

Алгоритмы

- А-1 Степень с целым показателем
- А-2 Степенные функции
- А-3 Степень с рациональным показателем
- А-4 Иррациональные уравнения и неравенства
- А-5 Логарифмы

А-1 Степень с целым показателем

Повторение

1. Степень с натуральным показателем

1.1. Представьте число в виде степени с натуральным показателем или в виде произведения степеней, основания которых взаимно простые числа.

1) 64; 216; 256; 243; 343; 1024; 729; 0,125; 0,0001; $4\sqrt{2}$; $27\sqrt{3}$; $5\sqrt{5}$.

2) 72; 48; 96; 864; 320; 2592; 21600; 196000.

1.2. Вычислите:

$(-2)^5$; -2^4 ; -2^3 ; $(-1)^8 - (-1)^7$; $-1^8 + (-1)^7$; $(-1)^6 - (-1)^5 - (-1)^4$; $(-2)^3 - (-3)^3$; $-(-2)^5$; $-0,3^4$.

1.3. Выполните действия со степенями.

1) $\frac{2^5 \cdot 6^4}{3^5 \cdot 4^4}$

4) $\left(\frac{2^4}{25}\right)^3 \cdot \left(\frac{3^2}{2^3}\right)^4 \cdot \left(\frac{5^3}{9}\right)^3$

2) $\frac{2^7 \cdot 9^6}{3^5 \cdot 6^6}$

5) $\frac{3 \cdot 4^{10} - 5 \cdot 2^{19}}{16^5}$

3) $\left(1\frac{19}{35}\right)^3 \cdot \left(1\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^4$

6) $\frac{4 \cdot 3^{17} + 5 \cdot 27^5}{9^8 + 81^5}$

1.4. Сравните значения выражений.

63^{20} и 9^{40} ; 81^4 и 27^5 ; 14^4 и 28^3 ; 625^3 и 125^4 ; 48^3 и 18^4 ; 32^7 и 128^5

2. Степень с отрицательным целым показателем

2.1. а) Замените выражение дробью:

1) a^{-5}

5) 2^{-5}

9) $a^{-2} + b^{-2}$

2) $2x^{-3}$

6) $2 \cdot 4^{-3}$

10) $(a + b)^{-2}$

3) $(0,1)^{-1} xy^{-2}$

7) $0,2 \cdot 5^{-2}$

11) $(-a)^{-1} - b^{-1}$

4) $(0,1xy)^{-2}$

8) $(-0,4)^{-1}$

12) $(-a)^{-2} - b^{-2}$

б) Запишите в виде степени с отрицательным показателем:

1) $\frac{1}{3^5}$

6) $(0,04)^2$

11) $\frac{(a+b)^2}{a^2b^2}$

2) $\frac{1}{0,2^2}$

7) $(0,16)^2$

12) $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^3$

3) 0,001

9) $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^4$

4) $\left(\frac{1}{6}\right)^4$

10) $\frac{4}{x^2 + 2xy + y^2}$

5) $(0,125)^2$

в) Вычислите.

1) $0,5^{-2}$

6) $(0,2)^{-3} \cdot (-1)^{-3}$

2) $4 \cdot (0,125)^{-3}$

7) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-4} \cdot (-0,5)^{-2}$

3) $-(17,3^0) \cdot (-0,04)^{-2}$

8) $(0,25)^{-3} : (-0,5)^{-2}$

4) $(-\sqrt{51})^0 \cdot (0,25)^{-3}$

9) $10^{-5} : (-0,1)^{-3}$

5) $(-1)^{-1} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-4}$

10) $-0,5^4 : 2^{-4}$

2.2. а) Вычислите значение числового выражения.

1) $2^{-1} + 2^0 + 2^1$

6) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-2} : \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-8}$

2) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} - 2 \cdot 9^{-1} + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^4$

7) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-4} \cdot (\sqrt{3})^{-4} : \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-4}$

3) $(0,2)^{-3} \cdot 10^{-1} + (0,01)^{-4} \cdot 20^{-2} + \frac{2 \cdot 30^0}{1,25^{-1}}$

8) $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{-2} : \left(\frac{2}{\sqrt{5}+1}\right)^{-2}$

4) $(5^3)^{-2} \cdot (0,1)^{-6} - (4^{-3})^{-1}$

5) $(-3)^{-2} \cdot (-3)^5 : ((-3)^{-2})^{-3}$

б) Найдите x из уравнения.

1) $2^x = \frac{1}{8}$

2) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 27$

3) $10^{2x-1} = 1$

4) $\left(\frac{9}{4}\right)^{-x} = \frac{8}{27}$

2.3. Выполните действия; ответ представьте в виде выражения со степенями с натуральным показателем.

1) $(x^{-3})^2$

4) $(x^{-1})^{-1}$

6) $(x^{-3}y)^{-1} \cdot (x^3y^{-3})^2$

8) $\frac{(x^{-2}y^{-1}z)^2}{(xy^{-2}z^3)^{-1}}$

2) $(x^2)^{-1}$

5) $(x^2y^{-3}z^{-1})^{-2}$

7) $\frac{x^{-3}}{x^{-5}}$

3) $(x^{-2})^3$

2.4. Сравнение

а) Сравните числа с числом 1.

1) $\left(\frac{-12}{13}\right)^{-2}$

3) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^0$

5) $\left(1\frac{2}{3}\right)^{-2}$

2) $\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^{-1}$

4) $\left(\frac{-17}{14}\right)^{-1}$

6) $\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^{-2}$

б) Сравните числа.

