

Учебные задания

Алгоритмы

- A-01** Конструирование рациональных выражений
A-02 Допустимые значения букв
A-03 Сокращение дробей
A-04 Умножение и деление дробей
A-05 Сложение и вычитание дробей
A-06 Многочленные дроби и преобразования
A-07 Тождества

A-01

Конструирование рациональных выражений

- 1** Для выражений A и B (в указанном порядке) запишите формулы
- 1** частного их суммы и их разности;
 - 2** частного их квадратов;
 - 3** квадрата частного их суммы и разности;
 - 4** частного квадратов их суммы и разности;
 - 5** частного разности их квадратов и квадрата их разности.

- 2** Составляется рациональная дробь, у которой

числитель равен	знаменатель равен
разности чисел a и b	произведению чисел a и b
произведению чисел a и b	сумме чисел a и b
квадрату разности чисел a и b	разности квадратов чисел a и b
удвоенному произведению чисел a и b	кубу суммы чисел a и b

Сколько дробей можно составить, если взять числитель из левого, а знаменатель из правого столбца? Выпишите все эти дроби.

- 3** С помощью выражений A , B и C постройте выражения

1 $A \cdot B + C$ **2** $\frac{B}{A} + C^2$ **3** $B \cdot (A + C)$ **4** $\frac{B}{A} + \frac{A}{C} + \frac{C}{B}$ **5** $\frac{A + B + C}{A \cdot B \cdot C}$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	a	1	ab	$\frac{1}{x}$	$\frac{b}{c}$	bc	$-\frac{1}{x+z}$	$\frac{y+z}{x}$	-1	$\frac{x}{y} + 1$
B	b	a^2	$\frac{a}{b}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{b}{a}$	$2ab$	$\frac{1}{x+y}$	$\frac{x+y}{z}$	$a \cdot (b+c)$	$\frac{x}{2}$
C	a	$\frac{1}{b}$	ab	$\frac{1}{y}$	$\frac{c}{a}$	$\frac{1}{2ac}$	$\frac{1}{y+z}$	$\frac{z+x}{y}$	$(a+b) \cdot c$	$x^2 + y^2$

A-02

Допустимые значения букв

1 Определите, какие значения букв не являются допустимыми для следующих рациональных выражений.

$$1 \quad \frac{x}{x-1}$$

$$2 \quad \frac{3}{3x-2}$$

$$3 \quad \frac{x-1}{3x}$$

$$4 \quad \frac{1}{2+x}$$

$$5 \quad \frac{1}{x-2} + \frac{1}{2x-5}$$

$$6 \quad \frac{x}{(5x-6)(x+5)}$$

$$7 \quad \frac{1}{x(x-3)(x-7)}$$

$$8 \quad \frac{x+1}{x^2-9}$$

$$9 \quad \frac{1}{x^2+3x}$$

$$10 \quad \frac{x-5}{x^2+4x+4}$$

$$11 \quad \frac{x}{x+a}$$

$$12 \quad \frac{x+a}{x-a} + \frac{x-a}{x+a}$$

$$13 \quad \frac{a}{a^2-4b^2}$$

$$14 \quad \frac{1}{\frac{a}{b}-1}$$

$$15 \quad \frac{\frac{x}{y} + \frac{y}{x}}{x-y}$$

$$16 \quad \frac{x+3y}{x^2-9y^2}$$

$$17 \quad \frac{ab}{a^2+b^2}$$

$$18 \quad \frac{a+1}{a^2+1}$$

$$19 \quad \frac{1}{ab - \frac{1}{c}}$$

$$20 \quad \frac{ab}{a^3+b^3}$$

2 Найдите, при каких значениях букв выражение не определено.

$$1 \quad \frac{10}{x-10}$$

$$2 \quad \frac{a}{a^2-4}$$

$$3 \quad \frac{b}{b^2+1}$$

$$4 \quad \frac{x-y}{x^3+y^3}$$

$$5 \quad \frac{m^2n^2}{m-n}$$

$$6 \quad \frac{a}{b^{100}} + \frac{b}{a^2}$$

$$7 \quad \frac{a^2}{a-1} + \frac{a}{b+1}$$

$$8 \quad \frac{ab}{a^2+b^2}$$

$$9 \quad \frac{a+b}{a^2+b^2+1}$$

$$10 \quad \frac{xy}{x^4-y^2}$$

3 Найдите, при каких целых числах n , $|n| \leq 10$, не определены дроби.

$$1 \quad \frac{1}{n^2+n-2}$$

$$2 \quad \frac{n}{n^4-16}$$

$$3 \quad \frac{n+2}{n^2+2n-8}$$

$$4 \quad \frac{n^2-1}{2n^2+n-3}$$

$$5 \quad \frac{1}{n^2+4n-21}$$

$$6 \quad \frac{n+5}{3n^2-n-10}$$

$$7 \quad \frac{n+1}{n^3-5n^2-36n}$$

$$8 \quad \frac{n^2-2}{n^2+5n+6}$$

$$9 \quad \frac{n}{n^2+n-1}$$

$$10 \quad \frac{1}{n^2+12n+11}$$

A-03

Сокращение дробей

1 Сократите дроби.

