Булава

С.ВАРЛАМОВ

Как известно, гипербола – это не только геометрическая кривая, задаваемая определенным соотношением между координатами, но и литературный прием, позволяющий ярко и образно передать эмоциональное отношение говорящего (пишущего) к тому, о чем он рассказывает. От применения этого приема, правда, часто страдает здравый смысл. Как здорово, согласитесь, в разговоре звучит фраза: «Сто лет не виделись!» А вот несколько классических примеров гипербол. У Гоголя «...редкая птица долетит до середины Днепра». Один из литературных героев О'Генри, пребывая в плохом настроении, так пнул ногой поросенка, что тот полетел, опережая звук собственного визга. А в одной из сказок могучий богатырь бросил вверх булаву, которая вернулась на место... только через 40 дней!

Последняя гипербола легла в основу задачи, предлагавшейся на одном из Турниров юных физиков. В этой задаче нужно было оценить параметры знаменитого броска и подобрать материал для изготовления подходящей булавы.

Сорок дней – это больше, чем лунный месяц, следовательно, сказочная булава вылетела за пределы земной атмосферы со скоростью, чуть меньшей второй космической, и за время полета удалялась от Земли на расстояние, большее чем расстояние от Луны до Земли. Космическая фаза полета булавы – самая простая часть задачи, но не самая интересная. А вот разгон булавы от нулевой до нужной скорости и ее полет в атмосфере представляют интерес и достойны детального рассмотрения.

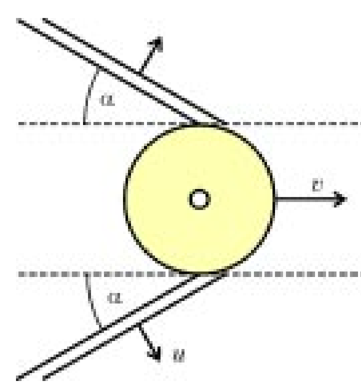
Современные ракеты в начальной фазе полета в плотной атмосфере движутся медленно, постепенно увеличивая скорость, и приобретают максимальную скорость уже вне атмосферы. В отличие от ракет, булава не имела реактивного двигателя. Разгон булавы от нулевой скорости происходил на отрезке пути, длина которого сравнима с ростом богатыря, поэтому максимальную скорость булава имела в тот момент, когда богатырь выпускал ее из рук, т.е. не очень высоко над поверхностью земли. В дальнейшем ее скорость на пути вверх только уменьшалась, но сохранила величину порядка 11 км/с на высоте 100 км (на этой высоте уже можно пренебречь сопротивлением атмосферы). Из какого же материала была изготовлена булава и каковы были ее размеры, если она преодолела сопротивление толщи земной атмосферы только за счет начальной кинетической энергии?

Рисунок В.Бабаева

Если бы не было сопротивления при движении в воздухе, то подъем на высоту 100 км соответствовал бы уменьшению скорости, которое легко оценить, считая, что на этом пути булава двигалась с постоянным ускорением. Согласно закону сохранения механической энергии,

$$MgH + \frac{1}{2}Mv_H^2 = \frac{1}{2}Mv_0^2 .$$

Из этого соотношения следует, что начальная скорость булавы v_0 должна была быть всего на 1% больше, чем скорость v_H на высоте $H = 100$ км. Иными словами, влиянием гравитации на пути булавы через атмосферу можно смело пренебречь. Наблюдательные читатели, конечно же, не раз видели, как в ночном небе сквозь атмосферу пролетают и сгорают метеориты. Скорости относительно воздуха у метеоритов – пришельцев из космоса – составляют десятки километров в секунду. Заранее предупредим читателей, что наши оценки скорости булавы тоже приведут к величине порядка 10 км/с. Такой скорости движения частиц воздуха (атомов и ионов кислорода и азота) при хаотическом движении соответствует температура около 10^5 градусов. Даже если принять температуру на порядок меньшей, т.е. 10^4 градусов, то все равно получается отнюдь не мало. Так что начальной тепловой энергией воздуха, очевидно, можно пренебречь.



