полюсами. А последнее выражение для $W(I,d)$ является эмпирически полученной нами формулой (основанной на опыте) для определения магнитной энергии данного электромагнита.

Теперь приступим к определению магнитной индукции поля. Разделив выражение для $W(I,d)$ на объем воздушного зазора между полюсами электромагнита, получим объемную плотность магнитной энергии (всеми нежелательными краевыми эффектами мы будем пренебрегать):

$$w(I,d) = \frac{AK(d)}{Sd} I^2 ,$$

где S – площадь поперечного сечения полюса электромагнита. С другой стороны, объемная плотность магнитного поля прямо пропорциональна квадрату магнитной индукции B в данном месте пространства:

$$w(I,d) = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} ,$$

где μ – относительная магнитная проницаемость вещества, μ_0 – магнитная постоянная. Из сопоставления двух последних выражений следует, что магнитная индукция и сила тока связаны соотношением

$$B(I,d) = \sqrt{\frac{2\mu\mu_0 AK(d)}{Sd}}\, I .$$

Поскольку для данного электромагнита градуировка $K(d)$ уже установлена, можно графически построить семейство зависимости $B(I,d)$ (рис.4). Из полученных графиков магнитная индукция непосредственно определяется без измерения и без вычисления при разных значениях либо d, либо I. Таким образом, мы получили эмпирическую формулу и создали градуировочные кривые для определения индукции магнитного поля.

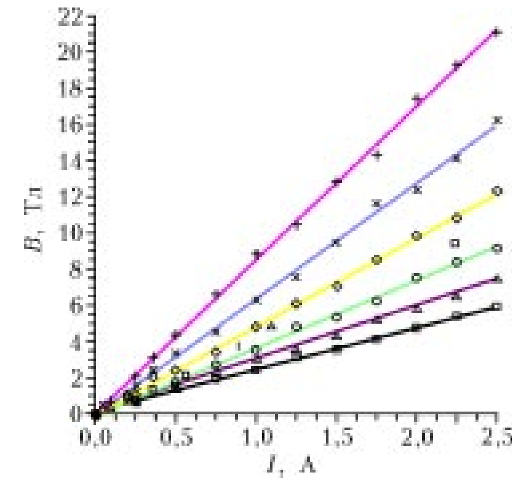

Рис.4. Зависимость магнитной индукции от силы тока при разных значениях межполюсного расстояния d

Принцип Торричелли и центробежная сила инерции

А.БУРОВ

В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ ПОЧЕМУ-ТО ОЧЕНЬ «БОЯТСЯ» СИЛЫ инерции. Как так – что это за сила, которая не хочет подчиняться третьему закону Ньютона? Тем не менее, каждому приходится сталкиваться с этой силой по многу раз на дню, и, вероятно, пришло время поговорить о некоторых ее «кажущихся» странностях.

Начнем с задачи.

Задача 1. *В горизонтальной плоскости на пружинке крутят камень с постоянной угловой скоростью* ω. *Найдите установившееся движение системы и исследуйте устойчивость этого движения, если длина пружинки в нерастянутом состоянии l, жесткость пружинки k, а масса камня m.*

Первое решение. В школе, вероятно, эту задачу стали бы решать так. Центростремительное ускорение камня равно $a = -\omega^2 r$, где r – длина пружинки в растянутом состоянии. Знак «минус» указывает на то, что r отсчитывается от неподвижной точки, а центростремительное ускорение направлено к этой точке. Далее, со стороны пружинки на камень действует сила упругости $F = -k(r-l)$, и радиус R установившегося движения (а им окажется равновесие относительно равномерно вращающейся с угловой скоростью ω системы отсчета) будет определяться из уравнения

$$-m\omega^2 r = -k(r-l) .$$

Отсюда легко находим значение радиуса:

$$R = \frac{kl}{k - m\omega^2} .$$

Видно, что при $\omega = 0$ система не вращается, и длина пружинки равна l. При возрастании ω, до разумных пределов, знаменатель в выражении для R начинает уменьшаться, а само R – увеличиваться, что и соответствует нашему повседневному опыту. При неразумно больших значениях ω закон Гука для силы упругости перестает выполняться, пружинка обрывается, а камень улетает – как правило, по касательной.

