Правило Декарта

М.ГОРЕЛОВ

Задачи на доказательство неравенств часто встречаются на математических олимпиадах. Отчасти это связано с тем, что профессиональным математикам тоже время от времени приходится доказывать неравенства в их научных работах. Таким образом, «олимпиадная» математика тесно соприкасается с профессиональной.

В этой статье будет рассказано об одной старой теореме, помогающей решать подобные задачи. Впрочем, сначала речь пойдет об одном замечательном правиле, позволяющем оценивать количество положительных корней многочлена.

Перемены знака в конечных последовательностях

Пусть дана последовательность действительных чисел $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Будем говорить, что в этой последовательности на месте с номером l происходит перемена знака, если $a_l \neq 0$, причем первое отличное от нуля число a_k, номер которого меньше l, имеет знак, противоположный знаку a_l. Например, в последовательности

$$1,\ -1,\ 2,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ -1,\ 1$$

местами перемены знака будут $l = 2, 3, 9, 10$.

Нас в дальнейшем часто будут интересовать количества перемен знаков в конечных последовательностях. Для такого подсчета можно выписать строку из плюсов и минусов: вместо положительных чисел пишем плюс, вместо отрицательных – минус, вместо нуля не пишем ничего. Для нашей последовательности, например, получим такой набор плюсов и минусов:

$$+ - + + - +.$$

Заметим попутно, что у последовательностей $a_0, a_1, \ldots, a_n$ и $-a_0, -a_1, \ldots, -a_n$ количества перемен знака одинаковы.

Оказывается, что количество перемен знака в последовательности $a_0, a_1, \ldots, a_n$ связано с числом положительных корней уравнения

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0 .$$

Упражнения

1. Опишите последовательности, имеющие а) ровно одну; б) ровно две перемены знаков.

2. Докажите, что если в последовательности a, b, c в точности одна перемена знака, то квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет ровно один положительный корень.

3. Сколько положительных корней может иметь квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, если в последовательности a, b, c две перемены знака?

4. Найдите число положительных корней уравнения $x^5 + 2x^3 + 3x^2 - x - 1 = 0$. Сравните это число с количеством перемен знака в ряду его коэффициентов.

5. Сколько положительных корней имеет уравнение $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$, если последовательность его коэффициентов имеет в точности одну перемену знака?

Для удобства записи введем функцию $y = \operatorname{sgn} x$ (читается «сигнум» или «знак» x), определенную так:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{пр}, \quad x > 0, \\ 0 & \text{пр}, \quad x = 0, \\ -1 & \text{пр}, \quad x < 0. \end{cases}$$

Отметим, что при $x \neq 0$

$$\operatorname{sgn} x = \frac{x}{|x|} .$$

Правило Декарта

В 1637 году знаменитый французский математик и философ Рене Декарт (1596–1650) сформулировал следующее утверждение.

Теорема 1 (правило Декарта). *Число положительных корней многочлена* $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$ *не превосходит числа перемен знака в последовательности* $A = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ *его коэффициентов и отличается от него на четное число.*

Если вы решили упражнения 1–5, сравните ваши результаты со сформулированной теоремой. А теперь приступим к ее доказательству.

Доказательство. Будем без ограничения общности считать, что $a_n > 0$ и $a_0 \neq 0$. Проведем индукцию по числу перемен знака. Если в последовательности A перемен знака нет, то все ненулевые числа этой последовательности положительны, так что $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 > 0$ при любом $x > 0$ и положительных корней у многочлена $f(x)$ нет. Это дает базу индукции.

Предположим теперь, что теорема уже доказана для всех многочленов, у которых число перемен знака в последовательности коэффициентов меньше q. Пусть $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$ – многочлен, у которого в последовательности коэффициентов ровно q перемен знака, и c – положительный корень этого многочлена. Тогда

$$f(x) = (x - c)\, g(x) ,$$

где

$$g(x) = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \ldots + b_0 ,$$

т.е.

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 = (x - c)\left(b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_0\right).$$

Из последнего равенства следует, что

$$a_n = b_{n-1} ,$$
$$a_{n-1} = b_{n-2} - c b_{n-1} ,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_k = b_{k-1} - c b_k ,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_0 = -b_0 c .$$

Докажем, что в последовательности $B = (b_0, b_1, \ldots, b_{n-1})$ меньше перемен знака, чем в последовательности A. Пусть p – число перемен знака в последовательности B. Заметим сразу, что $\operatorname{sgn} a_n = \operatorname{sgn} b_{n-1}$, а $\operatorname{sgn} a_0 = -\operatorname{sgn} b_0$.

