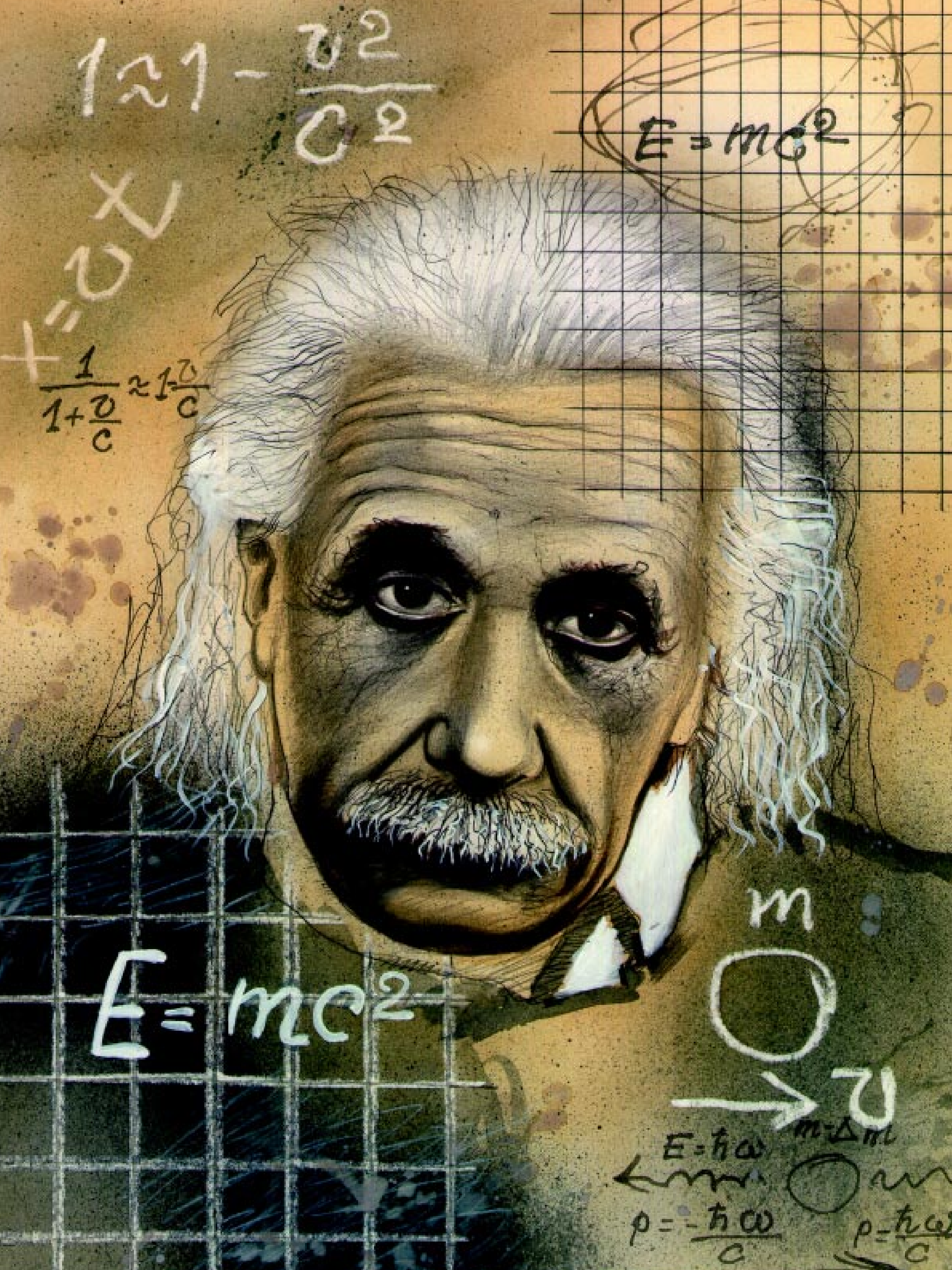

E=mc²
E=mc²
m
v
E=ħω
p=ħω/c

В 2005 году исполняется 100 лет с того дня, как была создана специальная теория относительности. За прошедшие годы следствия этой теории нашли подтверждение во многих опытах, и сегодня она является основой для понимания широчайшего круга явлений. Речь идет не только о качественном понимании, так сказать, о понимании без формул, хотя само по себе и такое понимание физических явлений очень важно. Теория относительности дает и точное количественное описание физических явлений, служит основой для расчета различных физических приборов и установок.