Относительно устойчивости найденного движения трудно сделать какие-либо определенные выводы.

Второе решение. Отважный, по крайней мере по отношению к центробежным силам инерции, человек стал бы решать эту задачу, возможно, так. Наблюдатель, равномерно вращающийся вместе с пружинкой с угловой скоростью ω, видит, что на камень действуют центробежная сила инерции $F_и = m\omega^2 r$ и упругая сила $F_у = -k(r-l)$, поэтому можно записать условие равновесия в виде

$$F_и + F_у = m\omega^2 r - k(r-l) = 0 ,$$

из которого получается то же самое значение радиуса R.

Более того, этот наблюдатель заметит, что как упругая сила, так и центробежная сила инерции – *потенциальны*, т.е.

существуют функции $U_и = U_и(r)$ и $U_у = U_у(r)$ такие, что

$$F_и = -\frac{dU_и}{dr} \text{ и } F_у = -\frac{dU_у}{dr}.$$

Функции, подобные $U_и$ и $U_у$, физики называют потенциалами. В данном случае назовем их *измененными потенциалами* – для того чтобы отличить от обычных потенциалов, остающихся даже тогда, когда исчезает вращение.

В силу того что потенциалы аддитивны, их можно и нужно складывать. У нас появился замечательный шанс воспользоваться принципом Торричелли, который в данной ситуации звучит так:

При устойчивом равновесии измененный потенциал $U = U_и(r) + U_у(r)$ достигает своего локального минимума.

В нашем случае

$$U_и(r) = -\frac{1}{2}m\omega^2 r^2, \quad U_у(r) = \frac{1}{2}k(r-l)^2.$$

Тогда уравнение относительного равновесия можно записать в виде

$$\frac{dU}{dr} = -m\omega^2 r + k(r-l) = 0.$$

Неудивительно, что оно отличается от предыдущего уравнения равновесия лишь знаками.

Ну, а для проверки условий устойчивости мы вычислим вторую производную измененного потенциала:

$$\frac{d^2U}{dr^2} = -m\omega^2 + k,$$

которая положительна при всех тех же «разумно-умеренных» значениях угловой скорости, о которых говорилось раньше.

Итак, согласно принципу Торричелли, найденное относительное равновесие устойчиво. Иными словами, второй метод решения позволяет узнать о движении больше, чем первый «школьный» метод.

Теперь обратимся к решению другой задачи – частного случая известной задачи Кеплера.

Задача 2. *Пусть N – светило, притягивающее некоторый камень с силой $F_N = -m\gamma/r^2$, где m – масса камня, r – его расстояние до светила, γ – положительная постоянная, равная произведению массы светила на постоянную ньютоновского тяготения. В предположении о том, что под действием ньютоновского тяготения камень совершает равномерное вращение вокруг светила с постоянной угловой скоростью ω в плоскости, проходящей через это светило, найдите радиус орбиты камня и исследуйте устойчивость его движения.*

Первое «решение». У нас уже имеется опыт написания измененных потенциалов. Потенциал центробежной силы инерции снова равен $U_и(r) = -\frac{1}{2}m\omega^2 r^2$, а потенциал силы притяжения имеет вид $U_N(r) = -\frac{m\gamma}{r}$. Для определения установившегося движения запишем измененный потенциал $U = U_и(r) + U_N(r)$, найдем его первую производную и приравняем ее к нулю:

$$\frac{dU}{dr} = -m\omega^2 r + \frac{m\gamma}{r^2} = 0.$$

Из этого уравнения получаем третий закон Кеплера:

$$\omega^2 r^3 = \gamma,$$

а из него – выражение для радиуса орбиты:

$$R = \left(\frac{\gamma}{\omega^2}\right)^{1/3}.$$

Что ж, неплохо. По крайней мере, радиус орбиты уже найден, и найден правильно.