$$1 \quad \frac{27a^2b}{81b}$$

$$2 \quad \frac{25a(a-b)}{80b(b-a)}$$

$$3 \quad \frac{12x(x-2y)}{y(6y-3x)}$$

$$4 \quad \frac{x^3+x}{x^5+x}$$

$$5 \quad \frac{2a^2-a^3}{a^4-2a^3}$$

$$6 \quad \frac{a^3-a^2b}{ab-b^2}$$

$$7 \quad \frac{a+3a^2-a^4}{a^2+3a^3-a^5}$$

$$8 \quad \frac{2a^2-6ab}{6b^2-2ab}$$

$$9 \quad \frac{(a-x)^3}{(x-a)^2}$$

$$10 \quad \frac{m^2-n^2}{m^3-n^3}$$

$$11 \quad \frac{s^2-9t^2}{s-3t}$$

$$12 \quad \frac{(m+n)^2}{m^2-n^2}$$

$$13 \quad \frac{t^2-4n^2}{t^2+4n^2+4tn}$$

$$14 \quad \frac{x^2-x+1}{x^3+1}$$

$$15 \quad \frac{4+2a+a^2}{a^3-8}$$

$$16 \quad \frac{y^4-1}{y^8-1}$$

$$17 \quad \frac{q^3-1}{q^4-q^2-2q-1}$$

$$18 \quad \frac{(y^2-1)(y+1)}{y-1}$$

$$19 \quad \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$$

$$20 \quad \frac{(p-1)^2(p+2)}{p^2+p-2}$$

$$21 \quad \frac{a^3+b^3}{a^2-b^2}$$

$$22 \quad \frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}$$

$$23 \quad \frac{2a^3-2b^3}{5a^2-5b^2}$$

$$24 \quad \frac{3a^2-3b^2}{6a^3+6b^3}$$

$$25 \quad \frac{a^4-b^4}{a^2-b^2}$$

$$26 \quad \frac{a^4-b^4}{a^2+b^2}$$

$$27 \quad \frac{a^3-b^3}{a^4-b^4}$$

$$28 \quad \frac{a^4-b^4}{a^3+b^3}$$

$$29 \quad \frac{ax+ay-bx-by}{ax-ay-bx+by}$$

$$30 \quad \frac{x^2+ax-xy-ay}{x^2-xy-ax+ay}$$

2 Числа a, b, c, d таковы, что $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = 5$. Вычислите следующие значения.

$$1 \quad \frac{a+5b}{c+5d}$$

$$2 \quad \frac{a+2c+3b+4d}{5b+6d}$$

$$3 \quad \frac{2a-c}{2b-d}$$

$$4 \quad \frac{a^2+(2c)^2}{b^2+(3d)^2}$$

$$5 \quad \frac{a^2+3ac+c^2}{b^2+3bd+d^2}$$

$$6 \quad \frac{a^2+ab+2b^2}{a^2-ab+3b^2}$$

1 Выполните действия.

$$1 \quad \frac{x^3}{y^2} \cdot \frac{y^3}{x^4}$$

$$2 \quad \frac{4yz}{6bc} \cdot \frac{18cx}{4xy} \cdot \frac{6ab}{az}$$

$$3 \quad \frac{ab - b^2}{18} \cdot \frac{6a}{b^3}$$

$$4 \quad \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cdot \frac{a^4}{(a + b)^2}$$

$$5 \quad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$$

$$6 \quad \frac{5x^2y^2}{2a^2b} \div \frac{bx^2y}{6a}$$

$$7 \quad 18c \div \frac{6c}{b}$$

$$8 \quad \left(\frac{2a^2x}{6by} \div \frac{4xy^2}{18ab} \right) \div 6a^2$$

$$9 \quad \frac{8z}{13x^2y} \cdot (-2a^4x^4y^3)$$

$$10 \quad -16a^2b^3 \cdot \frac{2z}{8a^2b}$$

$$11 \quad 48a^4b \div \frac{24ab^3}{x^2}$$

$$12 \quad \frac{15x^2z}{a^7} \div 5xz^3$$

$$13 \quad \frac{64xy^3z}{a^5c} \div 8x^2yz$$

$$14 \quad \left(\frac{24db^2c}{18a^4} \div \frac{7cd}{12a^3} \right) \cdot \frac{14a}{32b}$$

$$15 \quad \frac{x^2 + xy}{y} \div \frac{xy + y^2}{x}$$

$$16 \quad \frac{x^2 - y^2}{6x^2y^2} \div \frac{x + y}{3xy^3}$$

$$17 \quad \frac{4p^2 - 9q^2}{p^2q^2} \div \frac{2ap + 3aq}{2pq}$$

$$18 \quad \frac{bx + by}{x^2 - 2xy + y^2} \cdot \frac{4x^2 - 4y^2}{bx^2 + 2bxy + by^2}$$

$$19 \quad \frac{5 - 5a}{1 + a} \div \frac{1 - a^2}{3 + 3a}$$

$$20 \quad \frac{x^2 - 25}{x^2 - 3x} \div \frac{x^2 + 5x}{x^2 - 9}$$

$$21 \quad \frac{x^2 - xy}{2x^3 + 2y^3} \div \frac{x^2 + xy}{7x^2 - 7y^2}$$

$$22 \quad \frac{a + b}{a^4 + a^2b^2 + b^4} \cdot \frac{a^3 + b^3}{a^4 - b^4} \cdot \frac{a^3 - b^3}{a^2 + b^2}$$

$$23 \quad \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 + 8x + 15} \div \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 6}$$

$$24 \quad \frac{a^2 - 5a + 6}{a^2 + 7a + 12} \cdot \frac{a^2 + 3a}{a^2 + a - 6}$$

$$25 \quad \frac{x^2 + 2xy + y^2}{9b^3} \cdot \frac{3b}{x^2 - y^2}$$

$$26 \quad \frac{3by + 6y - 5b - 10}{7yb - 14y} \cdot \frac{b^2 - 4}{9y^2 - 25}$$

$$27 \quad \frac{3t - 9t^2}{t^2 + 9 + 6t} \div \frac{1 - 9t^2}{t^2 - 9}$$

$$28 \quad \frac{8v + v^2 + 16}{15v^2 + 3v} \div \frac{16 - v^2}{25v^2 - 1}$$

$$29 \quad \frac{k^2 + 3k + 2}{k^2 + 7k + 12} \div \frac{k^2 - 1}{k^2 - 9}$$

$$30 \quad \frac{m^2 + 5m + 4}{m^2 + 5m + 6} \div \frac{m^2 - 16}{m^2 - 4}$$

A-05

Сложение и вычитание дробей

1 Выполните действия, запишите ответ в виде рациональной дроби.