Предлагаем вниманию читателей две статьи, посвященные специальной теории относительности. Первая статья была опубликована в «Кванте» в 1995 году. Вторая статья перепечатывается из «Собрания научных трудов» Альберта Эйнштейна (М.: Наука, 1965).

Простой вывод формулы $E = mc^2$

Б.БОЛОТОВСКИЙ

Введение

Полная и окончательная формулировка современной теории относительности содержится в большой статье Альберта Эйнштейна «К электродинамике движущихся тел», опубликованной в 1905 году. Если говорить об истории создания теории относительности, то у Эйнштейна были предшественники. Отдельные важные вопросы теории исследовались в работах Х.Лоренца, Дж.Лармора, А.Пуанкаре, а также некоторых других физиков. Однако теория относительности как физическая теория до появления работы Эйнштейна не существовала. Работа Эйнштейна отличается от предшествующих работ совершенно новым пониманием как отдельных сторон теории, так и всей теории как целого, таким пониманием, которого не было в работах его предшественников.

Теория относительности заставила пересмотреть многие основные представления физики. Относительность одновременности событий, различия в ходе движущихся и покоящихся часов, отличия в длине движущейся и покоящейся линеек – эти и многие другие следствия теории относительности неразрывно связаны с новыми по сравнению с ньютоновской механикой представлениями о пространстве и времени, а также о взаимной связи пространства и времени.

Одно из важнейших следствий теории относительности – знаменитое соотношение Эйнштейна между массой m покоящегося тела и запасом энергии E в этом теле:

$$E = mc^2 , \qquad (1)$$

где c – скорость света.

(Это соотношение называют по-разному. На Западе для него принято название «соотношение эквивалентности между массой и энергией». У нас долгое время было принято более осторожное название «соотношение взаимосвязи между массой и энергией». Сторонники этого более осторожного названия избегают слова «эквивалентность», тождественность, потому что, говорят они, масса и энергия – это разные качества вещества, они могут быть связаны между собой, но не тождественны, не эквивалентны. Мне кажется, что эта осторожность является излишней. Равенство $E = mc^2$ говорит само за себя. Из него следует, что массу можно измерять в единицах энергии, а энергию – в единицах массы. Кстати, так физики и поступают. А утверждение, что масса и энергия – это разные характеристики вещества, было справедливо в механике Ньютона, а в механике Эйнштейна само соотношение $E = mc^2$ говорит о тождественности этих двух величин – массы и энергии. Можно, конечно, сказать, что соотношение между массой и энергией не означает их тождественности. Но это все равно, что сказать, глядя на равенство 2 = 2: это не тождество, а соотношение между разными двойками, потому что справа стоит правая двойка, а слева – левая.)

Соотношение (1) обычно выводится из уравнения движения тела в эйнштейновской механике, но этот вывод достаточно труден для ученика средней школы. Поэтому имеет смысл попытаться найти простой вывод этой формулы.

Сам Эйнштейн, сформулировав в 1905 году основы теории относительности в статье «К электродинамике движущихся тел», затем вернулся к вопросу о соотношении между массой и энергией. В том же 1905 году он опубликовал короткую заметку «Зависит ли инерция тела от содержащейся в нем энергии?». В этой статье он дал вывод соотношения $E = mc^2$, который опирает-

Иллюстрация В.Власова

ся не на уравнение движения, а, как и приведенный ниже вывод, на эффект Доплера. Но этот вывод тоже довольно сложный.

Вывод формулы $E = mc^2$, который мы хотим вам предложить, не основан на уравнении движения и, кроме того, является достаточно простым, так что школьники старших классов могут его одолеть – для этого почти не потребуется знаний, выходящих за пределы школьной программы. На всякий случай мы приведем все сведения, которые нам понадобятся. Это сведения об эффекте Доплера и о фотоне – частице электромагнитного поля. Но предварительно оговорим одно условие, которое будем считать выполненным и на которое будем опираться при выводе.