Если l – самое первое место перемены знака в последовательности $B = (b_0, b_1, \ldots, b_{n-1})$, то числа b_0 и b_l имеют разные знаки. Но тогда $\operatorname{sgn} a_0 = -\operatorname{sgn} b_0$, $\operatorname{sgn} a_l = \operatorname{sgn}(b_{l-1} - c b_l) = -\operatorname{sgn} b_l$, т.е. знаки чисел a_0 и a_l – различны. Поэтому последовательность $a_0, \ldots, a_l$ содержит по крайней мере одну перемену знака.

Пусть l и k – два соседних места перемены знака в последовательности B. Тогда числа $a_l = b_{l-1} - cb_l$ и $a_k = b_{k-1} - cb_k$ тоже имеют разные знаки. Так что среди чисел $a_l, \ldots, a_k$ есть перемена знака.

Упражнение 6. Убедитесь в этом.

Наконец, пусть k – последнее место перемены знака в последовательности B. Тогда $b_k > 0$ и числа $a_k = b_{k-1} - cb_k$ и a_n имеют разные знаки, поскольку

$$\operatorname{sgn} a_k = -\operatorname{sgn} b_k, \quad \operatorname{sgn} a_n = 1 = \operatorname{sgn} b_{n-1}.$$

Поэтому в наборе чисел $a_k, \ldots, a_n$ тоже есть перемена знака.

Итак, если последовательность B содержит p перемен знака, то последовательность A содержит по меньшей мере $p + 1$ перемену знака.

С другой стороны, количества перемен знака в последовательностях A и B имеют разную четность. Это следует из уже сделанного ранее замечания о знаках a_0 и b_0 и следующего упражнения.

Упражнение 7. Докажите, что последовательность $A = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ содержит четное (нечетное) число перемен знака тогда и только тогда, когда $\operatorname{sgn} a_0 = \operatorname{sgn} a_n$ ($\operatorname{sgn} a_0 = -\operatorname{sgn} a_n$).

По предположению индукции, количество корней многочлена $g(x)$ отличается от p на четное число. Число же корней многочлена f на единицу больше, а число q перемен знака в ряду его коэффициентов больше p и имеет другую четность. Поэтому разность между q и числом положительных корней многочлена f четна.

Упражнения

8. Сколько отрицательных корней имеет уравнение

а) $x^3 - 3x + 1 = 0$; б) $x^5 - 4x + 2 = 0$?

9. Докажите, что число отрицательных корней многочлена $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n+1} + \ldots + a_0$ не больше числа перемен знака в последовательности $(-1)^n a_n, (-1)^{n-1} a_{n-1}, \ldots, a_0$ и отличается от него на четное число.

Квазимногочлены

Квазимногочленами называют функции вида

$$f(x) = a_0 b_0^x + a_1 b_1^x + \ldots + a_{k-1} b_{k-1}^x + a_k b_k^x. \qquad (1)$$

Приставка «квази», означающая «как будто», свидетельствует о том, что функции такого вида во многих отношениях ведут себя так, как будто они – обычные многочлены.

Договоримся записывать квазимногочлены таким образом, что $0 < b_0 < b_1 < \ldots < b_{k-1} < b_k$. Будем также считать, что в последовательности $A = (a_0, a_1, \ldots, a_k)$ нет нулей. Такую форму записи будем называть стандартной.

Теорема 2. *Число действительных корней квазимногочлена, записанного в стандартной форме, не превосходит числа перемен знака в последовательности его коэффициентов.*

Доказательство. Снова проведем индукцию по числу перемен знака. Если это число равно нулю, то все коэффициенты квазимногочлена имеют один знак, и тот же знак будет иметь значение квазимногочлена в любой точке, т.е. число его корней будет равно нулю. Это дает нам базу индукции.

Предположим теперь, что мы уже доказали справедливость теоремы для всех квазимногочленов, последовательность коэффициентов которых содержит меньше p перемен знака. Пусть последовательность коэффициентов квазимногочлена (1) содержит p перемен знака. Не ограничивая общности, можем считать, что среди его коэффициентов нет нулей.

