

Рис. 2

отрезка за точку B_2 – точка B_4 , так что $\frac{B_3B_2}{B_3B_1} = \frac{B_4B_2}{B_4B_1} = k$. Найдите угол между прямыми A_3B_3 и A_4B_4 .

Решение (С.Сафин). Построим параллелограмм $A_1A_2B_2X$ и проведем биссектрису A_1Y треугольника A_1XB_1 (рис.2).

Так как $\frac{B_1Y}{XY} = \frac{A_1B_1}{A_1X} = k$,

получим $B_3Y \parallel B_2X$ и

$B_3Y = kB_2X = A_1A_3$. Следовательно, $A_1A_3B_3Y$ – параллелограмм, т.е. $A_3B_3 \parallel A_1Y$. Аналогично, прямая A_4B_4 параллельна внешней биссектрисе угла $X A_1B_1$, и, значит, прямые A_3B_3 и A_4B_4 перпендикулярны.

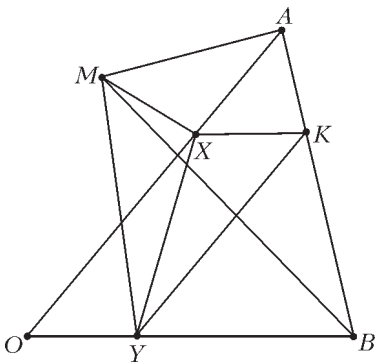


Рис. 3

3 (В.Протасов). На плоскости дан угол и точка K внутри него. Докажите, что найдется точка M , обладающая следующим свойством: если произвольная прямая, проходящая через K , пересекает стороны угла в точках A и B , то MK является биссектрисой угла AMB .

Решение (Р.Девятов). Пусть O – вершина угла (рис.3). Построим параллелограмм $KXOY$, две

стороны которого лежат на сторонах угла. Пусть M – точка, симметричная K относительно XU . Докажем, что M – искомая.

Пусть прямая, проходящая через K , пересекает прямые OX и OY в точках A и B . Заметим, что $MX = KX$, $MY = KY$, $\Delta MXU = \Delta KXU = \Delta OYU$, поэтому $MOYU$ – равнобедренная трапеция и $\angle MXO = \angle MYO$. Значит, $\angle MXA = 180^\circ - \angle MYO = \angle BYM$. Далее, треугольники AXK и KYB подобны, так как их стороны соответственно параллельны, поэтому $KX/XA = BY/YK$. Отсюда получаем

$$\frac{MX}{XA} = \frac{KX}{XA} = \frac{BY}{YK} = \frac{BY}{YM}.$$

Из этого равенства и из равенства углов MXA и BYM находим, что треугольники MXA и BYM подобны.

Теперь, пользуясь двумя доказанными подобиями, получаем

$$\frac{MA}{BM} = \frac{MX}{BY} = \frac{KX}{BY} = \frac{AK}{KB},$$

что и означает, что MK – биссектриса треугольника AMB .

4 (Б.Френкин). Треугольник разрезан на несколько (не менее двух) треугольников. Один из них равнобедренный (не равносторонний), а остальные равносторонние. Найдите углы исходного треугольника.

(Ответ: $90^\circ, 60^\circ, 30^\circ$.)

5 (Б.Френкин). а) Сколько осей симметрии может иметь клетчатый многоугольник, т.е. многоугольник, стороны которого лежат на линиях листа бумаги в клетку? (Укажите все возможные значения.)

б) Сколько осей симметрии может иметь клетчатый многогранник, т.е. многогранник, составленный из одинаковых кубиков, примыкающих друг к другу гранями?

(Ответ: а) 0, 1, 2 или 4; б) 0, 1, 2, 3, 4, 5 или 9.)

6 (А.Заславский). Найдите геометрическое место центров правильных треугольников, стороны которых проходят через 3 заданные точки A, B, C (т.е. на каждой стороне или ее продолжении лежит ровно одна из заданных точек).

(Ответ: окружность, проходящая через вершины равнобедренных треугольников с основаниями AB, BC, CA и углами 120° , построенных внутрь треугольника ABC .)