Условие малости скоростей

Мы будем предполагать, что тело массой m, с которым мы будем иметь дело, либо покоится (и тогда, очевидно, скорость его равна нулю), либо, если оно движется, то со скоростью v, малой по сравнению со скоростью света c. Иными словами, мы будем предполагать, что отношение v/c скорости тела к скорости света есть величина малая по сравнению с единицей. Однако мы будем считать отношение v/c хотя и малой, но не пренебрежимо малой величиной – будем учитывать величины, пропорциональные первой степени отношения v/c, но будем пренебрегать вторыми и более высокими степенями этого отношения. Например, если при выводе нам придется иметь дело с выражением $1 - v^2/c^2$, мы будем пренебрегать величиной v^2/c^2 по сравнению с единицей:

$$1 - \frac{v^2}{c^2} \approx 1, \quad \frac{v^2}{c^2} \ll \frac{v}{c} \ll 1. \qquad (2)$$

В этом приближении получаются соотношения, которые на первый взгляд могут показаться странными, хотя ничего странного в них нет, надо только помнить, что соотношения эти не являются точными равенствами, а справедливы с точностью до величины v/c включительно, величинами же порядка v^2/c^2 мы пренебрегаем. В таком предположении справедливо, например, следующее приближенное равенство:

$$\frac{1}{1 - \frac{v}{c}} \approx 1 + \frac{v}{c}, \quad \frac{v^2}{c^2} \ll 1. \qquad (3)$$

Действительно, умножим обе части этого приближенного равенства на $1 - v/c$. Мы получим

$$1 \approx 1 - \frac{v^2}{c^2},$$

т.е. приближенное равенство (2). Поскольку мы считаем, что величина v^2/c^2 пренебрежимо мала в сравнении с единицей, мы видим, что в приближении $v^2/c^2 \ll 1$ равенство (3) справедливо.

Аналогично, нетрудно доказать в том же приближении равенство

$$\frac{1}{1 + \frac{v}{c}} \approx 1 - \frac{v}{c}. \qquad (4)$$

Чем меньше величина v/c, тем точнее эти приближенные равенства.

Мы не случайно будем использовать приближение малых скоростей. Нередко приходится слышать и читать, что теория относительности должна применяться в случае больших скоростей, когда отношение скорости тела к скорости света имеет порядок единицы, при малых же скоростях применима механика Ньютона. На самом деле теория относительности не сводится к механике Ньютона даже в случае сколь угодно малых скоростей. Мы это увидим, доказав соотношение $E = mc^2$ для покоящегося или очень медленно движущегося тела. Механика Ньютона такого соотношения дать не может.

Оговорив малость скоростей по сравнению со скоростью света, перейдем к изложению некоторых сведений, которые понадобятся нам при выводе формулы $E = mc^2$.

Эффект Доплера

Мы начнем с явления, которое называется по имени австрийского физика Кристиана Доплера, открывшего это явление в середине позапрошлого века.

Рассмотрим источник света, причем будем считать, что источник движется вдоль оси x со скоростью v. Предположим для простоты, что в момент времени $t = 0$ источник проходит через начало координат, т.е. через точку $x = 0$. Тогда положение источника в любой момент времени t определяется формулой

$$x = vt.$$

Предположим, что далеко впереди излучающего тела на оси x помещен наблюдатель, который следит за движением тела. Ясно, что при таком расположении тело приближается к наблюдателю. Допустим, что наблюдатель взглянул на тело в момент времени t. В этот момент до наблюдателя доходит световой сигнал, излученный телом в более ранний момент времени t'. Очевидно, момент излучения должен предшествовать моменту приема, т.е. должно быть $t' < t$.

Определим связь между t' и t. В момент излучения t' тело находится в точке $x' = vt'$, а наблюдатель пусть находится в точке $x = L$. Тогда расстояние от точки излучения до точки приема равно $L - vt'$, а время, за которое свет пройдет такое расстояние, равно $(L - vt')/c$. Зная это, мы легко можем записать уравнение, связывающее t' и t:

$$t = t' + \frac{L - vt'}{c}.$$

Отсюда

$$t' = \frac{t - L/c}{1 - v/c}. \qquad (5)$$

Таким образом, наблюдатель, глядя на движущееся тело в момент времени t, видит это тело там, где оно находилось в более ранний момент времени t', причем связь между t и t' определяется формулой (5).

Предположим теперь, что яркость источника периодически меняется по закону косинуса. Обозначим яркость буквой I. Очевидно, I есть функция времени, и мы можем, учитывая это обстоятельство, записать

$$I(t) = I_0 + I_1 \cos\omega t \quad (I_0 > I_1 > 0),$$

где I_0 и I_1 – некоторые постоянные, не зависящие от времени. Неравенство в скобках необходимо потому, что яркость не может быть отрицательной величиной. Но для нас в данном случае это обстоятельство не имеет никакого значения, поскольку в дальнейшем нас будет интересовать только переменная составляющая – второе слагаемое в формуле для $I(t)$.