1) $0,969 \cdot 10^{-3}$ и $1,8 \cdot 10^{-4}$

2) $13,2 \cdot 10^{-7} : (3,3 \cdot 10^{-5})$ и $1,8 \cdot 10^{-8} \cdot 0,3 \cdot 10^{-7}$

3) $4,8 \cdot 10^{-5} : (16 \cdot 10^{-7})$ и $0,57 \cdot 10^{-2} : (19 \cdot 10^{-6})$

4) $\left(\frac{19}{13}\right)^{-3}$, $\left(1\frac{5}{14}\right)^{-2}$ и $\left(\frac{18}{19}\right)^{-2}$

5) $\left(1\frac{1}{3}\right)^{-2}$, $\left(1\frac{1}{5}\right)^{-2}$ и $\left(\frac{7}{8}\right)^{-1}$

6) $\left(\frac{3}{8}\right)^{-2}$, $\left(\frac{7}{3}\right)^2$ и $\left(\frac{17}{13}\right)^{-1}$

2.5. Упростите выражение.

1) $\frac{a^{-4} - b^{-4}}{b^{-2} + a^{-2}} + 2(ab)^{-1} + 2ab^{-1}$

2) $\frac{a^{-2} - 2(ab)^{-1} + b^{-2}}{b^{-2} - a^{-2}} + (a+b)(a-b)^{-1}$

3) $(1 - a^{-1})\left(1 + \frac{1}{a} + a^{-2}\right)$

4) $(2x^{-2} - 3)(4x^{-4} + 6x^{-2} + 9)$

5) $\frac{1 + 5x^{-1} + 6x^{-2}}{x^{-1} + 2x^{-2}} - \frac{1}{3x^{-2} - x^{-1}}$

A-2 Степенные функции

1. Графики функций $y = x^k$, где k – целое число

1.1. Сравнение значений функции.

Постройте графики функций $y = x^3$ и $y = x^5$ в одной координатной плоскости. С помощью графиков сравните:

1) $(0,183)^3$ и $(0,183)^5$

3) $(-0,834)^3$ и $(-0,834)^5$

2) $(1,239)^3$ и $(1,239)^5$

4) $(-1,378)^3$ и $(-1,378)^5$

1.2. Нахождение коэффициента a .

Функция имеет вид $y = a \cdot x^k$. Найдите a , если известно, что график проходит через точку $A(x; y)$ и известно число k и напишите формулу функции.

1) $x = 1, y = -\frac{1}{3}, k = 1$

2) $x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{4}, k = 2$

3) $x = \frac{\sqrt{2}}{2}, y = 1, k = 4$

6) $x = -1, y = \frac{1}{3}, k = -3$

4) $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}, k = -2$

5) $x = 1, y = 3, k = 3$

1.3. Принадлежность точки графику функции.

Определите, принадлежат ли следующие точки графикам функций. Объясните почему.

1) $y = x^2$ точка $N(-0,91; -0,8281)$

5) $y = x^4$ точка $S(\sqrt{2} - 1; 12\sqrt{2} - 17)$

2) $y = x^{-19}$ точка $M(0; 0)$

6) $y = x^{-1}$ точка $P\left(\frac{1}{\sqrt{17}}; \sqrt{17}\right)$

3) $y = x^3$ точка $K(-4,1; -68,922)$

4) $y = x^{-2}$ точка $F\left(-\frac{1}{4}; 16\right)$

1.4. Монотонность функций.

Сравните значения функции

1) $y = x^{10}$ при $x = 0,227$ и при $x = 0,23$

4) $y = x^{-2}$ при $x = 19,1$ и при $x = 19,09$

2) $y = x^{10}$ при $x = -1,67$ и при $x = -1,7$

5) $y = x^{-4}$ при $x = -2,21$ и при $x = -2,031$

3) $y = x^5$ при $x = -12,42$ и при $x = -12,5$

6) $y = x^{-1}$ при $x = -0,235$ и при $x = -0,31$

1.5. Графическое решение уравнений.

Определите, сколько корней имеет уравнение

1) $x^n = 10^4$ при всех значениях n

5) $x^3 - \frac{1}{x+1} = 0$

2) $x^4 = a, a > 0$

6) $x^3 - \frac{1}{x} + 3 = 0$

3) $x^{-3} = 4x - x^2$

4) $x^{-2} = 4 - x^2$

2. Нахождение обратной функции

Для заданной функции $y = f(x)$ постройте обратную функцию и запишите ее в виде $y = g(x)$.

1) $y = 5x - 10$

5) $y = \frac{1}{x^2}; x < 0$

2) $y = \frac{3x}{x-1}$

6) $y = \sqrt{1-x^2}; x \leq 0$

3) $y = 8x^3$

7) $y = \sqrt[3]{x+2}$

4) $y = 4x^2; x \geq 0$

3. Область определения функции

Найдите область определения следующих функций.

1) $y = \sqrt{1-2x}$

5) $y = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 2}$

2) $y = \sqrt{x(1-x)}$

6) $y = \sqrt[3]{\frac{x}{x^2-9}}$

3) $y = \sqrt{4x^2-1}$

7) $y = x^3 - 2x^2 + 5$

4) $y = \sqrt{\frac{x}{x-1}}$

8) $y = (2x^{-2} - 1)^3$

A-3 Степень с рациональным показателем

1. Степень с дробным показателем

Упростите, используя степени с рациональными показателями.

1) $\sqrt{a^5}$

7) $a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{-\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{3}{4}}$

12) $\frac{a^{\frac{4}{5}} \cdot b^{-\frac{3}{5}} \cdot c^{\frac{4}{3}}}{a^{-\frac{3}{10}} \cdot b^{\frac{5}{4}} \cdot c^{-3}}$

2) $\sqrt[3]{a^4}$

8) $\sqrt{a} \sqrt[3]{a} \sqrt[4]{a}$

3) $\sqrt[4]{a^7}$

9) $\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{6}{5}}$

13) $\frac{x^{\frac{5}{4}} \left(x^{\frac{3}{4}} + x^{-\frac{1}{4}}\right)}{x^{\frac{4}{3}} \left(x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}}\right)}$

4) $\frac{1}{\sqrt{a^3}}$

10) $\left(a^{-\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{8}{3}}$

5) $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$

11) $\left(a\sqrt{b}\right)^3 \cdot \left(\sqrt[3]{a^2b}\right)^2$

6) $\frac{1}{\sqrt[4]{a^{11}}}$

2. Вычисления с дробными показателями

2.1. Вычислите значение числового выражения.