Возьмем любое l, для которого $a_{l-1}a_l < 0$, и зафиксируем произвольное число b, удовлетворяющее неравенствам $b_{l-1} < b < b_l$. Рассмотрим квазимногочлен

$$g(x) = b^{-x} f(x) = a_0 c_0^x + a_1 c_1^x + \ldots + a_{k-1} c_{k-1}^x + a_k c_k^x,$$

где $c_i = \dfrac{b_i}{b}$, $i = 0, 1, \ldots, k$. Очевидно, он имеет столько же корней, сколько $f(x)$, а последовательность его коэффициентов содержит ровно p перемен знака.

Рассмотрим производную квазимногочлена $g(x)$:

$$g'(x) = a_0 c_0^x \ln c_0 + \ldots + a_{l-1} c_{l-1}^x \ln c_{l-1} + {} + a_l c_l^x \ln c_l + \ldots + a_k c_k^x \ln c_k.$$

Индекс l является местом перемены знака в последовательности коэффициентов квазимногочлена $g(x)$, но не является местом перемены знака в последовательности коэффициентов квазимногочлена $g'(x)$, так как $\ln c_{l-1} < 0$, а $\ln c_l > 0$. Все остальные перемены знака при дифференцировании остаются на своих местах, так как соседние коэффициенты умножаются при этом на числа одного знака. Значит, последовательность коэффициентов квазимногочлена $g'(x)$ имеет $p - 1$ перемену знака, и мы можем воспользоваться предположением индукции.

Согласно ему, квазимногочлен $g'(x)$ имеет не более $p - 1$ корня. Обозначим их в порядке возрастания $x_1, x_2, \ldots, x_q$. На каждом из интервалов $(-\infty; x_1), (x_1; x_2), \ldots, (x_{q-1}; x_q), (x_q; +\infty)$ производная $g'(x)$ квазимногочлена $g(x)$ сохраняет знак. Поэтому на каждом из замкнутых интервалов $(-\infty; x_1], [x_1; x_2], \ldots, [x_{q-1}; x_q], [x_q; +\infty)$ функция $g(x)$ строго монотонна и, следовательно, имеет не более одного корня. Число этих интервалов равно $q + 1$, значит, $g(x)$ имеет не более $q + 1 \le p$ корней. Шаг индукции завершен.

Теорема доказана. Идея этого доказательства принадлежит французскому математику Эдмону Никола Лагерру (1834–1886). По аналогии, теорему 2 тоже называют правилом Декарта.

Эта теорема может быть усилена за счет правильного учета кратных корней. Нам не понадобится самый сильный результат, поэтому мы его формулировать не станем. Ограничимся лишь одним уточнением, которое легко усматривается из приведенного выше доказательства.

Может случиться, что корень квазимногочлена $g(x)$ является корнем его производной $g'(x)$. Правило Декарта останется верным, если при подсчете корней мы такой корень посчитаем за два. В самом деле, если $g(x_i) = g'(x_i) = 0$, то на отрезках $[x_{i-1}; x_i]$ и $[x_i; x_{i+1}]$ других корней нет.

Неравенства для степенных средних

Рассмотрим квазимногочлен

$$f(x) = \frac{b_1^x + b_2^x + \ldots + b_k^x}{k} - \left(\frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_k}{k}\right)^x. \qquad (2)$$

Он имеет всего один отрицательный коэффициент. Поэтому, если мы запишем его в стандартной форме[1], последовательность его коэффициентов будет содержать не больше двух перемен знака. А значит, он имеет не больше двух корней. Но два корня $x = 1$ и $x = 0$ очевидны. Поэтому перемен знака ровно две, и, следовательно, член с отрицательным знаком при стандартной записи окажется в середине. А знак нашего

[1] *Для этого нужно привести, если можно, подобные и переставить члены в порядке возрастания оснований экспонент.*

квазимногочлена при больших x определяется знаком коэффициента при экспоненте с самым большим основанием; этот коэффициент положителен. В силу приведенного выше уточнения, производная нашего квазимногочлена не может обращаться в ноль в точках $x = 1$ и $x = 0$, следовательно, в этих точках квазимногочлен меняет знак. Отсюда немедленно следует, что

$$\frac{b_1^x + b_2^x + \ldots + b_k^x}{k} \geq \left(\frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_k}{k}\right)^x$$

при $x \geq 1$ или $x \leq 0$, и выполняется неравенство противоположного знака, если $0 < x < 1$.