$$1 \quad 3 - \frac{1}{x}$$

$$2 \quad 4 + \frac{2}{c}$$

$$3 \quad \frac{6}{a} - 3a^2$$

$$4 \quad \frac{3}{c^2} - 5c$$

$$5 \quad \frac{5x^2}{y} - x^2$$

$$6 \quad \frac{a+3}{a-2} + \frac{3-2a}{a-2} + 2$$

$$7 \quad \frac{6-y}{y+4} + \frac{2y+1}{y+4} + 7$$

$$8 \quad \frac{5}{a-3} - \frac{7}{3-a} - 1$$

$$9 \quad \frac{4}{b-1} - \frac{2}{1-b} + 3$$

$$10 \quad \frac{c}{c+8} + \frac{1}{c} + \frac{c}{8}$$

$$11 \quad \frac{d}{d+3} + \frac{d}{3} + \frac{2}{d}$$

$$12 \quad \frac{4x-1}{x(x-1)} + \frac{2}{x-1} - \frac{3}{x}$$

$$13 \quad \frac{2-3b}{b(b+4)} - \frac{5}{b} + \frac{3}{b+4}$$

$$14 \quad \frac{-2}{(x+5)(x-6)} + \frac{1}{(x+5)(x-1)} - \frac{4}{(x-6)(x-1)}$$

$$15 \quad \frac{1}{(z-2)(z+1)} + \frac{-3}{(z-2)(z-3)} + \frac{5}{(z-3)(z+1)}$$

$$16 \quad \frac{a-2}{a^2(a+2)} - \frac{a^3-7}{a(a+2)^2} + 3$$

$$17 \quad \frac{2-b^2}{b(b-1)^2} - 2 + \frac{b+1}{b^2(b-1)}$$

$$18 \quad \frac{5x-7}{x^2-4} - \frac{3x-2}{2-x}$$

$$19 \quad \frac{2-3y}{y^2-9} - \frac{5-2y}{3-y}$$

$$20 \quad \frac{a+1}{25-a^2} - \frac{4}{a+5} + 2$$

$$21 \quad \frac{b-1}{16-b^2} - 3 - \frac{5}{b+4}$$

$$22 \quad \frac{2}{(2-a)^2} + \frac{3}{a^2-4a+4} + \frac{7}{a^2-4}$$

$$23 \quad \frac{3}{(3-b)^2} + \frac{5}{b^2-6b+9} + \frac{2}{b^2-9}$$

$$24 \quad \frac{2b-1}{81-b^2} - \frac{3b-2}{b^2+18b+81}$$

$$25 \quad \frac{13}{x^3+1} - \frac{17x+10}{5x^2-5x+5} - \frac{5}{x+1}$$

$$26 \quad \frac{x+36}{x^3-1} - \frac{x+6}{x-1} - \frac{x^2-x+16}{x^2+x+1}$$

$$27 \quad \frac{-3}{a^3-8} - \frac{a+5}{a^2+24+4} - \frac{1}{3a-6}$$

$$28 \quad \frac{-1}{a+3} + \frac{4}{a^3+27} - \frac{a-2}{2a^2-6a+18}$$

$$29 \quad \frac{60}{x^3+125} + \frac{2x-3}{x^2-5x+25} - 3$$

$$30 \quad \frac{1-4b}{b^2+4b+16} - \frac{16b}{b^3-64} + 4$$

2 Найдите сумму и упростите при $\frac{a+b}{ab} = 1$.

$$1 \quad \frac{1}{b^2} + \frac{1}{ab}$$

$$2 \quad \frac{a}{b} + \frac{a^2}{b^2}$$

$$3 \quad \frac{1}{a^2b} + \frac{1}{ab^2}$$

$$4 \quad \frac{b^2}{a^3} + \frac{b}{a^2}$$

3 Найдите разность и упростите при $\frac{b-a}{ab} = 1$.

$$1 \quad \frac{ck}{a} - \frac{ck}{b}$$

$$3 \quad \frac{c}{ka} - \frac{c}{bk}$$

$$2 \quad \frac{1}{ack} - \frac{1}{bck}$$

$$4 \quad \frac{k}{abc} - \frac{k}{b^2c}$$

4 Пусть $A = \frac{1}{a+b}$, $B = \frac{1}{a-b}$, $C = \frac{b}{a^2-b^2}$, $D = \frac{b}{a^2+b^2}$. Сложите каждые две дроби, каждые три дроби, четыре; упростите, если возможно, результаты.

5 Упростите.

$$1 \quad \frac{1}{x^2+x-2} + \frac{1}{x^2+2x-3}$$

$$3 \quad \frac{2}{x+2} + \frac{3}{x-3} - \frac{1}{x-1}$$

$$2 \quad \frac{x+1}{x^2+3x-4} + \frac{x-1}{x^2-3x-4}$$

$$4 \quad \frac{1}{x^2-5x+6} - \frac{2}{x^2+x-12} + \frac{1}{x^2+2x-8}$$

A-06

Многоэтажные дроби и преобразования

1 Представьте в виде рациональной дроби.

$$1 \quad \frac{3}{a - \frac{1}{b}}$$

$$3 \quad \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{a}}}$$

$$5 \quad 2 \cdot \frac{a+1}{a-1} - \frac{1 + \frac{1}{a}}{1 - \frac{1}{a}}$$

$$2 \quad x + \frac{2}{y + \frac{2}{z}}$$

$$4 \quad \frac{a - \frac{ab}{b-c}}{b - \frac{ab}{a-c}}$$

$$6 \quad \frac{a+b - \frac{4ab}{a+b}}{\frac{1}{a-b} + \frac{a-b}{4ab}}$$

A-07

Тождества

1 Проверьте тождества.