1) $4^{-\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{2}{3}} + (16)^{-\frac{3}{4}}$

4) $\left(100^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{9}{4}} - \left((0,2)^{-3}\right)^{-1}$

2) $(\sqrt{3})^{-\frac{4}{3}} \cdot \sqrt[3]{9} + 81^{-\frac{3}{4}} + \left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{3}{2}}$

3) $\frac{2^{-\frac{5}{6}} \cdot \sqrt{2}}{4^{\frac{1}{6}}}$

2.2. Вычислите значения выражения $A = \frac{2a^{-\frac{2}{3}}}{b^{\frac{3}{4}}}$ при данных значениях букв a и b .

1) $a = 0,001; b = 1$

2) $a = 10^{12}; b = 10^{-12}$

3) $a = 2\sqrt{2}; b = 4$

4) $a = \frac{1}{2}; b = \frac{1}{\sqrt[3]{16}}$

2.3. Найдите x из уравнения.

1) $2^x = \sqrt[3]{4}$

2) $3^{-2x+1} = \frac{1}{9}$

3) $10^{-x} = 0,01$

4) $\left(\frac{5}{3}\right)^x = (0,6)^{1-x}$

3. Преобразование выражений

Упростите.

1) $a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{-\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{1}{12}} \cdot a^{\frac{4}{3}}$

2) $(2a^{\frac{3}{2}}x^{-\frac{5}{6}})^4$

3) $(x^{-1} \cdot x^3)^{-2} \cdot (x^{-3})^{-1}$

4) $\frac{x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}} \cdot \left(x^{\frac{2}{3}} - (xy)^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)$

5) $\frac{a \cdot a^{\frac{1}{3}} - b \cdot b^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}$

6) $\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}$

7) $(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}) \cdot (a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}})$

8) $(x^{-1} + y^{-1}) : (x^{-\frac{1}{3}} + y^{-\frac{1}{3}})$

9) $(a+27) : (a^{\frac{2}{3}} - 3a^{\frac{1}{3}} + 9)$

10) $(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}b)(ab^{-\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})$

11) $\left(\frac{x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}} + yx^{\frac{1}{2}}} + \frac{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}} - yx^{\frac{1}{2}}}\right) \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}} \cdot y^{\frac{1}{2}}}{x+y}$

12) $\frac{a-x}{a^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}} - \frac{a+a^{\frac{1}{4}}x^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{4}}x^{\frac{1}{4}}} + a^{\frac{1}{4}}x^{\frac{1}{4}}$

13) $4m^2n^2(4mn - m^2 - 4n^2)^{-1} - (mn^{-1} + m^{-1}n + 2)(4m^{-1}n^{-1} - n^{-2} - 4m^{-2})^{-1}$

4. Докажите неравенство.

1) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}} < \left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$

2) $3^{\frac{1}{3}} > 4^{\frac{1}{4}} > 5^{\frac{1}{5}}$

3) $2003^{\frac{1}{2}} + 2005^{\frac{1}{2}} < 2 \cdot 2004^{\frac{1}{2}}$

4) $2^{-\frac{1}{100}} + 101^{-1} > 1$

A-4 Иррациональные уравнения и неравенства

1. Иррациональные уравнения

Решите уравнения.