Воспользуемся монотонностью степенной функции, которая возрастает, когда показатель степени положителен, и убывает в противном случае. Мы получим, что

$$\left(\frac{b_1^x + b_2^x + \ldots + b_k^x}{k}\right)^{\frac{1}{x}} \geq \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_k}{k}, \text{ если } x \geq 1,$$

и

$$\left(\frac{b_1^x + b_2^x + \ldots + b_k^x}{k}\right)^{\frac{1}{x}} \leq \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_k}{k}, \text{ если } x < 1.$$

Нетрудно заметить, что приведенное доказательство не проходит, когда все числа $b_1, b_2, \ldots, b_k$ совпадают, но этот случай тривиален.

Фиксируя различные значения x, отсюда можно получить много интересного. Так, при $x = 2$ получаем неравенство

$$\sqrt{\frac{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_k^2}{k}} \geq \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_k}{k}$$

между средним квадратическим и средним арифметическим, а при $x = -1$ – неравенство

$$\frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_k}{k} \geq \frac{k}{\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \ldots + \frac{1}{b_k}}$$

между средним арифметическим и средним гармоническим. Да и доказанное попутно утверждение о том, что среднее арифметическое нескольких чисел лежит между самым большим и самым маленьким из усредняемых чисел, хотя и совсем простое, но тоже заслуживает внимания. Но и этим число «бесплатных» следствий не ограничивается.

Мы выяснили, что квазимногочлен (2) принимает положительные значения при $x < 0$ и отрицательные при $0 < x < 1$. Значит, он убывает вблизи точки $x = 0$. Но тогда его производная в этой точке, т.е.

$$\frac{\ln b_1 + \ln b_2 + \ldots + \ln b_k}{k} - \ln\frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_k}{k},$$

отрицательна. Отсюда немедленно получается неравенство

$$\frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_k}{k} \geq \sqrt[k]{b_1 b_2 \ldots b_k}.$$

Таким образом, мы почти без труда получили знаменитое неравенство Коши между средним арифметическим и средним геометрическим. Говоря об этом неравенстве, обычно ссылаются на «Курс анализа» Коши, первое издание которого вышло в 1821 году. Впрочем, мне не приходилось видеть утверждения о том, что именно там это неравенство появилось впервые. Его частные случаи заведомо были известны и раньше. Так, неравенство Коши для двух чисел содержится уже в «Началах» Евклида.

Но и это не все. Как и выше, мы замечаем, что производная функции (2) при $x = 1$ положительна. Следовательно,

$$\frac{b_1 \ln b_1 + b_2 \ln b_2 + \ldots + b_k \ln b_k}{k} > \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_k}{k} \ln\frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_k}{k}.$$

Это неравенство не имеет «имени собственного». Но оно играет фундаментальное значение в теории информации и статистической физике (оно имеет прямое отношение ко второму началу термодинамики). Поэтому на него стоит обратить внимание.

Неравенство Гёльдера

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_k$ и $b_1, b_2, \ldots, b_k$ – положительные числа. Рассмотрим квазимногочлен

$$f(x) = a_1^x b_1^{1-x} + a_2^x b_2^{1-x} + \ldots + a_k^x b_k^{1-x} - (a_1 + a_2 + \ldots + a_k)^x (b_1 + b_2 + \ldots + b_k)^{1-x}.$$

В силу правила Декарта, он имеет не более двух корней, а два его корня $x = 0$ и $x = 1$ очевидны. Полагая $p = \frac{1}{x}$, $q = \frac{1}{1-x}$, $A_i = a_i^p$, $B_i = b_i^q$, $i = 1, 2, \ldots, k$, получим следующий важный результат.

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_k$ и $B_1, B_2, \ldots, B_k$ – неотрицательные числа и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда если числа p и q положительны, то выполняется неравенство Гёльдера

$$A_1 B_1 + A_2 B_2 + \ldots + A_k B_k \leq \left(A_1^p + A_2^p + \ldots + A_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(B_1^q + B_2^q + \ldots + B_k^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

а если одно из чисел p или q отрицательно, то выполняется обратное неравенство.