$$1 \quad \left(\frac{a}{a-3} + \frac{10}{a-3} + \frac{25}{a^2-3a} \right) : \left(\frac{5}{a^2} + \frac{2}{a} + \frac{1}{5} \right) = \frac{5a}{a-3}$$

$$2 \quad \left(\frac{a-b}{2a+2b} + \frac{b^2}{a^2-b^2} + \frac{a-3b}{2b-2a} \right) \cdot \frac{3a^2-3b^2}{2b} = 4, 5b$$

$$3 \quad \left(\frac{z}{2+3z} - \frac{5z}{3z-2} \right) : \frac{4z^3+4z^2}{9z^2-12z+4} = 3 \frac{2-3z}{z(2+3z)}$$

$$4 \quad \left(\frac{1}{2b+1} - \frac{1}{3b} - \frac{1}{3} \right) \cdot (6b^2+3b) = -2b^2-1$$

$$5 \quad \frac{4x^2+4xy+y^2}{8x^2} \cdot \left(\frac{2x}{y-2x} - \frac{2x}{y+2x} \right) = \frac{2x+y}{y-2x}$$

$$6 \quad \left(3 - \frac{9+4a^2}{3+2a} \right) \cdot \left(\frac{1}{2a} + \frac{2}{3-2a} \right) = 1$$

2 Докажите, что если $a + b + c = 0$, то выполняются следующие тождества.

$$1 \quad \frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ac} + \frac{c^2}{ab} = 3$$

$$2 \quad \frac{a^4 + b^4 + c^4}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$$

3 Докажите тождества.

$$1 \quad \frac{a+b}{a-b} - \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} = \frac{2ab}{a^2-b^2}$$

$$2 \quad \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 = 1$$

$$3 \quad \frac{\left(1 + \frac{a-b}{a+b}\right) \left(1 + \frac{b-c}{b+c}\right) \left(1 + \frac{c-a}{c+a}\right)}{\left(1 - \frac{a-b}{a+b}\right) \left(1 - \frac{b-c}{b+c}\right) \left(1 - \frac{c-a}{c+a}\right)} = 1$$

$$4 \quad \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{2}{xy}\right) \cdot \frac{xy^2}{x+y} = 1 + \frac{y}{x}$$

$$5 \quad \frac{1}{a(a-b)(a-c)} + \frac{1}{b(b-a)(b-c)} + \frac{1}{c(c-a)(c-b)} = \frac{1}{abc}$$

$$6 \quad \frac{1}{(x-y)(y-z)} - \frac{1}{(y-z)(x-z)} + \frac{1}{(z-x)(x-y)} = 0$$

$$7 \quad \left(\frac{1}{x+y} - \frac{x}{y^2+xy}\right) \left(\frac{x^2+y^2}{x^3-xy^2} - \frac{x}{x^2-xy}\right) = \frac{x-y}{x(x+y)}$$

$$8 \quad \frac{\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \cdot \frac{\frac{bc+ac+ab}{abc}}{\frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{ab}} = \frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$$

Соответствия

- C-01** Составление рациональных дробей
C-02 Преобразования без записей
C-03 Тожества

C-01

Составление рациональных дробей

1 На что надо умножить дробь $\frac{(a-b)(c-d)}{x-y}$, чтобы получить следующие дроби:

$$1 \quad \frac{2(a-b)(d-c)}{x-y}$$

$$2 \quad -\frac{(a-b)(d-c)}{3y-3x}$$

$$3 \quad \frac{(b-a)(d-c)}{x-y}$$

$$4 \quad \frac{bc-ac-bd+ad}{y-x}$$

2 Составьте и упростите, если возможно, дроби $\frac{M}{N}$ и $\frac{N}{M}$. Заранее определите, сколько возможно составить вариантов.

M	N
$(a-b)$	$\frac{1}{a+b}$
$\frac{1}{ab}$	$\frac{a}{b}$
$\frac{a^2-b^2}{ab}$	$a+b$
$\frac{a^2+2ab+b^2}{(a-b)^2}$	$\frac{(a+b)^2}{ab}$

3 Равенство целых выражений $AB = CD$ можно различными способами записать в виде равенств дробей: $\frac{A}{C} = \frac{D}{B}$, или $\frac{A}{D} = \frac{C}{B}$, или $\frac{AB}{C} = D$, или $\frac{A}{CD} = \frac{1}{B}$ и т. п. Запишите различными способами равенство $ABC = KLM$.

4 Проверьте с помощью определения равенство дробей.

$$1 \quad \frac{a-b}{a} = \frac{a^2+ab}{a^2-b^2}$$

$$2 \quad \frac{x^2+6x+8}{x^2+7x+12} = \frac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3}$$

$$3 \quad \frac{6a-3b}{12a} = \frac{2a-b}{4a}$$

$$4 \quad \frac{x-y}{x} = \frac{x^2-xy}{x^2}$$

$$5 \quad \frac{y^2}{xy+y^2} = \frac{y}{x+y}$$

$$6 \quad \frac{0,1a-1}{0,2a+2} = \frac{a-1}{2a+20}$$

5 Даны три выражения:

$$A = \frac{x}{x+y}, \quad B = y, \quad C = x+y.$$

Как из них составили D ?

D	$\frac{A+B}{C}$	$A + \frac{B}{C}$	$\frac{A}{C} + B$	$\frac{A}{C} + \frac{B}{C}$
$\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x+y}$				
$\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x+y}$				
$\frac{\frac{x}{x+y} + y}{x+y}$				
$\frac{x}{\frac{x+y}{x+y}} + y$				

6 Докажите, что если $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, то $\frac{A+C}{B+D} = \frac{A}{B} = \frac{C}{D} = \frac{A-C}{B-D}$.

7 Впишите недостающие элементы дробей. Однозначно ли выполняется каждое из этих заданий?