1) $\sqrt{2x+3} = 0$

2) $\sqrt{x-4} = 3$

3) $\sqrt{x^2-16} = 3$

4) $\frac{3}{\sqrt{5-x}} = 1$

5) $\sqrt{2x-4} = \sqrt{x+3}$

6) $\sqrt{3-x} = \sqrt{x-5}$

7) $\sqrt{2x-3} = \sqrt{x+5}$

8) $\sqrt{2x-3} = \sqrt{x-4}$

9) $\sqrt{4x+1} = 2x+1$

10) $\sqrt{x^2+x+1} = x-2$

11) $\sqrt{5-x^2} = x-1$

12) $\sqrt{x+5} = x-1$

13) $4\sqrt{x+6} = x+1$

14) $2\sqrt{x+5} = x-2$

15) $\sqrt{x-3} = 5-x$

16) $\sqrt{x^2+8} = 2x+1$

17) $\sqrt{8x-x^2} = x+2$

18) $\sqrt{6-x-x^2} = x+1$

19) $\sqrt{x+5} + \sqrt{8-x} = 5$

20) $\sqrt{x+15} + \sqrt{x+3} = 6$

21) $\sqrt{x+8} - \sqrt{x+3} = 1$

22) $\sqrt{x^2-16} + \sqrt{x^2-9} = 7$

23) $\sqrt{1-2x} - \sqrt{x+4} = \sqrt{x+13}$

24) $\sqrt{\frac{20}{x}+1} + \sqrt{\frac{20}{x}-1} = \sqrt{6}$

25) $\sqrt[3]{3x-2} = 1$

26) $\sqrt[4]{x} = -1$

27) $\sqrt[3]{x^4+3} = \sqrt[3]{x^2+3}$

28) $\sqrt[3]{9-x} + \sqrt[3]{x} = 3$

29) $\sqrt[3]{24+\sqrt{x}} - \sqrt[3]{5+\sqrt{x}} = 1$

30) $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x-16} = \sqrt[3]{x-8}$

2. Иррациональные неравенства

1) $\sqrt{2x} \geq 2$

2) $\sqrt{x+3} > 1$

3) $\sqrt{x-2} \leq 4$

4) $\sqrt{x+3} \geq 2$

5) $\sqrt{2x-7} \leq 3$

6) $\sqrt{3-x} \leq 1$

7) $2\sqrt{-(x+1)} \geq 3$

8) $\sqrt{2x-1} \leq \sqrt{x+1}$

9) $\sqrt{2x+3} \leq \sqrt{x+5}$

10) $\sqrt{3x-2} > \sqrt{6-x}$

11) $\sqrt{x+6} \leq x$

12) $\sqrt{x+4} \geq x-2$

13) $\sqrt{x^2-x-1} \leq 1$

14) $\sqrt{x^2-1} \geq x-2$

15) $\sqrt{x^2-1} \leq x-1$

16) $x < \sqrt{2-x}$

17) $x+1 > \sqrt{x+2}$

18) $\sqrt{x^2-x-12} < x$

19) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} \leq 1 - 3x$

24) $\sqrt[3]{x-1} \leq 2$

20) $\sqrt{x-6} - \sqrt{10-x} \geq 1$

25) $\sqrt[3]{4x} \leq \frac{2}{3}$

21) $\sqrt{\frac{3x-1}{2-x}} > 1$

26) $\sqrt[3]{x-1} \leq 3$

22) $\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-1} < 0$

27) $\sqrt[4]{x-5} < 3$

23) $\frac{\sqrt{x+5}}{1-x} < 1$

28) $\sqrt{1-x} \leq \sqrt[4]{5+x}$

29) $\sqrt[3]{x+1} \leq \sqrt{2x+1}$

A-5 Логарифмы

1. Вычисление логарифмов

Вычислите.

1) $\log_a a, \log_a 1, \log_a a^5, \log_a \frac{1}{a}, \log_a \sqrt{a}, \log_a \sqrt[5]{a^3}$

2) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}, \log_{\frac{1}{2}} 2, \log_{\frac{1}{2}} 1, \log_{\frac{1}{2}} 8, \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2}, \log_{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{2}}{2}$

3) $\log_3 27, \log_3 \frac{1}{9}, \log_9 \frac{1}{27}, \log_2 \sqrt{2}, \log_2 \frac{1}{\sqrt{2}}, \log_5 5\sqrt{5}, \log_{\frac{1}{2}} 2\sqrt{2}$

4) $2^{\log_2 3}, 4^{\log_2 3}, 2^{\log_4 3}, 27^{\log_3 \sqrt[3]{27}}$

5) $\log_2 1024$

6) $\log_2 \frac{1}{16}$

7) $\lg \sqrt{10}$

8) $\lg 0,001$

9) $\log_2 4^{-10}$

10) $\log_4 2^{15}$

2. Решение уравнений

Найдите x из уравнения.

1) $\log_2 x = 4$

6) $\log_4 x = 2$

2) $\log_2 x = -2$

7) $\log_2 x = 3$

3) $\log_2 x = 0$

8) $\log_3 x = 2$

4) $\log_2(x-1) = 1$

9) $\log_5 x = -2$

5) $\lg x = 2$

10) $\log_{\sqrt{2}} x = 4$

11) $\lg x = 0$

12) $\log_2(1 - 3x) = 3$

13) $\log_{\frac{1}{2}}(2x - 3) = -2$

14) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 3x + 1) = 0$

15) $\log_7 \log_3 \log_2 x = 0$

3. Логарифмирование

Прологарифмируйте выражение A по основанию a .

1) $A = x^4$

2) $A = 2a^2x^3y^4$

3) $A = \frac{\sqrt[3]{a^2b\sqrt{c}}}{3\sqrt{3d}}$

4) $A = \frac{3\sqrt{a}}{ab}$

5) $A = \frac{a^2}{a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{4}}c^{-\frac{1}{2}}}$

6) $A = a^3(a - 2)(a - 5)$

7) $A = 4a^2b; a = 2$

8) $A = \sqrt{2} a^5; a = 2$

9) $A = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{b}}; a = 2$

10) $A = 1000a^{-3}b^{-2}; a = 10$

11) $A = \frac{3xy^{-2}}{10\sqrt{10}}; a = 10$

12) $A = 10^{-3} \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[3]{b^2}; a = 10$

4. Потенцирование

Найдите A по его логарифму.

1) $\log_a A = 3 + 2\log_a b - \frac{1}{2}\log_a x - 4\log_a y$

2) $\lg A = -1 + \frac{1}{2}\lg(x - 1) + \frac{1}{2}\lg(x + 1) - 3\lg x$ (\lg – это обозначение логарифма по основанию 10)

3) $\log_2 A = \log_2 \log_2 5 - \log_2 \log_2 10$

4) $\log_{\frac{1}{2}} A = \log_{\frac{1}{2}} x - \log_2 y - 1$

5) $\log_2 A = \log_2 3 + \log_2 5$

6) $\log_2 A = 2 + \log_2 x$

7) $\log_2 A = 2\log_2 a + 3\log_2 b - 1$

8) $\log_2 A = \frac{1}{2}\log_2 a - \log_2 b + \log_2 3$

9) $\lg A = \lg x - \lg y + 3$

Соответствия

- С-1 Степенные функции с целыми показателями и их графики
- С-2 Взаимно обратные функции
- С-3 Графики функций $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$
- С-4 Графический метод решения иррациональных уравнений и неравенств
- С-5 Числа и их логарифмы

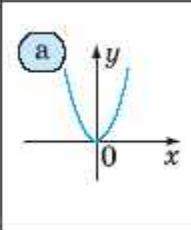
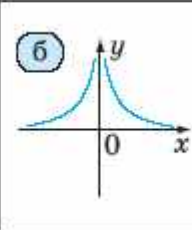
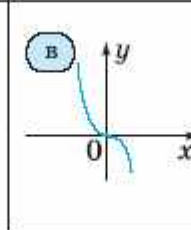
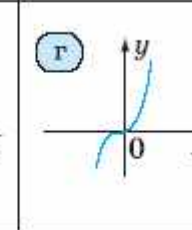
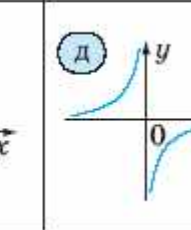
С-1 Степенные функции с целыми показателями и их графики

1. Графики степенных функций

- 1) Постройте график функции $y = \frac{1}{2}x^3$ и проведите исследование этой функции по графику.
- 2) Найдите коэффициент k в задании функции $y = kx^4$, зная, что график функции проходит через точку $P(-2; 4)$. Постройте график функции и проведите ее исследование.
- 3) Постройте графики функций $y = x^{-2}$ и $y = x^{-2} - 1$. Исследуйте вторую из этих функций на промежутке $[\frac{1}{2}; 2]$.
- 4) Постройте график функции $y = \frac{1}{3}((x+1)^3 - 8)$. Исследуйте эту функцию на промежутке $[-3; 2]$.