Теперь с помощью принципа Торричелли разберемся с устойчивостью. Вторая производная потенциал имеет вид

$$\frac{d^2U}{dr^2} = -m\omega^2 - \frac{2m\gamma}{r^3},$$

и мы с удивлением обнаруживаем, что она *всегда* отрицательна. Получается, что либо не работает принцип Торричелли, чего не может быть, так как он проверен на многочисленных примерах, либо орбиты планет стали неустойчивы, о чем страшно даже подумать.

В чем же проблема? Оказывается, что это решение не совсем верное, и именно поэтому мы поставили в подзаголовке слово *решение* в кавычках. Ну, а какое же решение правильное?

Правильное решение. Дело в том, что мы не очень внимательно прочитали условие задачи и не почувствовали его отличия от предыдущего. В первой задаче пружинку с камнем *принудительно вращали* с постоянной угловой скоростью, в то время как во второй задаче камень *совершенно свободен* и в принципе может совершать движение с любой угловой скоростью. Такая замечательная свобода имеет далеко идущие последствия.

Так как физические свойства системы не меняются при повороте на произвольный угол вокруг притягивающего центра, то говорят, что имеет место симметрия, или что система инвариантна относительно поворотов. А это значит, что помимо закона сохранения энергии имеется еще один закон сохранения – кинетического момента, который в наших обозначениях принимает вид

$$mr^2\omega = p,$$

где p – постоянная. Таким образом, движение камня не такое уж и свободное – постоянная p зависит от того, как камень был запущен в начальный момент времени, и уж эта величина будет сохранятьсяв течение всего времени движения.

Так вот, оказывается, что при такой «свободной» постановке задачи потенциал центробежной силы инерции надо писать в виде

$$U_и(r) = \frac{1}{2}\frac{p^2}{mr^2}.$$

Тогда для самой силы получаем

$$F_и(r) = -\frac{dU_и(r)}{dr} = \frac{p^2}{mr^3},$$

а подстановка в это выражение значения p из закона сохранения кинетического момента после небольших преобразований дает уже привычное выражение для центробежной силы как функции от угловой скорости ω.

Итак, нами получено первое утешение – выражение для центробежной силы инерции найдено правильно, т.е. первая часть предыдущего «решения» все же верна, закон Кеплера остается в силе, и все не так уж плохо. Остается разобраться с устойчивостью.

Дать ответ на этот вопрос теперь, после того как найдено еще одно выражение для потенциала центробежной силы, не так уж трудно. Запишем с помощью этого выражения суммарный потенциал, причем, чтобы отличать его от измененного потенциала, мы не только обозначим его другой буквой – W, но и назовем *приведенным потенциалом*:

$$W = U_и(r) + U_N(r) = \frac{1}{2}\frac{p^2}{mr^2} - \frac{m\gamma}{r}.$$

Из равенства нулю его первой производной:

$$\frac{dW}{dr} = -\frac{p^2}{mr^3} + \frac{m\gamma}{r^2} = 0$$

мы немедленно найдем значение радиуса установившегося, в данном случае стационарного, движения:

$$R = \frac{p^2}{\gamma m^2},$$

которое, разумеется, тождественно найденному ранее значению.

Теперь для изучения устойчивости вычислим вторую производную функции W:

$$\frac{d^2W}{dr^2} = \frac{3p^2}{mr^4} - \frac{2m\gamma}{r^3}.$$

Но вычислить эту производную мало – надо в нее еще подставить только что найденное решение:

$$\frac{d^2W}{dr^2} = \frac{3p^2}{m\left(\frac{p^2}{\gamma m^2}\right)^4} - \frac{2m\gamma}{\left(\frac{p^2}{\gamma m^2}\right)^3} = \frac{\gamma^4 m^7}{p^6} > 0.$$

Это означает, что кеплеровская круговая орбита устойчива по радиусу, и Вселенной не грозит уничтожение (в рамках сделанных предположений) в смысле существенных изменений радиусов орбит.