1 $\frac{x^3}{5y^3} \cdot \left[\frac{\quad}{3y^6} \right] = \frac{11x^8}{15y^9}$

3 $\frac{3x^3}{\left[\quad \right]} \cdot \left[\frac{\quad}{y^2} \right] = \frac{3x^8}{5y^7}$

2 $\frac{9x^4}{\left[\quad \right]} \cdot \frac{5x}{y^3} = \left[\frac{\quad}{3y^8} \right]$

4 $\left[\frac{\quad}{4y^2} \right] \cdot \frac{x^2}{7y^4} = \left[\frac{7x^7}{\quad} \right]$

8 Заполните пропуски в построении рациональных выражений.

1	$A = \frac{m^2 + n^2 + 2mn}{m^2 + n^2 - 2mn} + \frac{(m-n)^3}{(m+n)^3}$	$B = \frac{m+n}{m-n}$	$A =$
2	$A = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2x - 1} + 2x^2 + 4x$	$B = x^2 + 2x$	$A = \frac{B+1}{B-1} + \left[\quad \right]$
3	$A = x^2 + \frac{1}{x^2+1} + \frac{x^2+1}{x^2+2}$	$B =$	$A = B - 1 + \frac{1}{B} + \frac{B}{B+1}$
4	$A = \frac{a^2 + b^2}{ab} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2} + 2$	$B = \frac{b}{a} + \frac{a}{b}$	$A =$

- 1** Постарайтесь ответить на вопросы о выражениях, не делая промежуточных записей.

$$A = \frac{(a+b)^2}{ab} : \frac{a(a^2-b^2)(a-b)^2}{b}$$

- 1** Как можно разложить на множители числители и знаменатели дробей?
- 2** Какие из множителей после сокращения дроби и превращения её в обыкновенную останутся в числителе, какие в знаменателе, и в какой степени?
- 3** Запишите результат проделанных в уме преобразований.

$$B = \frac{4ab}{a^2-b^2} + \frac{a^2-b^2}{(a+b)^2}$$

- 1** Сократимы ли дроби, являющиеся слагаемыми в сумме?
- 2** Назовите общий знаменатель дробей.
- 3** Какой получится числитель суммы дробей?
- 4** Запишите результат проделанных устно преобразований.
- 5** Можно ли сократить полученную дробь?

- 2** Выполните задания устно по схеме:

- 1** Подсчитайте устно общий знаменатель в скобке, сложите дроби, домножив каждую на дополнительный множитель, сократите полученную дробь, если возможно.
- 2** Представьте деление в виде умножения.
- 3** Сократите полученную дробь.
- 4** Запишите результат.

$$\text{а) } A = \left(\frac{x^2+y^2}{x-y} \right) : \left(\frac{x}{x-y} - \frac{y}{x+y} \right) \quad \text{б) } A = \left(\frac{x+1}{x} - \frac{1}{x^2-x} \right) : \left(x - \frac{x^2}{x-1} \right)$$

- 3** Даны два выражения

$$A = \frac{\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b} + 2}{\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b} - 2} \quad \text{и} \quad B = \frac{\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 2}{\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2}$$

- 1** Что можно сказать о знаменателях дробей, которые получатся в числителе и знаменателе дроби B после вычислений?
- 2** Квадраты каких выражений получатся в числителе и знаменателе дроби B после вычислений?
- 3** Вернемся к выражению A . Что в нем соответствует x и y ? Чему равны $x+y$ и $x-y$?
- 4** Подставьте устно полученные выражения для $x+y$ и $x-y$ в ответ для B и найдите ответ для выражения A .

С-03

Тождества

1 Отметьте пары дробей, сумма которых равна 1.

	$\frac{a+b}{b-a}$	$\frac{2a}{a-b}$	$\frac{b}{a-b}$	$\frac{a}{a-b}$	$\frac{b}{b-a}$
$\frac{a+b}{b-a}$					
$\frac{2b-a}{b-a}$					
$\frac{2a}{a-b}$					
$\frac{a}{a-b}$					
$\frac{b}{b-a}$					

2 Какие из выражений тождественно равны?

	$2 + \frac{4b^2}{a^2 - b^2}$	$1 + \frac{4ab}{a^2 - 2ab + b^2}$	$2 + \left(\frac{a^2 - b^2}{ab}\right)^2$	$2 - \frac{(a-b)^2}{a^2 + b^2}$
$\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2$				
$\frac{(a+b)^2}{a^2 + b^2}$				
$\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b}$				
$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}$				

Приложения

П-01

П-01

1 Найдите x , если

$$1 \quad \frac{ab}{c} = \frac{x}{c}$$

$$2 \quad \frac{b}{n} = \frac{a}{x}$$

$$3 \quad \frac{x}{bc} = \frac{ab}{b}$$

$$4 \quad \frac{p}{x} = \frac{ab}{c}$$

2 Из данных формул выразите требуемую величину.

$$1 \quad C = 2\pi R, \quad R =$$

$$2 \quad S = vt, \quad t =$$

$$3 \quad V = abc, \quad b =$$

$$4 \quad \rho = \frac{m}{V}, \quad V =$$

Многие физические законы связывают величины с помощью рациональных дробей.

- $F = \frac{kMm}{r^2}$ — закон всемирного тяготения
- $\frac{mv^2}{2} + mgh = C$ — закон сохранения энергии
- $\frac{pV}{T} = R$ — уравнение газового состояния
- $p = p_0(1 + \lambda t)$ — закон Шарля

Из этих соотношений часто приходится выражать одну величину через другие.