2. Распознавание графика

Укажите соответствие между функциями и их графиками.

1	2	3	4	5
$y = -x^{-3}$	$y = 2x^{-2}$	$y = -x^3$	$y = x^4$	$y = x^5$
				

3. Сравнение степеней

Расположите числа в порядке возрастания.

1) $2^{-\frac{3}{4}}$; 2 ; $\frac{1}{2}$; $2^{\frac{2}{3}}$; $2^{-\frac{4}{3}}$.

2) $\left(\frac{1}{3}\right)^2$; $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}$; $9^{-\frac{1}{3}}$; $3^{\frac{3}{4}}$; $\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{3}{2}}$.

$$3) 2^4; \left(\frac{3}{2}\right)^4; (-3)^4; \left(-\frac{3}{4}\right)^4; \left(\frac{9}{25}\right)^2.$$

$$4) 3^3; (-2)^3; \left(\frac{1}{27}\right)^{-2}; \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}; 2^6.$$

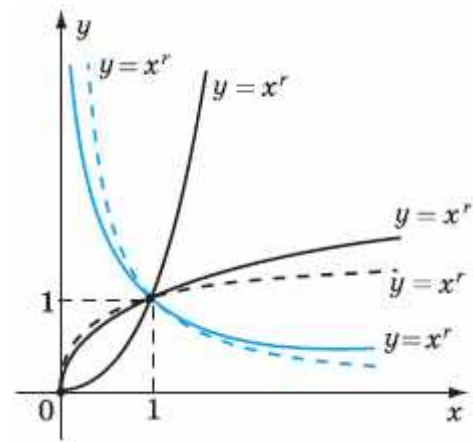
$$5) \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}; 4^{-\frac{4}{3}}; 2^{0,1}; 8^{-\frac{1}{4}}; (0,25)^{\frac{3}{4}}.$$

$$6) \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}}; 3^{\frac{3}{4}}; (\sqrt{2})^{\frac{3}{2}}; \sqrt[4]{8}; \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{8}}.$$

4. На рисунке изображены графики функций $y = x^r$ при пяти значениях r . Найдите эти значения r , зная координаты указанных точек:

$$P_1(2; \sqrt[3]{4}); P_2(2; \frac{\sqrt{2}}{2}); P_3(\frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt{8}}); P_4(\frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt[4]{2}});$$

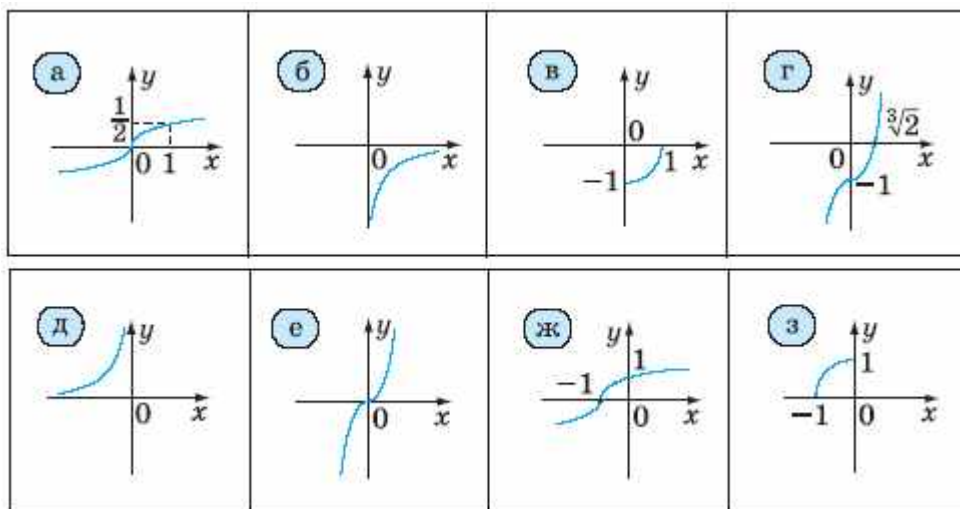
$$P_5(\frac{1}{2}; \sqrt[3]{32}).$$



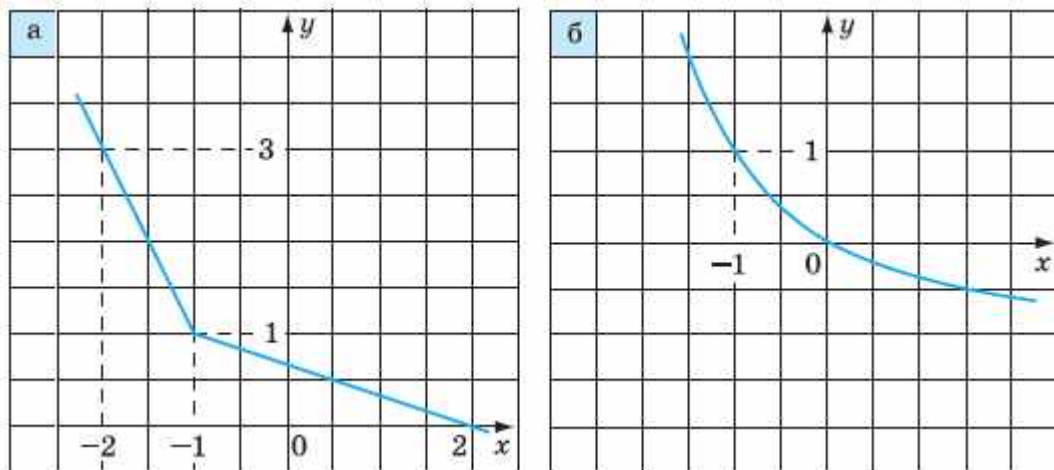
С-2 Взаимно обратные функции

1. Графики взаимно обратных функций.