Неравенство Гёльдера обобщает известное утверждение о том, что скалярное произведение векторов не превосходит произведения их модулей. Этим и определяется его важность.

Неравенство Швейцера

Пусть m и M – положительные числа и при любом $i = 1, \ldots, k$ выполняются неравенства $m \leq b_i \leq M$. Докажем, что тогда

$$(b_1 + b_2 + \ldots + b_k) + mM\left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \ldots + \frac{1}{b_k}\right) \leq k(m + M).$$

В этом неравенстве нетрудно увидеть среднее арифметическое и среднее гармоническое. Поэтому имеет смысл вспомнить функцию

$$f(x) = \frac{b_1^x + b_2^x + \ldots + b_k^x}{k} - \left(\frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_k}{k}\right)^x,$$

которая помогла нам доказать неравенство между этими двумя средними. С помощью чисел m и M сконструируем еще квазимногочлен

$$g(x) = \alpha m^x + \beta M^x - (\alpha m + \beta M)^x.$$

Параметры α и β подберем так, чтобы выполнялись равенства

$$\alpha + \beta = 1 \text{ и } \alpha m + \beta M = A = \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_k}{k}.$$

Для этого нужно взять

$$\alpha = \frac{M - A}{M - m} \text{ и } \beta = \frac{A - m}{M - m}.$$

Нетрудно проверить, что числа α и β неотрицательны.

Рассмотрим квазимногочлен $h(x) = f(x) - g(x)$. Параметры α и β выбраны так, что отрицательные члены квазимногочленов $f(x)$ и $g(x)$ сократятся и в последовательности коэффициентов квазимногочлена $h(x)$ будет две перемены знаков: на первом и последнем местах. Но по построению $f(0) = f(1) = 0$ и $g(0) = g(1) = 0$. Поэтому квазимногочлен $h(x)$ имеет два корня 0 и 1. А значит, $h(x) > 0$ при $0 < x < 1$ и $h(x) < 0$ при $x < 0$ и при $x > 1$. В частности, $h(-1) \le 0$, что и дает нужное нам неравенство.

Пусть m и M – положительные числа, и при любом $i = 1, \ldots, k$ справедливы неравенства $m \le b_i \le M$. Тогда выполняется неравенство Швейцера

$$(b_1 + b_2 + \ldots + b_k)\left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \ldots + \frac{1}{b_k}\right) \le \frac{(m+M)^2}{4mM}k^2.$$

Докажем это неравенство. В силу полученного выше результата,

$$(b_1 + b_2 + \ldots + b_k)\left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \ldots + \frac{1}{b_k}\right) \le \frac{1}{mM}k^2 A(m + M - A),$$

где $A = \dfrac{b_1 + b_2 + \ldots + b_k}{k}$.

Остается заметить, что из простейшего варианта неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим следует

$$A(m + M - A) \le \frac{(A + (m + M - A))^2}{4} = \frac{(m+M)^2}{4}.$$

Итак, мы доказали, что при выполнении условий задачи отношение среднего арифметического к среднему гармоническому нескольких чисел не превосходит $\dfrac{(m+M)^2}{4mM}k^2$. В этом смысле оно обращает «классическое» неравенство, согласно которому это отношение больше единицы.

Попробуйте теперь решить следующие упражнения.

Упражнения

10 (олимпиада Московской области, 1995 г.). Решите уравнение

$$x^{19} + x^{95} = 2x^{19+95}.$$

11. Сколько действительных корней имеет уравнение

$$x^5 + 2x^3 - x^2 + x - 1 = 0\,?$$

12 (Ленинградская олимпиада, 1988 г.). Вещественные числа a и b таковы, что $0 \le a$, $b \le 1$. Докажите, что

$$\frac{a}{1+b} + \frac{b}{1+a} \le 1.$$

13 (Ленинградская олимпиада, 1980 г.). Докажите, что для любых a, b, c из отрезка [0; 1] выполнено неравенство

$$3\left(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2\right) - 2abc(a + b + c) \le 3.$$