Рассмотрим упрощенную механическую модель движения плотного предмета в воздушной среде. Предположим, что булава имеет форму шара радиусом R и массой M. Пусть булава не разрушается при пролете через атмосферу. Оценим потери кинетической энергии булавы и изменение импульса булавы, связанные с ее движением в воздухе.

Если за малое время Δt булава в воздухе прошла путь $b = v\Delta t$, то в движение пришел воздух, который до пролета булавы находился в объеме, примерно равном $\pi R^2 b$. Этот воздух не только приобрел кинетическую энергию, но и получил импульс, направленный в сторону движения булавы. Представим движение воздуха в виде кольцевой струи, срывающейся с булавы-шара. Такая струя характеризуется скоростью и углом, который скорость образует с направлением движения булавы. При дальнейшем движении эта струя создает звуковые волны в воздухе, и в конце концов вся полученная воздухом механическая и тепловая энергия переходит в энергию хаотического движения молекул воздуха (в тепловую энергию).

На рисунке показана эта самая кольцевая струя, срывающаяся с шара, но ее размеры, конечно, непропорционально велики. Движение воздуха можно описывать такой струей только в непосредственной близости от шара. Вдали от шара формируется звуковая волна, имеющая форму конуса Маха с углом $\beta \sim \arcsin \frac{v_{\text{звука}}}{v}$. Сжатие воздуха при набегании его на шар происходит по так называемой «ударной адиабате». Если рассматривать движение в системе отсчета, связанной с булавой, то давление сжатого воздуха вблизи поверхности булавы в середине набегающего на булаву потока равно динамическому давлению потока воздуха $\rho v^2/2$ (здесь ρ – плотность воздуха до пролета булавы). В кольцевой струе воздух (или то, во что он превратился после сжатия) имеет плотность, большую плотности воздуха, из которого была сформирована эта струя. Характер движения воздуха вблизи шара таков, что скорости его частиц имеют составляющие вдоль направления движения шара, сравнимые со скоростью шара. Исследование струи представляет собой отдельную интересную задачу, однако нам нужно оценить торможение булавы.

Итак, масса воздуха $\Delta m = \rho\pi R^2 v\Delta t$ пришла в движение со скоростью u, направление которой составляет с направлением скорости булавы угол $90° - \alpha$. Запишем закон сохранения импульса:

$$Mv_1 = Mv_2 + \rho\pi R^2 v\Delta t u \sin\alpha$$

и закон сохранения энергии:

$$M\frac{v_1^2}{2} = M\frac{v_2^2}{2} + \rho\pi R^2 v\Delta t\frac{u^2}{2} + Q,$$

где Q – это тепловая энергия, приобретенная сжатой и разогретой порцией воздуха, а также энергия излучения разогретого воздуха. При температурах порядка $10^4 - 10^5$ К излучение составляет малую долю, и им можно пренебречь. Скорости *хаотического* движения частиц в кольцевой струе вблизи шара имеют тот же порядок величины, что и скорость *направленного* движения частиц u. С учетом этого запишем

$$Q \sim \frac{5}{2}\rho\pi R^2 v\Delta t\frac{u^2}{2}.$$

Отсюда следует

$$M\frac{v_1^2}{2} = M\frac{v_2^2}{2} + \frac{7}{4}\rho\pi R^2 v\Delta t u^2.$$

Одновременное выполнение обоих законов сохранения обуславливает определенную связь между v, u и $\sin\alpha$:

$$u = \frac{4}{7}v\sin\alpha.$$

К сожалению, не так просто установить величину угла α. Нас интересует передача импульса воздуху. Охарактеризуем ее «усредненным» углом α, который, очевидно, меньше 90°, но сравним с 30 – 45°. Для оценки потери импульса шаром достаточно выбрать какую-нибудь конкретную величину угла α, например 30°. Тогда получаем