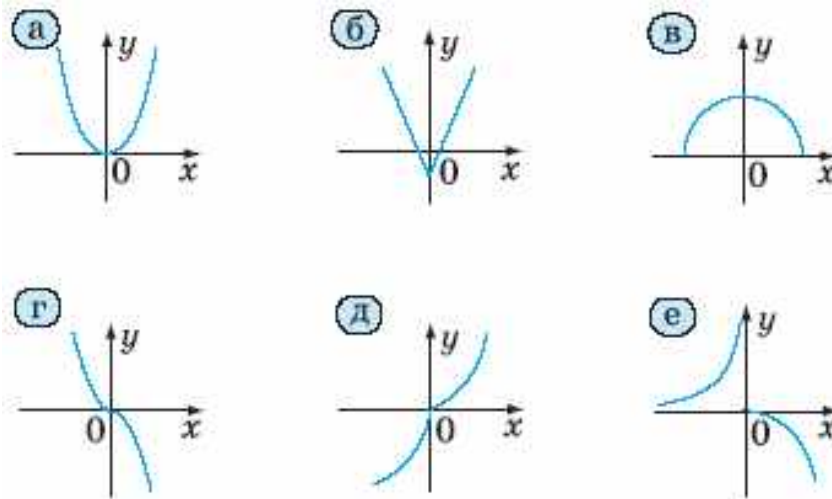
1.1. На рисунке изображены графики восьми функций. Объедините их в четыре пары взаимно обратных функций.



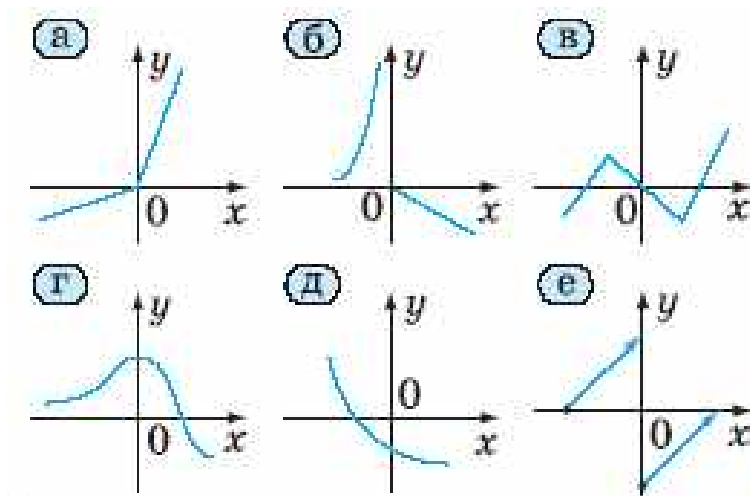
1.2. Постройте графики функций, обратных к тем, графики которых изображены на рисунке.



1.3. Определите по графику, какие из функций имеют обратную, а какие нет.



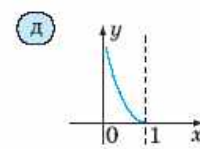
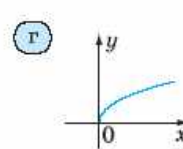
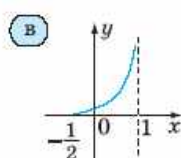
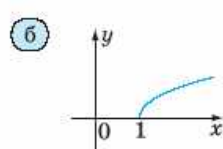
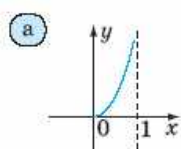
1.4. На рисунке изображены графики шести функций. Определите по графику, какая из них имеет обратную, а какая нет.



2. Формула ↔ график обратной функции

Каждой функции, заданной формулой, сопоставьте график обратной для нее функции.

1	2	3	4	5
$y = \frac{x}{x+1}, x \geq 0$	$y = \frac{x-1}{x+2}, x \geq 0$	$y = x^2, x \geq 0$	$y = \frac{1}{x^2+1}, x \geq 0$	$y = x^3 + 1, x \geq 0$



С-3 Графики функций $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$

1. Графики функций $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$

Чтение графика.

Постройте графики функций и опишите их свойства.

1) $y = \sqrt{x-1}$

4) $y = \sqrt{2x-4}$

7) $y = \sqrt[3]{2x}$

2) $y = \sqrt{4x+1}$

5) $y = -\sqrt{x+2}$

8) $y = \sqrt[3]{x+2}$

3) $y = \sqrt{1-x}$

6) $y = \sqrt{6-3x}$

9) $y = \sqrt[3]{x-1}$

С-4 Графический метод решения иррациональных уравнений и неравенств

1. Число корней уравнения

Определите с помощью графиков число корней уравнения.

1) $\sqrt{x} = 1-x$

4) $\sqrt{x+3} = x^2$

7) $\sqrt{|x|} + 2|x| = 3$

2) $\sqrt{x+1} = |x|$

5) $x + \sqrt{x+5} = 0$

3) $\sqrt{x-1} = 5x$

6) $(x-2)^{\frac{1}{2}} + x = 0$

2. Графическое решение уравнений

Решите уравнения с помощью графика.

1) $\sqrt{x+2} = 2,5x-3$

4) $\sqrt{2-x} = 1 - \frac{x}{2}$

6) $\sqrt[3]{x} = x-1$

2) $\sqrt{3x+9} = 3-1,5x$

5) $\sqrt{1-5x} = (x+1)^2$

7) $\sqrt{x+4} = -2(x-1)$

3) $\sqrt{13x+16} = (x-2)^2$

8) $(x+1)^2 = 2 - \sqrt{x+1}$

3. Графическое решение неравенств

Решите неравенство с помощью графиков.

- | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-----------------------------------|
| 1) $\sqrt[3]{x} \leq x^2$ | 5) $\sqrt{6-x} \leq 2x$ | 9) $1 - \sqrt{x} > x - 5$ |
| 2) $\sqrt[3]{x} \geq x^{-3}$ | 6) $\sqrt{x+4} \leq \sqrt[3]{8-4x}$ | 10) $\sqrt{x} > x-2 $ |
| 3) $\sqrt{2x+12} \geq \sqrt{24-4x}$ | 7) $\sqrt{x} \leq 6-x$ | 12) $\sqrt{x+4} + 2x \leq 2$ |
| 4) $\sqrt{7-x} \geq \sqrt{3x+15}$ | 8) $\sqrt{x+1} \geq 2x-13$ | 13) $\sqrt{x+1} + (x+1)^2 \leq 2$ |

4. На рисунке изображены графики стандартных квадратичных зависимостей. Постройте графики следующих функций.

1) $y = 1 + \sqrt{4 - x^2}$

2) $y = -\sqrt{9 - x^2}$

3) $y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$

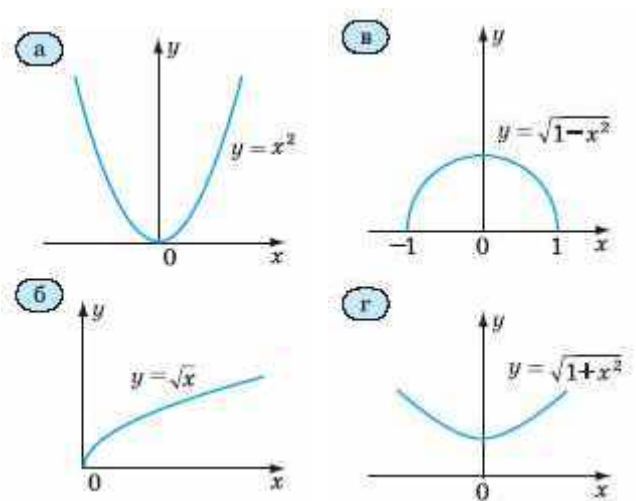
4) $y = 2\sqrt{1 - x^2}$

5) $y = \sqrt{\frac{x}{2}}$

6) $y = -\frac{1}{2}\sqrt{x}$

7) $y = 2\sqrt{x^2 + 1}$

8) $y = \sqrt{x^2 - 1}$



С-5 Числа и их логарифмы

Сравнение чисел и их логарифмов

1) Расположите числа в порядке возрастания:

$\log_2 8, \lg 100, \log_2 10, \log_2 \sqrt{32}, \lg \sqrt{1000}$.

2) Какие равенства являются верными следствиями равенства $a^b = c$?

$b = \log_a c; a = c^{\frac{1}{b}}; b = -\log_c a; b = \frac{1}{\log_c a}; c = a^{\frac{1}{\log_c a}}; a = c^{\log_b c}$.

3) Даны 6 чисел. Сколько среди них различных?

$1 + \log_2 6, 1 + 2\log_2 3, \log_2 6 + \log_2 3, 2 + \log_2 3, \log_2 24 - 1, \log_2 54 - \log_2 3$.

Приложения

- П-1 Решение задач на «сложные проценты»
- П-2 Оценки роста степени
- П-3 Действия над числами в стандартной форме

П-1 *Решение задач на «сложные проценты»*

(Взяты из задачника Е. Пржевальского 1870 года, выпущенного для российских школ.)

- 1) Во что обратится капитал в 46670 рублей через 13 лет, считая по $4\frac{1}{2}\%$ в год?
- 2) Сколько следует положить в банк из 4%, чтобы через 12 лет получить капитал в 25000 рублей?
- 3) Отец положил в банк своему сыну, при его рождении, капитал в 3000 рублей, который к совершеннолетию сына равнялся 8357 руб. 89 коп.; на какие проценты был положен капитал?
- 4) Через сколько лет удвоится капитал, отданный в рост по 6%?
- 5) Под сколько процентов должен быть отдан капитал в рост, чтобы он через 28 лет утроился?
- 6) Как велики должны быть проценты, чтобы капитал 17840 рублей, отданный по этим процентам, через 10 лет равнялся капиталу, который получится через 7 лет при капитале в 25000 рублей, отданном в рост по 4%?
- 7) Некто выплачивает в продолжение 7 лет, по 800 рублей ежегодно, занятую им сумму с причитающимися процентами, считая по $5\frac{1}{2}\%$ в год. Какая сумма была занята?
- 8) Капитал в 6000 рублей отдан в рост по 5%, и по прошествии каждого года, сверх прибавляемых процентов, увеличивался еще 500 рублями. Какой составил капитал через 10 лет?

П-2 *Оценки роста степени*

В справочнике приведена следующая приближенная формула, справедливая для маленьких (по модулю) значений x :

$$(1+x)^r \approx 1+rx + \frac{r(r-1)}{2}x^2.$$

Правая часть этой формулы похожа на начало формулы бинома Ньютона, записанной не только для натурального, но для любого показателя r .

- 1) Перепишите указанную формулу для приближенного вычисления $(1+x)^{\frac{1}{3}}$, $(1+x)^{\frac{3}{4}}$, $\sqrt[5]{1+x}$, $(1+x)^{-\frac{1}{2}}$.

2) Пользуясь полученными формулами, найдите приближенные значения следующих чисел.

$$\sqrt[3]{1,02}, 0,998^{\frac{1}{3}}, 1,01^{\frac{3}{4}}, \sqrt[4]{0,98^3}, \sqrt[5]{1,05}, \frac{1}{\sqrt{0,996}}, \sqrt[3]{8,24}, 82^{\frac{3}{4}}, \sqrt[5]{33}.$$

П-3 *Действия над числами в стандартной форме*

Вычислите значения указанных величин при данных значениях переменных.