7 (Д.Шноль). Мальчик с папой стоят на берегу моря. Если мальчик встанет на цыпочки, его глаза будут на высоте 1 м от поверхности моря, а если сядет папе на плечи, то на высоте 2 м. Во сколько раз дальше он будет видеть во втором случае? (Найдите ответ с точностью до 0,1; радиус Земли считайте равным 6000 км.)

(Ответ: в $\sqrt{2}$ раз.)

8 (Л.Емельянов). Какие треугольники можно разрезать на три треугольника с равными радиусами описанных окружностей?

(Ответ: все, кроме равнобедренных неостроугольных.)

9 (Б.Френкин). Найдите геометрическое место вершин треугольников с заданными ортоцентром и центром описанной окружности.

(Указание: расстояние от вершины A треугольника ABC до его ортоцентра равно удвоенному расстоянию от центра описанной окружности до стороны BC .)

Публикацию подготовил А.Заславский

Международный турнир «Компьютерная физика»

Турнир «Компьютерная физика» – часть программы Международного интеллект-клуба «Глюон». Цель турнира – поддержка талантливой молодежи, проявившей интерес к фундаментальным наукам и новым информационным технологиям. Задача организаторов турнира – создание временных творческих коллективов для решения современных

научных проблем. В такие коллективы входят школьники, учителя, студенты, аспиранты, ученые.

Турнир проводится в виде интеллектуального соревнования между командами (по 5 человек в каждой) в два тура – заочный и очный.

XI Турнир «Компьютерная физика»

По итогам двух туров турнира абсолютным победителем стала команда ФМЛ 1580 при Московском государственном техническом университете (МГТУ) им. Н.Э.Баумана, получившая переходящий приз «Хрустальный глобус». Дипломами I степени были награждены команды ФМЛ 1580 при МГТУ и лица 1511 при Московском инженерно-физическом институте, сборная команда Удмуртии и сборная команда города Ижевска. Диплом II степени получила команда Классического лица 1 при РГУ (г.Ростов-на-Дону), а диплом III степени – команда МТЛ города Самары.

Заочный тур «Поверхностное натяжение»

Предлагалось на примере простой микроскопической модели изучить явление поверхностного натяжения и определить коэффициент поверхностного натяжения жидкости по заданному потенциалу межмолекулярного взаимодействия. Подробно о модели и конкретном задании можно прочитать в «Кванте» № 5 за 2006 год. Здесь же будет рассказано лишь о разборе этого задания.

Движение частиц в капле описывается уравнением Ньютона

$$m \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \sum_j \vec{F}_{ij} \left(\vec{r}_i - \vec{r}_j \right),$$

где $i = 1, \dots, N$ – номер атома, $\vec{r}_i = (x_i, y_i)$ – радиус-вектор i -й частицы, \vec{F}_{ij} – сила взаимодействия между частицами i и j , определяемая по потенциалу Леннарта–Джонса. При моделировании начальные значения модуля скорости частиц выбираются случайным образом из распределения Максвелла с некоторой температурой T , угловое распределение по скоростям задается изотропным. Полагается, что расстояние между частицами соответствует равновесному $r^* = \sqrt[6]{2r_0}$, а геометрическая форма капли – произвольная.

Начальная форма двумерной капли была выбрана в виде прямоугольника с соотношением сторон 4:1 и содержала число частиц $N = 160$ при $T = 15$ К. В результате моделирования оказывается, что некоторое количество атомов отрывается от капли (испаряется) и образует пар, находящийся в динамическом равновесии с жидкой фазой. Через некоторое время капля приобретает форму, близкую к шару. Такая форма соответствует минимальной величине поверхностной энергии.

При моделировании было показано, что изменение потенциальной энергии взаимодействующих частиц пропорционально площади поверхности капли (для двумерной капли в качестве площади поверхности выступает ее периметр).

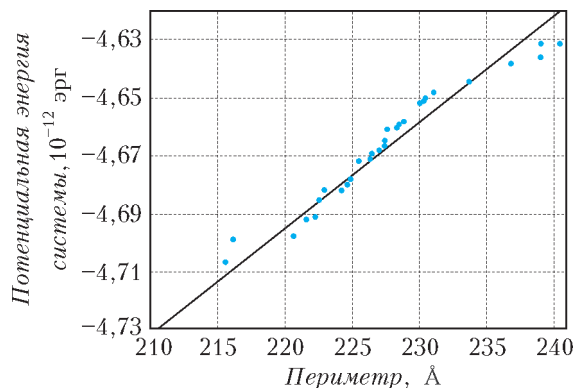


Рис. 1

Зависимость изменения потенциальной энергии от изменения площади поверхности представлена на рисунке 1. Величина коэффициента поверхностного натяжения определяется как тангенс угла наклона полученной прямой и составляет $3,33 \cdot 10^{-8}$ эрг/см при $T = 20$ К.