3 Выразите указанные величины через другие, входящие в эту формулу.

$$1 \quad F = \frac{kMm}{r^2} \text{ — выразите коэффициент } k \text{ и произведение масс } mM$$

$$2 \quad \frac{mv^2}{2} + mgh = C \text{ — выразите массу } m \text{ и высоту } h$$

$$3 \quad pV = RT \text{ — выразите объём } V, \text{ газовую постоянную } R \text{ и температуру } T$$

$$4 \quad p = p_0(1 + \lambda t) \text{ — выразите температуру } t \text{ и постоянную } \lambda$$

Исследования и доказательства

- И-01** Условные тождества
И-02 Сумма взаимно обратных чисел
И-03 Знакомимся с теорией непрерывных дробей
И-04 Выделение целой части дроби

И-01

Условные тождества

- Докажите, что если $2ac = b(a + c)$, то $\frac{2}{b} = \frac{1}{b-a} + \frac{1}{b-c}$.
- Докажите, что если $a + c = 2b$ и $2bd = c(b + d)$, то $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.
- Докажите, что если $b = \frac{2ac}{a+c}$, $x = \frac{a}{b+c}$, $y = \frac{b}{c+a}$, $z = \frac{c}{a+b}$, то $y = \frac{2xz}{x+z}$.
- Докажите, что если $a(y+z) = b(z+x) = c(x+y)$, то $\frac{y-z}{a(b-c)} = \frac{z-x}{b(c-a)} = \frac{x-y}{c(a-b)}$.
- Докажите, что если $z = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$, то $\frac{1}{z-a} + \frac{1}{z-b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

И-02

Сумма взаимно обратных чисел

- Выразите $x^2 + \frac{1}{x^2}$ через $x + \frac{1}{x}$.
- Найдите значения $x^2 + \frac{1}{x^2}$ и $x^2 + \frac{1}{x^2}$, если $x + \frac{1}{x} = 3$.
- Докажите, что не существует числа x такого, что $x + \frac{1}{x} = \frac{3}{2}$.
- Докажите, что если $x + \frac{1}{x}$ — целое число, то и числа $x^2 + \frac{1}{x^2}$ и $x^2 + \frac{1}{x^2}$ тоже целые.
- Как из того, что $x^{2006} + \frac{1}{x^{2006}}$ — целое число, получить то, что $x^{2007} + \frac{1}{x^{2007}}$ — тоже целое?
- Дайте обобщение решенных задач.

И-03

Знакомимся с теорией непрерывных дробей

Дроби вида $\frac{1}{a + \frac{1}{b}}$, $\frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}}}$ и т.п. называются непрерывными дробями.

- Вычислите:

$$1 \quad \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}}$$

$$2 \quad \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}$$

2 В последовательности дробей $a_1 = \frac{1}{1+x}$, $a_2 = \frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}$, $a_3 = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}}$, ...

запишите четвертую и пятую дроби.

3 Упростите дроби из задания 2. (Заметьте, что каждая получается из предыдущей простым способом: $a_1 = \frac{1}{1+x}$; $a_2 = \frac{1}{1+a_1}$; $a_3 = \frac{1}{1+a_2}$; ...) Получаются дроби, равные отношению двух многочленов.

Коэффициенты этих многочленов образуют последовательность, называемую *числа Фибоначчи*: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... Каждое число в ней равно сумме двух предыдущих.

Запишите первые двенадцать членов последовательности Фибоначчи.

4 Подставьте $x = 1$ в дроби из задания 2. Запишите первые 10 дробей. Заметьте, что в числителе и знаменателе получаются два последовательных числа Фибоначчи. Докажите это свойство, обозначив числа u_k ($u_1 = 1$, $u_2 = 1$, $u_3 = 2$, $u_4 = 3$, ...). Тогда про дроби надо доказать, что каждая из них записывается как $a_k = \frac{u_{k+1}}{u_{k+2}}$.

И-04

Выделение целой части дроби

1 Представьте дробь как сумму правильной и неправильной частей.

1 $\frac{x+2}{x+1}$

3 $\frac{2x}{x-1}$

5 $\frac{4x+2}{1-x}$

2 $\frac{x-1}{x+1}$

4 $\frac{3x+2}{x-2}$

6 $\frac{2-x}{3-x}$

2 Пользуясь тем, что целая часть дроби $\frac{ax+b}{cx+d}$ равна $\frac{a}{c}$, найдите дробную часть выражения.

1 $\frac{4x+1}{2x-1}$

3 $\frac{x-2}{2x+1}$

5 $\frac{4-3x}{2x-2}$

7 $\frac{m^2x-m}{mx+6}$

2 $\frac{4x+10}{3x+11}$

4 $\frac{3}{2x-2}$

6 $\frac{3mx-1}{2x+1}$

3 С помощью операции «добавить—вычестъ» можно выделить целую часть из дроби более сложного вида.

Пример: $\frac{3x^2-1}{3x-2} = \frac{3x^2-2x+2x-1}{3x-2} = x + \frac{\frac{2}{3} \cdot (3x-2) + \frac{4}{3} - 1}{3x-2} = x + \frac{2}{3} + \frac{\frac{1}{3}}{3x-2}$.

Выделите целую часть из следующих дробей.

1 $\frac{x^2+1}{x-1}$

3 $\frac{4x^2+2x-1}{x-1}$

2 $\frac{3x^2+x-1}{x}$

4 $\frac{x^2-x-1}{x^2-1}$

4 Найдите все натуральные значения букв, при которых значение дроби будет целым числом.

1 $\frac{10}{x}$

2 $\frac{3t}{t+1}$

3 $\frac{3t^2}{t-1}$

4 $\frac{3}{t^2-1}$

5 $\frac{3t^2+4t+5}{t+1}$

Комбинаторика

К-01 Вероятности событий

К-01

Вероятности событий

Напомним, что вероятность события равна отношению $\frac{A}{B}$ числа A благоприятных исходов к числу B всех возможных исходов.

- 1** Одиннадцать человек, пронумерованных от 2 до 12, играют в кости — по два раза бросают кубик. Если сумма очков после бросков равна их номеру — они выиграли. Заполните таблицу возможных результатов бросков и посчитайте вероятность выигрыша каждого из игроков.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Число случаев, когда сумма равна											
Вероятность выпадения суммы											

Проверьте, что сумма чисел, стоящих в первой строке таблицы, равна общему числу случаев.

Чему равна сумма чисел второй строки таблицы?

Какой из номеров самый удачливый?