Пусть наблюдатель смотрит на тело в момент времени t. Как уже было сказано, он видит тело в состоянии, соответствующем более раннему моменту времени t'. Переменная часть яркости в момент t' пропорциональна $\cos\omega t'$. С учетом соотношения (5) получаем

$$\cos\omega t' = \cos\omega\frac{t - L/c}{1 - v/c} = \cos\left(\frac{\omega t}{1 - v/c} - \omega\frac{L}{c}\frac{1}{1 - v/c}\right).$$

Коэффициент при t под знаком косинуса дает частоту изменения яркости, как ее видит наблюдатель. Обозначим эту частоту через ω', тогда

$$\omega' = \frac{\omega}{1 - v/c}. \qquad (6)$$

Если источник покоится ($v = 0$), то $\omega' = \omega$, т.е. наблюдатель воспринимает ту же самую частоту, что излучается источником. Если же источник движется к наблюдателю (в этом случае наблюдатель принимает излучение, направленное вперед по движению источника), то принимаемая частота ω' отличается от излучаемой частоты ω, причем принимаемая частота больше излучаемой.

Случай, когда источник движется от наблюдателя, можно получить, изменив знак перед v в соотношении (6). Видно, что тогда принимаемая частота оказывается меньше излучаемой.

Можно сказать, что вперед излучаются большие частоты, а назад – малые (если источник удаляется от наблюдателя, то наблюдатель, очевидно, принимает излучение, испущенное назад).

В несовпадении частоты колебаний источника и частоты, принимаемой наблюдателем, и состоит эффект Доплера. Если наблюдатель находится в системе координат, в которой источник покоится, то излучаемая и принимаемая частоты совпадают. Если же наблюдатель находится в системе координат, в которой источник движется со скоростью v, то связь излучаемой и принимаемой частот определяется формулой (6). При этом мы предполагаем, что наблюдатель всегда покоится.

Как видно, связь между излучаемой и принимаемой частотами определяется скоростью v относительного движения источника и наблюдателя. В этом смысле безразлично, кто движется – источник приближается к наблюдателю или наблюдатель к источнику. Но нам в дальнейшем удобнее будет считать, что наблюдатель покоится.

Строго говоря, в разных системах координат время течет по-разному. Изменение хода времени также сказывается на величине наблюдаемой частоты. Если, например, частота колебаний маятника в системе координат, где он покоится, равна ω, то в системе координат, где он движется со скоростью v, частота равна $\omega\sqrt{1 - v^2/c^2}$. К такому результату приводит теория относительности. Но поскольку мы с самого начала условились пренебрегать величиной v^2/c^2 по сравнению с единицей, то изменение хода времени для нашего случая (движение с малой скоростью) пренебрежимо мало.

Таким образом, наблюдение за движущимся телом имеет свои особенности. Наблюдатель видит тело не там, где оно находится (пока сигнал идет к наблюдателю, тело успевает переместиться), и принимает сигнал, частота которого ω' отличается от излучаемой частоты ω.

Выпишем теперь окончательные формулы, которые понадобятся нам в дальнейшем. Если движущийся источник излучает вперед по направлению движения, то частота ω', принятая наблюдателем, связана с частотой источника ω соотношением

$$\omega' = \frac{\omega}{1 - v/c} = \omega\left(1 + \frac{v}{c}\right), \quad \frac{v}{c} \ll 1. \qquad (7)$$

Для излучения назад имеем

$$\omega' = \frac{\omega}{1 + v/c} = \omega\left(1 - \frac{v}{c}\right), \quad \frac{v}{c} \ll 1. \qquad (8)$$

Энергия и импульс фотона

Современное представление о частице электромагнитного поля – фотоне, как и формула $E = mc^2$, которую мы собираемся доказать, принадлежит Эйнштейну и было высказано им в том же 1905 году, в котором он доказал эквивалентность массы и энергии. Согласно Эйнштейну, электромагнитные и, в частности, световые волны состоят из отдельных частиц – фотонов. Если рассматривается свет некоторой определенной частоты ω, то каждый фотон имеет энергию E, пропорциональную этой частоте:

$$E = \hbar\omega.$$

Коэффициент пропорциональности $\hbar$ называется постоянной Планка. По порядку величины постоянная Планка равна 10^{-34}, размерность ее Дж $\cdot$ с. Мы здесь не выписываем точного значения постоянной Планка, оно нам не понадобится.

Иногда вместо слова «фотон» говорят «квант электромагнитного поля».