На рисунке 2 представлена зависимость коэффициента поверхностного натяжения при $T = 20$ К от числа частиц,

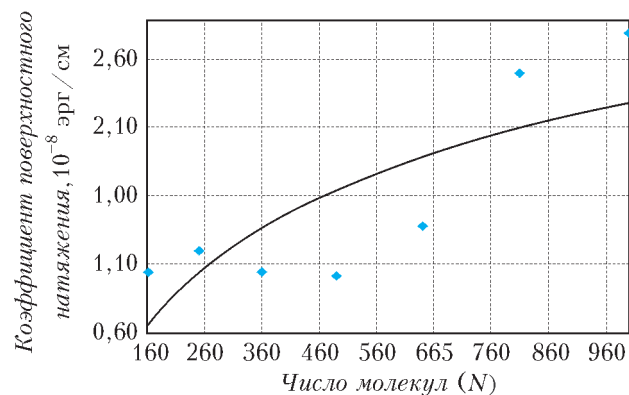


Рис. 2

образующих каплю. Как видно, с увеличением числа частиц коэффициент поверхностного натяжения плавно возрастает и приближается к значению, соответствующему макроскопически большому числу частиц.

Зависимость коэффициента поверхностного натяжения от температуры для капли, содержащей 160 частиц, приведена на рисунке 3. Полученная зависимость подтверждает

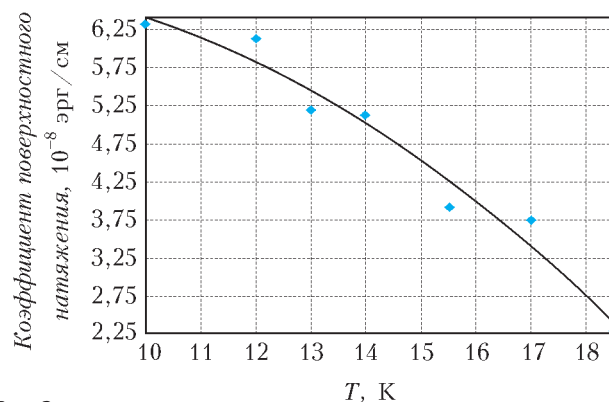


Рис. 3

известный экспериментальный факт убывания коэффициента поверхностного натяжения с увеличением температуры, что связано с увеличением среднего расстояния между атомами.

Решение представлено командой сборной Удмуртии в составе: Жуйков Богдан, Задумин Евгений, Лебедев Артем, Мозгунов Кирилл, Печерский Роман.

XII Турнир «Компьютерная физика»

Международный интеллект-клуб (МИК) «Глюон» приглашает региональные центры, гимназии и школы, работающие с одаренными детьми, принять участие в XII Турнире «Компьютерная физика» в январе – феврале 2007 года.

Заявки на участие присылайте по адресу: 115522 Москва, Пролетарский пр.,15/2, МИК «Глюон»

Телефон: (495)517-80-14, факс: (495) 396-82-27

E-mail: gluon@yandex.ru

Сайт: www.gluon.informika.ru

Заочный тур «Лазерная искра»

Создание лазерных источников электромагнитного излучения в начале 60-х годов прошлого века позволило получить интенсивности электромагнитного излучения в видимом диапазоне частот вплоть до $10^{10} - 10^{12}$ Вт/см². Такие значения на много порядков превышали мощности световых потоков, достижимые в долазерную эпоху. Как результат, в первой половине 60-х годов XX века был экспериментально обнаружен целый ряд новых физических эффектов, положивших начало бурному развитию новой области физики – нелинейной оптики. Одним из них был эффект пробоя газов излучением оптической частоты (лазерная искра), обнаруженный в 1963 году.