1) Объем шара через его радиус:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3; R = 1,3 \cdot 10^{-5}; R = 5,6 \cdot 10^8.$$

2) Объем шара через его площадь поверхности:

$$V = \frac{1}{6\sqrt{\pi}} S^{\frac{3}{2}}; S = 2,1 \cdot 10^{-4}; S = 7,0 \cdot 10^6.$$

3) Объем шара через сторону вписанного куба:

$$V = \frac{\pi\sqrt{3}}{2} a^3; a = 3,1 \cdot 10^{-3}; a = 6,2 \cdot 10^2.$$

4) Расстояние между точечными массами через силу их взаимного притяжения.

$$r = kF^{-\frac{1}{2}}; k = 2,6 \cdot 10^{-7}; F = 5,1 \cdot 10^6; F = 1,4 \cdot 10^{-6}.$$

Исследования и доказательства

1. Сравнение степеней

Какое число больше, A или B ?

1) $A = 1,02^{\frac{2}{3}}$, $B = 0,99^{\frac{2}{3}}$

2) $A = 3,14^{-\frac{2}{5}}$, $B = 3,13^{-\frac{2}{5}}$

3) $A = 5^{\frac{11}{3}}$, $B = 5^4$

4) $A = (0,2)^{-\frac{3}{4}}$, $B = (0,2)^{-\frac{4}{3}}$

5) $A = \left(3^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{5}}$, $B = \left(9^{\frac{1}{19}}\right)^{\frac{1}{2}}$

6) $A = \left(\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{5}}$, $B = \left(\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{9}}\right)^{\frac{1}{20}}$

2. Выпуклость функции $y = \sqrt{x}$

1) Докажите, что $\sqrt{9} + \sqrt{11} < 2\sqrt{10}$.

2) Докажите, что $(10-a)^{\frac{1}{2}} + (10+a)^{\frac{1}{2}} < 2\sqrt{10}$.

3) Постройте график функции $y = \sqrt{x}$, нанесите на него точки с абсциссами $\sqrt{9}$, $\sqrt{10}$ и $\sqrt{11}$; постройте точку $P\left(\sqrt{10}; \frac{1}{2}(\sqrt{9} + \sqrt{11})\right)$ и дайте геометрическое объяснение первого неравенства.

4) Докажите, что $\frac{(x-a)^{\frac{1}{2}} + (x+a)^{\frac{1}{2}}}{2} < x^{\frac{1}{2}}$.

5) Полученное свойство функции $y = \sqrt{x}$ называют выпуклостью (причем выпуклость «смотрит вверх»). Приведите примеры других функций, выпуклых вверх.

3. Следствия из неравенства о средних

Используя неравенства о средних для положительных чисел $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$,

докажите неравенство. Все данные числа положительны.

1) $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{\frac{a^2}{b}} + \sqrt{\frac{b^2}{a}}$

5) $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$

2) $\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \geq 2\sqrt[4]{ab}$

6) $a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow a + b \leq \sqrt{2}$

3) $\frac{a^2+3}{\sqrt{a^2+2}} > 2$

7) $ab \geq 1 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2$

8) $a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}} \geq 1 \Rightarrow a + b \geq \frac{1}{8}$

4) $\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$

4. Неравенства с параметром для самостоятельного исследования

Решите неравенство. Можно использовать любой из способов, предложенных в исследовательской работе.

1) $\sqrt{x-a} < x$

4) $x + 4a > 5\sqrt{ax}$

2) $\sqrt{2ax+1} \geq x+a$

5) $\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x} < 2$

3) $\sqrt{a+\sqrt{x}} + \sqrt{a-\sqrt{x}} \geq \sqrt{2}$

5. Функциональное уравнение

Про функцию $y = f(x)$ известно следующее.

а) Она определена на всей числовой оси.

б) Для любых a и b выполняется соотношение $f(a+b) = f(a) \cdot f(b)$ (соотношение такого типа называется функциональным уравнением).

в) $f(1) = a$, где $a > 0$ и $a \neq 1$.

Докажите следующие свойства функции y :

1) $f(2) = a^2$

2) $f(n) = a^n$, где n – натуральное число

3) $f(0) = 1$

4) $f(x)$ не обращается в нуль

5) $f(x) > 0$ при всех x

6) $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$

7) $f(r) = a^r$, где $r = \frac{m}{n}$ – рациональное число

Комбинаторика

1. Двадцать цифр

Найдите первые 20 цифр после запятой в десятичной записи следующих чисел.

1) $\sqrt{1 - (0,1)^{20}}$

3) $(5 + \sqrt{26})^{20}$

2) $(5 - \sqrt{26})^{20}$

4) $(\sqrt{1001} - \sqrt{1000})^{12}$

2. Диофантовы уравнения со степенями

Найдите решения следующих уравнений, являющиеся натуральными числами.

1) $y^{\frac{5}{2}} = 16x(x-1)$

2) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 25$

3) $\left(\frac{5}{13}\right)^x + \left(\frac{12}{13}\right)^y = 1$

3. Число цифр в позиционной записи

1) Сколько цифр в двоичной записи имеет число $2^{10} + 1$?

2) Сколько цифр в пятеричной записи (в системе с основанием 5) имеет число 1000?

3) Каковы наименьшее и наибольшее числа, в двоичной записи которых ровно 10 цифр?

4) В упражнениях к беседе 2 была предложена трудная задача: доказать неравенство $2^{158} < 3^{100} < 2^{159}$. Зная этот результат, найдите число цифр в двоичной записи числа 3^{100} .

5) Докажите, что число цифр в двоичной записи числа a равно $[\log_2 a] + 1$.

6) Обобщите предыдущую задачу на запись числа в системе счисления с произвольным основанием a .