Вместе с тем, в задаче Кеплера нет устойчивости «по углу». Иными словами, два спутника, запущенные из близких точек и с близкими скоростями, вообще говоря, разбегутся, т.е. удалятся друг от друга, хотя радиусы их орбит будут оставаться близкими друг другу все время.

Задача Кеплера идеально «приспособлена» для ответа на этот вопрос с помощью только элементарных средств. В самом деле, хорошо известно, что в этой задаче траекториями могут быть лишь конические сечения, т.е. эллипс, парабола или гипербола. Рассмотрим, наряду с найденной круговой орбитой, другую близкую орбиту. Нетрудно сообразить, что эта орбита окажется эллиптической. Но для эллиптической орбиты, выполняется соотношение $\omega^2 a^3 = \gamma$, где a – большая полуось эллипса (а в случае круговой орбиты – ее радиус). Ясно, что для наугад взятой эллиптической орбиты, близкой к рассматриваемой круговой, величина полуоси a не будет совпадать с радиусом круговой орбиты, да и орбитальная угловая скорость ω в общем случае будет слегка отличаться от угловой скорости при круговом движении. Вот эта разница в орбитальных угловых скоростях и определяет разбегание спутников по углу.

* * *

Какова же мораль из всего сказанного? Во-первых, силы инерции, в данном случае центробежные силы инерции, не так уж страшны, как может показаться на первый взгляд. Их потенциальный характер позволяет не только находить установившиеся движения, но и исследовать их устойчивость. Это, как мы видели, посильно школьнику. Единственное, что надо уметь, так это отличать те случаи, когда систему принудительно вращают с постоянной угловой скоростью, от случаев, когда она вращается совершенно свободно.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

Поляризованный шар – это просто

Е.РОМИШЕВСКИЙ, А.СТАСЕНКО

В современной физике есть глаголы «намагнитить» и «наэлектризовать» некое тело, т.е. сделать его источником длительно существующих магнитного и электрического полей. Вещества, у которых эти свойства проявляются наиболее ярко, называют ферромагнетиками и сегнетоэлектриками соответственно.

Мы собираемся рассмотреть структуру электрического поля поляризованного тела, имеющего наиболее совершенную форму – форму шара. Но прежде вспомним самые простые факты.

Возьмем две бесконечные параллельные пластины, имеющие одинаковые по величине, но противоположные по знаку заряды (рис.1,*а*). Пусть на единицу поверхности этих пластин приходятся заряды $\pm\sigma_0$ (поверхностная плотность зарядов). Как известно, в таком устройстве – конденсаторе – напряженность электрического поля равна $E_0 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$ (здесь ε_0 – электрическая постоянная), а вне пластин поле отсутствует, т.е. напряженность равна нулю. Этот факт можно трактовать и так: при пересечении левой пластины нормальная составляющая электрического поля увеличивается от нуля до значения $+\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$, а при переходе через правую пластину ее скачок вниз равен $-\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$. Иначе,

$$\Delta E_n = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}.$$

Расположим теперь между этими пластинами слой вещества, способного поляризоваться. Это значит, что под действием первоначального поля молекулы этого вещества либо повернутся в одном направлении (конечно, вдоль вектора $\vec{E}_0$), если они заранее представляли собой электрические диполи, либо «центры тяжести» их отрицательных и положительных зарядов раздвинутся под действием этого поля, либо произойдет и то и другое. Как бы то ни было, в результате на поверхности слоя вещества

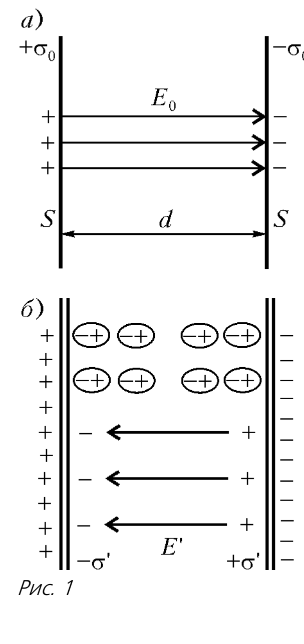

Рис. 1