- 2** Костя и Серёжа играют — по очереди называют наудачу четырехзначное число (то есть число от 1000 до 9999). Костя выигрывает, если названное число делится на 3, а Серёжа — если оно делится на 5. (Если ни то, ни другое, или если оно делится и на то, и на другое — никто не выиграл). Сначала оцените, у кого вероятность выигрыша больше. Какова вероятность выигрыша в одном туре у каждого из них?
- 3** Игральную кость кинули подряд четыре раза. Вычислите вероятности следующих событий.
- 1** Шестерка выпала ровно один раз.
 - 2** Единица выпала ровно три раза.
 - 3** Четное число не выпало ни разу.
 - 4** Все время выпадала пятерка или шестерка.
 - 5** Три раза выпала единица и один раз двойка.
 - 6** Единица выпала не менее двух раз.
- 4** В тесте пять вопросов, для каждого указано 4 возможных ответа, из которых ровно один верный. Ученик случайным образом выбирает ответы на вопросы. Вычислите вероятности следующих событий.
- 1** Ученик верно ответил на два вопроса.
 - 2** Ученик ни разу не угадал правильный ответ.
 - 3** Ученик правильно ответил не менее, чем на 3 вопроса.
 - 4** Все ответы ученика верны.

- 5** Какова вероятность того, что выбранное наудачу четырехзначное число (то есть число от 1000 до 9999)
- 1** делится на 7?
 - 2** оканчивается цифрой 7?
 - 3** записано одинаковыми цифрами?
 - 4** является полным квадратом?
 - 5** в записи не имеет нулей?
- 6** В классе 10 хороших мальчиков, 12 хороших девочек и 5 хулиганов. Какова вероятность того, что из выбранных двух дежурных ни один не оказался хулиганом?
- 7** В колоде 52 карты, из нее берут наугад три карты. Найдите вероятности выбора из этой колоды следующих комбинаций:
- 1** три карты одной масти;
 - 2** три туза;
 - 3** три карты разных мастей;
 - 4** валет, дама, король;
 - 5** три карты и из них ни одной картинки (картинка — валет, дама, король, туз);
 - 6** три картинки;
 - 7** четверем игрокам раздали по 3 карты, причем у каждого оказались карты одной масти, а у разных игроков карты разных мастей.
- 8** В колоде 52 карты. Четверем игрокам выдали по одной карте. Какова вероятность следующего события:
- 1** первый игрок получил карту бубновой масти;
 - 2** все получили по карте бубновой масти;
 - 3** все получили тузов;
 - 4** никто не получил туза;
 - 5** кто-нибудь из игроков получил туза.

Примеры и комментарии

Алгоритмы

- A-01** Конструирование рациональных выражений
A-02 Допустимые значения букв
A-03 Сокращение дробей
A-04 Умножение и деление дробей
A-05 Сложение и вычитание дробей
A-06 Многоэтажные дроби
A-07 Тождества

A-01

Конструирование рациональных выражений

Конструирование рациональных выражений отличается от конструирования многочленов (целых выражений) тем, что добавилась еще одна операция — деление. Ее можно записывать как с помощью горизонтальной черты, так и с помощью знака деления в виде двоеточия «:». Поэтому ответы в задании 1 могут быть записаны по-разному.

Пример. Формула частного куба суммы выражений A и B и суммы их кубов может выглядеть следующим образом:

$$\frac{(A+B)^3}{A^3+B^3} \quad \text{или} \quad (A+B)^3 : (A^3+B^3).$$

Обратите внимание на то, что слово *частное* можно употреблять в двух смыслах: частное как некоторое *выражение* или частное как *результат* деления. Например, частное одночленов a^3b^2 и ab^2 может пониматься как выражение $a^3b^2 : ab^2$ и как одночлен a^2 — результат деления.

Это замечание может быть применено и к словам *сумма*, *разность*, *произведение*.

Кроме термина *частное* можно употреблять термин *отношение*. Можно сказать, что дробь $\frac{A}{B}$ является отношением выражений A и B .

A-02

Допустимые значения букв

Примеры.

- 1** Выражение $A = \frac{5}{2x-6} + \frac{3}{3x+10}$ не определено, когда хотя бы один из знаменателей обращается в 0.

Ищем недопустимые значения буквы x . Для этого приравняем нулю каждый знаменатель и решаем получившиеся уравнения:

$$\begin{aligned} 2x - 6 = 0 &\Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3 \\ 3x + 10 = 0 &\Rightarrow 3x = -10 \Rightarrow x = -\frac{10}{3} \end{aligned}$$

В ответе записываем числа, не являющиеся корнями этих уравнений: $x \neq 2$, $x \neq -\frac{10}{3}$.

Возможные формы записи ответа: $\begin{cases} x \neq 2, \\ x \neq -\frac{10}{3} \end{cases}$ или $x \neq 2; -\frac{10}{3}$.

- 2** Для выражения типа $A = \frac{a}{a^2 + 4}$ более разумно не выписывать формально уравнение $a^2 + 4 = 0$, а сразу увидеть, что знаменатель не обращается в нуль. Решение при этом выглядит так: выражение $a^2 + 4 > 0$ при любом a , поэтому $a^2 + 4 \neq 0$.

Ответ: a — любое число.

- 3** Выражение $A = \left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b}\right) : (a+b-1)$ теряет смысл, если хотя бы одно из выражений $a+b$, $a-b$ или $a+b-1$ обращается в нуль.

Поэтому наиболее простой ответ состоит в том, чтобы записать в виде системы все полученные условия, никак не преобразуя их и учитывая, что буквы a и b входят в них симметрично. (Разве лишь последнее условие $a+b-1 \neq 0$ можно было бы переписать в виде $a+b \neq 1$.)