Фотон имеет не только энергию, но и импульс, равный

$$p = \frac{\hbar\omega}{c} = \frac{E}{c}.$$

Этих сведений нам будет достаточно для дальнейшего.

Вывод формулы $E = mc^2$

Рассмотрим покоящееся тело массой m. Предположим, что это тело одновременно излучает два фотона в прямо противоположных направлениях. Оба фотона имеют одинаковые частоты ω и, значит, одинаковые энергии $E = \hbar\omega$, а также равные по величине и противоположные по направлению импульсы. В результате излучения тело теряет энергию

$$\Delta E = 2\hbar\omega . \qquad (9)$$

Потеря импульса равна нулю, и, следовательно, тело после излучения двух квантов остается в покое.

Этот мысленный опыт представлен на рисунке 1. Тело изображено кружком, а фотоны – волнистыми линиями. Один из фотонов излучается в положительном направлении оси x, другой – в отрицательном. Около волнистых линий приведены значения энергии и импульса соответствующих фотонов. Видно, что сумма излученных импульсов равна нулю.

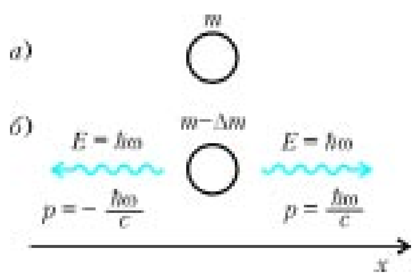

Рис.1. Картина двух фотонов в системе отсчета, в которой излучающее тело покоится: а) тело до излучения; б) после излучения

Рассмотрим теперь ту же картину с точки зрения наблюдателя, который движется по оси x влево (т.е. в отрицательном направлении оси x) с малой скоростью v. Такой наблюдатель увидит уже не покоящееся тело, а тело, движущееся с малой скоростью вправо. Величина этой скорости равна v, а направлена скорость в положительном направлении оси x. Тогда частота, излучаемая вправо, будет определяться формулой (7) для случая излучения вперед:

$$\omega' = \omega\left(1 + \frac{v}{c}\right).$$

Мы частоту фотона, излучаемого движущимся телом вперед по направлению движения, обозначили через ω', чтобы не спутать эту частоту с частотой ω излучаемого фотона в той системе координат, где тело покоится. Соответственно, частота фотона, излучаемого движущимся телом влево, определяется формулой (8) для случая излучения назад:

$$\omega'' = \omega\left(1 - \frac{v}{c}\right).$$

Чтобы не перепутать излучение вперед и излучение назад, мы будем величины, относящиеся к излучению назад, обозначать двумя штрихами.

Поскольку, из-за эффекта Доплера, частоты излучения вперед и назад различны, энергия и импульс у излученных квантов также будут различаться. Квант, излученный вперед, будет иметь энергию

$$E' = \hbar\omega' = \hbar\omega\left(1 + \frac{v}{c}\right)$$

и импульс

$$p' = \frac{\hbar\omega'}{c} = \frac{\hbar\omega}{c}\left(1 + \frac{v}{c}\right).$$

Квант, излученный назад, будет иметь энергию

$$E'' = \hbar\omega'' = \hbar\omega\left(1 - \frac{v}{c}\right)$$

и импульс

$$p'' = \frac{\hbar\omega''}{c} = \frac{\hbar\omega}{c}\left(1 - \frac{v}{c}\right).$$

При этом импульсы квантов направлены в противоположные стороны.

Картина процесса излучения, каким его видит движущийся наблюдатель, изображена на рисунке 2.

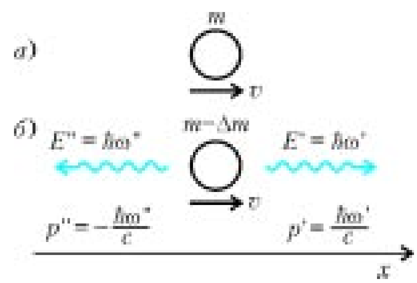

Рис.2. Картина двух фотонов в системе отсчета, где скорость излучающего тела равна v: а) тело до излучения; б) после излучения

Важно здесь подчеркнуть, что на рисунках 1 и 2 изображен один и тот же процесс, но с точки зрения разных наблюдателей. Первый рисунок относится к случаю, когда наблюдатель покоится относительно излучающего тела, а второй – когда наблюдатель движется.