14 (Московская олимпиада, 1952 г.). Докажите, что при целом $n \ge 2$ и $|a| < 1$ справедливо неравенство

$$(1 - a)^n + (1 + a)^n < 2^n.$$

15 (из материалов жюри Международной олимпиады, 1982 г.). Докажите, что для любых положительных чисел $a \ne 1$, $x < 1$ справедливо неравенство

$$\frac{1 - a^x}{1 - a} < (1 + a)^{x-1}.$$

16. Пусть $b_1 < b_2 < \ldots < b_k$ – положительные, а p и q – произвольные действительные числа. Докажите, что если p и q одного знака, то

$$\frac{b_1^{p+q} + b_2^{p+q} + \ldots + b_k^{p+q}}{k} \ge \frac{b_1^p + b_2^p + \ldots + b_k^p}{k}\,\frac{b_1^q + b_2^q + \ldots + b_k^q}{k},$$

а если p и q имеют разные знаки, то выполняется обратное неравенство.

17 («Задачник «Кванта», М620). Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – действительные числа такие, что $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1$. Докажите, что сумма модулей 2^n чисел $\pm x_1 \pm x_2 \pm \ldots \pm x_n$ (по всевозможным комбинациям знаков «+» и «–») не превосходит 2^n.

18. Пусть $b_1, b_2, \ldots, b_k$ и $p_1, p_2, \ldots, p_k$ – положительные числа. Докажите, что

$$b_1^{p_1} b_2^{p_2} \ldots b_k^{p_k} \le \left(\frac{p_1 b_1 + p_2 b_2 + \ldots + p_k b_k}{p_1 + p_2 + \ldots + p_k}\right)^{p_1 + p_2 + \ldots + p_k}.$$

19. Пусть $b_1, b_2, \ldots, b_k$ – положительные числа. Докажите, что

$$\sqrt{\frac{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_k^2}{k}} \le \sqrt[3]{\frac{b_1^3 + b_2^3 + \ldots + b_k^3}{k}}.$$

20 (из материалов жюри Международной олимпиады). Докажите, что для любых положительных чисел $a \le b \le c \le d$ справедливо неравенство $a^b b^c c^d d^a \ge b^a c^b d^c a^d$.

21 (Санкт-Петербургская олимпиада, 1996 г.). Докажите для любых положительных чисел a и b неравенство

$$a^b b^a \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^{a+b}.$$

22. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_k$ и $b_1, b_2, \ldots, b_k$ – положительные числа. Докажите, что

$$a_1 \ln\frac{a_1}{b_1} + a_2 \ln\frac{a_2}{b_2} + \ldots + a_k \ln\frac{a_k}{b_k} \ge$$
$$\ge (a_1 + a_2 + \ldots + a_k)\ln\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{b_1 + b_2 + \ldots + b_k}.$$

23. Пусть $a_0, a_1, \ldots, a_k$ и $b_0, b_1, \ldots, b_k$ – такие действительные числа, что выполняется хотя бы одно из неравенств $a_0^2 > a_1^2 + \ldots + a_k^2$ и $b_0^2 > b_1^2 + \ldots + b_k^2$. Докажите, что тогда справедливо неравенство

$$\left(a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - \ldots - a_k^2\right)\left(b_0^2 - b_1^2 - b_2^2 - \ldots - b_k^2\right) \le$$
$$\le (a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - \ldots - a_k b_k)^2.$$

24. Сумма положительных чисел a, b, c и d равна 1. Докажите, что

$$3 + \sqrt{5} \le \sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} + \sqrt{4d+1} \le 4\sqrt{2}.$$

25. Пусть m и M – положительные числа и при любом $i = 1, \ldots, k$ выполняются неравенства $m \le b_i \le M$, а $a_1, a_2, \ldots, a_k$ – произвольные действительные числа. Докажите, что

$$\left(a_1^2 b_1 + a_2^2 b_2 + \ldots + a_k^2 b_k\right)\left(\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \ldots + \frac{a_k^2}{b_k}\right) \le$$
$$\le \frac{(m+M)^2}{4mM}\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2\right)^2.$$

26 (из материалов жюри Международной олимпиады, 1979 г.). Для заданного числа $n \ge 2$ найдите наибольшее и наименьшее значения произведения $a_1 a_2 \ldots a_n$ при условии, что $a_i \ge 1/n$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и $a_1^2 + a_2^2 + \ldots a_n^2 = 1$.