Ответ: $\begin{cases} a+b \neq 0, \\ a-b \neq 0, \\ a+b \neq 1. \end{cases}$

А-03

Сокращение дробей

В основе сокращения лежит умение раскладывать на множители. Так, сокращая дробь $\frac{x^8 - 1}{x^6 + 1}$, мы сначала разложим на множители числитель и знаменатель:

$$\frac{x^8 - 1}{x^6 + 1} = \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)}{(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)} = \frac{(x^2 - 1)(x^4 + 1)}{x^4 - x^2 + 1}.$$

В задании 2 полезно использовать, кроме правила сокращения дробей, свойства пропорций:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}.$$

В более общем виде:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{ka + lc}{kb + ld}.$$

А-04

Умножение и деление дробей

При умножении и делении нескольких дробей полезно начинать с записи промежуточного результата в виде одной дроби, «разбросав» сомножители в числитель и знаменатель.

Пример. $\left(\frac{x^2 - y^2}{xy(x+2y)} : \frac{x(x+y)}{x^2 - 4y^2}\right) \cdot \frac{x^2 y^2}{(x-y)(x-2y)} = \frac{(x^2 - y^2) \cdot (x^2 - 4y^2) \cdot x^2 y^2}{xy(x+2y) \cdot x(x+y) \cdot (x-y)(x-2y)}$.

Далее можно разложить на множители и сократить:

$$\frac{(x-y)(x+y)(x-2y)(x+2y)x^2 y^2}{x^2 y(x+2y)(x+y)(x-y)(x-2y)} = y.$$

Ответ: y .

A-05

Сложение и вычитание дробей

Первым шагом при сложении (вычитании) дробей является нахождение общего знаменателя. В заданиях 1–3 в знаменателях стоят одночлены.

Пример. Вычислить: $A = \frac{c}{a^2b} + \frac{a}{b^2c} + \frac{b}{c^2a}$.

Общий знаменатель: $a^2b^2c^2$. Получим:

$$A = \frac{c \cdot bc^2 + a \cdot a^2c + b \cdot ab^2}{a^2b^2c^2} = \frac{bc^3 + ca^3 + ab^3}{a^2b^2c^2}.$$

В заданиях 2 и 3, кроме сложения дробей, требуется упростить результат. Заметьте, что данное условие можно преобразовать. Например, равенство $\frac{a+b}{ab} = 1$ можно записать

в виде $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$. Это соотношение можно использовать по ходу преобразований.

В задании 4 общее число примеров достаточно велико:

$$6 + 4 + 1 = 11.$$

В задании 5 все квадратные трехчлены в знаменателях раскладываются на два линейных множителя.

A-06

Многоэтажные дроби

При преобразовании многоэтажных дробей надо внимательно «распределять» множители, относя их к числителю или знаменателю.

Пример.
$$\frac{a+1 + \frac{1}{a-1}}{a-1 + \frac{1}{a+1}} = \frac{((a+1)(a-1)+1) \cdot (a+1)}{(a-1)((a-1)(a+1)+1)} = \frac{a^2 \cdot (a+1)}{(a-1) \cdot a^2} = \frac{a+1}{a-1}.$$

A-07

Тождества

Среди предложенных тождеств много симметричных. Надо научиться пользоваться симметрией многочленов. Например, в задании 2 из условия $a+b+c=0$ можно выразить $c=-(a+b)$, подставить и доказывать обычное тождество. Но можно, не нарушая симметрию, получить следствие из данного равенства:

$$a+b+c=0 \Rightarrow a^2+b^2+c^2 = -2(ab+bc+ca);$$

$$a+b+c=0 \Rightarrow a^3+b^3+c^3 = 3abc;$$

$$a+b+c=0 \Rightarrow a^4+b^4+c^4 = 2(ab+bc+ca)^2.$$

Соответствия

- С-01** Составление рациональных дробей
- С-02** Преобразования без записей
- С-03** Тождества

Все примеры этого раздела могли бы быть отнесены к разделу Алгоритмы. Они выделены для того, чтобы научиться «работать глазами», т. е. разбираться в структуре выражений, анализируя их запись и не делая поспешных преобразований. Большинство примеров этого раздела может быть выполнено устно. Важно не торопиться, не начинать записывать промежуточные вычисления, пока не станет ясным путь получения ответа.

Приложения

П-01

Выражение из формул одних величин через другие является, по существу, задачей решения уравнений. Все предложенные соотношения таковы, что эти уравнения линейны. Однако надо быть внимательным при записи дробей, которые появляются при решении этих уравнений. Полезно устно потренироваться в быстром нахождении ответов в примерах задания 1.

Исследования и доказательства

- И-01** Условные тождества
- И-02** Сумма взаимно обратных чисел
- И-03** Знакомимся с теорией непрерывных дробей
- И-04** Выделение целой части дроби

И-03

Знакомимся с теорией непрерывных дробей

В этом разделе появляется очень важная последовательность чисел Фибоначчи: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

С этой последовательностью мы встретимся еще не один раз.

И-04

Выделение целой части дроби

Последний пункт задания является задачей на делимость целых чисел.

Число $\frac{a}{t}$, где a — данное целое число, а t — буква, принимающая целые значения, будет целым в том и только в том случае, когда t является одним из делителей числа a . Эти делители находятся простым перебором.

Выделяя целую часть рациональной дроби, надо постараться привести ее к виду $b + \frac{a}{t}$, где b — многочлен от t с целыми коэффициентами.

Комбинаторика

К-01 Вероятности событий

Решение предлагаемых задач на вероятность сводится к решению двух комбинаторных задач — подсчету общего числа вариантов и числа благоприятных исходов.

К заданию 3.

Приведем общую схему подсчета вероятностей при неоднократном повторении испытания.

Пусть нас интересует исход, вероятность которого равна $0 \leq p \leq 1$. Вероятность того, что он не произойдет, равна $1 - p$. Пусть делается 4 независимых испытания.

Запишем, используя бином:

$$1 = (p + (1 - p))^4 = p^4 + 4p^3(1 - p) + 6p^2(1 - p)^2 + 4p(1 - p)^3 + (1 - p)^4.$$

Каждое слагаемое является вероятностью определенного исхода. Например, член $6p^2(1 - p)^2$ равен вероятности того, что из четырех раз два раза наступит благоприятный исход.