Подсчитаем баланс энергии и импульса для второго случая. Потеря энергии в системе координат, где излучатель имеет скорость v, равна

$$\Delta E' = E' + E'' = \hbar\omega\left(1 + \frac{v}{c}\right) + \hbar\omega\left(1 - \frac{v}{c}\right) = 2\hbar\omega = \Delta E ,$$

т.е. она такая же, как и в системе, где излучатель покоится (см. формулу (9)). Но потеря импульса в системе, где излучатель движется, не равна нулю, в отличие от системы покоя:

$$\Delta p' = p' - p'' = \frac{\hbar\omega}{c}\left(1 + \frac{v}{c}\right) - \frac{\hbar\omega}{c}\left(1 - \frac{v}{c}\right) =$$

$$= \frac{2\hbar\omega}{c}\frac{v}{c} = \frac{\Delta E}{c^2} v . \qquad (10)$$

Движущийся излучатель теряет импульс $\Delta E v / c^2$ и, следовательно, должен, казалось бы, тормозиться, уменьшать свою скорость. Но в системе покоя излучение симметрично, излучатель не меняет скорости. Значит, скорость излучателя не может измениться и в той системе, где он движется. А если скорость тела не меняется, то как оно может потерять импульс?

Чтобы ответить на этот вопрос, вспомним, как записывается импульс тела массой m:

$$p = mv$$

– импульс равен произведению массы тела на его скорость. Если скорость тела не меняется , то его импульс может измениться только за счет изменения массы:

$$\Delta p = \Delta m v .$$

Здесь Δp – изменение импульса тела при неизменной скорости, Δm – изменение его массы.

Это выражение для потери импульса надо приравнять к выражению (10), которое связывает потерю импульса с потерей энергии. Мы получим формулу

$$\frac{\Delta E}{c^2} v = \Delta m v ,$$

или

$$\Delta E = \Delta m c^2 ,$$

которая означает, что изменение энергии тела влечет за собой пропорциональное изменение его массы. Отсюда легко получить соотношение между полной массой тела и полным запасом энергии:

$$E = mc^2 .$$

Открытие этой формулы явилось огромным шагом вперед в понимании природных явлений. Само по себе осознание эквивалентности массы и энергии есть великое достижение. Но полученная формула, помимо того, имеет широчайшее поле применения. Распад и слияние атомных ядер, рождение и распад частиц, превращения элементарных частиц одна в другую и множество других явлений требуют для своего объяснения учета формулы связи между массой и энергией.

В заключение – два домашних задания для любителей теории относительности.

1. Прочитайте статью А.Эйнштейна «Зависит ли инерция тела от содержащейся в нем энергии?» (см. с. 7).

2. Попробуйте самостоятельно вывести соотношение $\Delta m = \Delta E / c^2$ для случая системы отсчета, скорость которой v может быть не малой по сравнению со скоростью света c. *Указание*. Используйте точную формулу для импульса частицы:

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

и точную формулу для эффекта Доплера:

$$\omega' = \omega \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} ,$$

которая получается, если учесть различие в ходе времени в покоящейся и движущейся системах отсчета.

Зависит ли инерция тела от содержащейся в нем энергии?

А.ЭЙНШТЕЙН

РЕЗУЛЬТАТЫ ... ИССЛЕДОВАНИЯ ПРИВОДЯТ НАС к очень интересному следствию, вывод которого будет дан в этой статье.

В ... исследовании я исходил, кроме уравнений Максвелла – Герца для пустоты и формулы Максвелла для электромагнитной энергии пространства, еще из следующего принципа.

Законы, по которым изменяются состояния физических систем, не зависят от того, к какой из двух координатных систем, движущихся равномерно и прямолинейно относительно друг друга, отнесены эти изменения состояния (принцип относительности). Исходя из этого, я, в частности, пришел к следующему результату ...

Пусть система плоских волн света, отнесенная к координатной системе (x, y, z), обладает энергией l и пусть направление луча (нормаль к фронту волны) образует угол φ с осью x системы. Если ввести новую координатную систему (ξ, η, ζ), движущуюся равномерно и прямолинейно относительно системы (x, y, z), и если начало координат первой системы движется со скоростью v вдоль оси x, то упомянутая энергия света, измеренная в системе (ξ, η, ζ), будет

$$l^* = l \frac{1 - \frac{v}{V}\cos\varphi}{\sqrt{1 - (v/V)^2}} ,$$

где V – скорость света. В дальнейшем мы воспользуемся этим результатом.

Пусть в системе (x, y, z) находится покоящееся тело, энергия которого, отнесенная к системе (x, y, z), равна