$$u = \frac{2}{7}v.$$

Воспользуемся законом сохранения импульса для этого соотношения между скоростями v и u и получим, что начальная v_1 и конечная v_2 скорости булавы связаны друг с другом так:

$$Mv_1 = Mv_2 + \frac{1}{7}\rho\pi R^2 v\Delta t v.$$

Иными словами, изменение скорости булавы описывается соотношением

$$v_2 - v_1 \approx -v\frac{\Delta m}{7M}.$$

Таким образом, скорость булавы при прохождении атмосферы меняется в соответствии с уравнением

$$dv = -v\frac{\Delta m}{7M}, \text{ или } v = v_0 e^{-\frac{m}{7M}}.$$

Конечная скорость на выходе из атмосферы зависит от полной массы воздуха m, приведенной в движение. (Заметим, что мы получили зависимость скорости булавы от двух масс, которая очень напоминает решение уравнения Мещерского для ракеты. Только там фигурируют начальная и конечная массы ракеты, а здесь – масса булавы и масса воздуха.) Эту полную массу можно легко оценить:

$$m \approx \pi R^2\frac{p_{\text{атм}}}{g},$$

тогда

$$v_{2\text{косм}} = v_0 e^{-\frac{\pi R^2 p_{\text{атм}}}{7Mg}}, \text{ или } v_0 = v_{2\text{косм}} e^{\frac{\pi R^2 p_{\text{атм}}}{7Mg}}.$$

Полученная формула позволяет оценить начальную скорость булавы в зависимости от ее радиуса и массы. Предположим, что булава сделана из обедненного урана и покрыта прочной термостойкой оболочкой. Уран обладает весьма высокой плотностью: $\rho = 19040$ кг/м^3. Выразим массу булавы через плотность и для начальной скорости получим

$$v_0 = v_{2\text{косм}} e^{\frac{3p_{\text{атм}}}{28\rho Rg}}.$$

Из этой формулы видно, что чем больше радиус булавы, тем меньше может быть ее начальная скорость. (С другой стороны, булава – это оружие, и для богатыря масса булавы не должна быть маленькой.) Пусть радиус урановой булавы равен 5 см. Тогда эта булава будет иметь массу порядка 10 кг и приобретет начальную скорость около 34 км/с, что примерно в три раза больше второй космической скорости. Это многовато даже для чемпионов мира по толканию ядра или метанию молота на дальность.

Оценим теперь силу F, с которой богатырь разгонял булаву, и давление, которое оказывалось на материал булавы. Пусть рост богатыря 2 метра. Это значит, что разгонный путь булавы L не превышает 3 метров. Поскольку

$$FL = M\frac{v_0^2}{2},$$

получим

$$F \approx 2\cdot 10^9 \text{ Н}.$$

Если распределить такую силу по площади поперечного сечения шара, то получится среднее давление

$$p \approx 2{,}5\cdot 10^{11} \text{ Па}.$$

Это давление значительно больше предела прочности урана $\sigma \approx 3\cdot 10^8$ Па. Так что, скорее всего, урановая булава во время броска просто просочилась бы между пальцами богатыря.

Вот так: начали мы с предположения, что булава пролетела через атмосферу и приобрела на выходе в космос примерно вторую космическую скорость, а выяснили, что разогнать ее до нужной скорости невозможно по причине недостаточной прочности. Зато получили оценки величин для скорости: примерно 30 км/с и массы: порядка 10 кг. Тела такой массы и с такими скоростями действительно попадают в атмосферу Земли, но только не с ее поверхности, а из космоса, – это крупные железные метеориты. При вертикальном падении через атмосферу такой метеорит у поверхности Земли будет иметь скорость около 5 км/с. Что будет после удара такого «молотка» по Земле – это уже другая история!