Delta B}{\Delta t}.$$

При этом напряженность вихревого электрического поля, которое действует на заряды кольца, равна

$$E = \frac{\mathcal{E}}{2\pi R} = -\frac{R}{2}\frac{\Delta B}{\Delta t}.$$

Следовательно, раскручивающая кольцо сила равна

$$F = qE = -\frac{qR}{2}\frac{\Delta B}{\Delta t},$$

а сообщаемое ею кольцу угловое ускорение по модулю равно

$$\frac{|\Delta\omega|}{\Delta t} = \frac{|F|}{mR} = \frac{q}{2m}\frac{|\Delta B|}{\Delta t},$$

где $\Delta\omega$ – приращение угловой скорости кольца за малое время Δt. Из последней формулы следует, что

$$\Delta\omega = \frac{q}{2m}\Delta B,$$

поскольку и угловая скорость кольца ω, и величина индукции магнитного поля B возрастают со временем. Кольцо коснется плоскости через время $\tau = \sqrt{2h/g}$ после начала падения. За это время оно приобретет угловую скорость

$$\omega(\tau) = \frac{q}{2m}B(\tau) = \frac{q}{2m}k\tau^2 = \frac{kqh}{mg}.$$

Так как по условию задачи кольцо, упав на плоскость, быстро останавливается и прилипает к ней, то вся приобретенная кольцом за время падения кинетическая энергия перейдет в тепло (поскольку время торможения кольца очень мало, можно пренебречь работой, которую совершают за это время над кольцом силы, действующие со стороны вихревого поля). Значит,

$$Q = mgh + \frac{m\omega^2(\tau)R^2}{2} = mgh + \frac{m}{2}\left(\frac{kqhR}{mg}\right)^2 =$$

$$= mgh + \frac{k^2q^2h^2R^2}{2mg^2} = mgh\left(1 + \frac{k^2q^2R^2h}{2m^2g^3}\right).$$

Замечание. При решении этой задачи можно пренебречь магнитным полем, создаваемым вращающимся заряженным кольцом, и вкладом этого поля в полный магнитный поток, пронизывающий кольцо. Такое приближение обычно используется при решении ряда аналогичных задач, например о падении проводящей рамки или о движении перемычки по рельсам в магнитном поле.

К.Башевой

ИЗ ИСТОРИИ НАУКИ

Университеты Германии

(Начало см. на с. 14)

отвечала организации средневековых университетов с классическим набором юридического, медицинского, философского и богословского факультетов. Однако под влиянием передовых философов того времени Гегеля, Фихте и Шлейермахера, а также естествоиспытателя Александра Гумбольдта в стенах университета с самого начала получили развитие многие естественнонаучные дисциплины.

Первое здание Берлинскому университету было подарено прусским королем Фридрихом Вильгельмом III (с 1828 по 1949 год университет носил его имя). По мере развития университета новые подразделения и институты интегрировались в его структуру — в частности, в нее вошли знаменитая Клиника Шарите и Музей натуральной истории.

Расцвет Берлинского университета пришелся на первые декады XX века. Именно в эти годы его профессорам было присуждено наибольшее количество Нобелевских премий (всего – 29!). Так, первая Нобелевская премия по химии 1901 года была вручена Якобу Вант-Гоффу за исследование динамики химических реакций, а премия по литературе 1902 года была присуждена историку античности Теодору Моммзену. Среди выдающихся ученых Берлинского университета лауреаты Нобелевской премии Отто Ган, Макс Лауэ, Макс Планк, Альберт Эйнштейн, Вернер Гейзенберг, Эрвин Шрёдингер, Ханс Бете и Макс Борн. Кажется, весь цвет экспериментальной и теоретической физики того времени собрался в Берлине.

Этот яркий период завершился в 1933 году с изменением политической обстановки в стране и изгнанием из стен университета инакомыслящих. После второй мировой войны раскол в среде университетских профессоров только усилился, так что новый Свободный университет был основан в Западном Берлине. С 1949 года Берлинский университет стал носить имена братьев Александра и Вильгельма Гумбольдтов.

После объединения Германии развитию Гумбольдтова университета был дан новый импульс. Он получил новые корпуса в пригороде Берлина, где сконцентрированы факультеты естественнонаучного направления. Берлинский университет активно участвует во всех европейских образовательных программах, более 10 процентов из 40000 студентов – иностранцы. В настоящее время степень магистра в Берлинском университете присуждается по 59 различным направлениям. Традиционно сильны его связи с восточноевропейскими университетами и, в частности, с Московским государственным университетом им. М.В.Ломоносова.