Явление пробоя газов внешними постоянными или переменными электрическими полями было известно давно и изучалось еще в начале прошлого века. И хотя физика развития электронной лавины в газах под действием внешнего электрического поля стала понятна еще в 20-х годах, экспериментальное наблюдение лазерной искры в поле излучения рубинового лазера вызвало сенсацию в научном мире.

Лавинообразное увеличение числа электронов в фокусе лазерного пучка происходит в результате ионизации атомов (молекул) газа электронами, которые набирают энергию в поле лазерного излучения. В случае если энергия электрона превышает потенциал ионизации I_i атома, то при столкновении электрона с атомом с некоторой вероятностью может произойти процесс ионизации, в результате которого образуется положительный ион и еще один электрон: $A + e \rightarrow A^{++} + 2e$. Вероятность этого процесса – в дальнейшем мы будем ее характеризовать константой скорости k_i – резко зависит от напряженности электрического поля волны. Кроме того, существуют и каналы гибели электронов: это, прежде всего, диффузионный уход электронов из фокального объема, а также процесс прилипания. (Под прилипанием понимают процесс рекомбинации электрона на нейтральный атом (молекулу) с образованием отрицательного иона. Атомы (молекулы), у которых существуют устойчивые связанные состояния отрицательных ионов, называются электроотрицательными. К их числу относятся, например, атомы и молекулы кислорода.) В дальнейшем процесс прилипания будем характеризовать константой скорости k_a . Значения этой константы, а также коэффициента диффузии электронов в первом приближении могут считаться постоянными и независимыми от интенсивности воздействующего излучения.

Для теоретического описания развития лавины в поле лазерного излучения необходимо составить уравнение баланса электронов, рождающихся в поле лазерного излучения и гибнущих в результате процессов рекомбинации, прилипания и диффузии. С учетом этих процессов уравнение для распределения концентрации электронов n в объеме сфокусированного лазерного пучка (в приближении сферически симметричной фокусировки) можно записать в виде

$$\frac{\partial n(r,t)}{\partial t} = D \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rn(r,t))}{\partial r^2} + v_i n - v_a n, \quad (*)$$

где D – коэффициент диффузии электронов, $v_i = Nk_i$ и $v_a = Nk_a$ – частоты ионизации и прилипания, k_i и k_a – введенные ранее константы скорости, N – концентрация атомов (молекул). Для решения уравнения (*) необходимо задать некоторое начальное распределение затравочных электронов, с которых начинается развитие электронной лавины в газе. В реальности они возникают за счет эффекта многофотонной ионизации атомов сильным лазерным полем, иони-



зации примесных микрочастиц, которые практически всегда присутствуют в газах, частиц космического фона излучения и других причин.

Задание

Разработайте алгоритм решения уравнения (*), описывающего развитие электронной лавины в поле лазерного импульса с интенсивностью P и длительностью τ . Считайте, что импульс имеет прямоугольную форму. Размер области фокусировки R_0 . Формально уравнение (*) описывает диффузию электронов в безграничном пространстве, однако при численном его интегрировании из физических соображений необходимо выбрать некоторый максимальный размер области счета $R_{\max} > R_0$.

1. Исследуйте зависимость пороговой интенсивности оптического излучением CO_2 лазера ($\lambda = 10,6$ мкм) в зависимости от давления окружающего газа. Распределение интенсивности излучения по радиусу таково: $P = P_0 \exp(-r^2/R_0^2)$.

2. Исследуйте зависимость пороговой интенсивности оптического пробоя в зависимости от размера пятна фокусировки.

3. Исследуйте зависимость пороговой интенсивности оптического пробоя в зависимости от длительности лазерного импульса.

Все исследования проведите для гелия (эффект прилипания отсутствует) и воздуха (смесь азота и кислорода, молекулы кислорода обладают свойством электроотрицательности). Под порогом пробоя будем понимать такую интенсивность излучения, при которой за время импульса в центре фокального пятна степень ионизации образующейся плазмы успевает возрасти до значения $\alpha = n/N \approx 0,01$. Исследования проведите в диапазоне $p = 0,001 - 1$ атм (температуру газа считать равной 300 К); радиус пятна фокусировки $R = 0,01 - 0,3$ см; длительность импульса $\tau = 10^{-9} - 10^{-6}$ с.

Используйте следующие зависимости и значения параметров, входящих в уравнение (*):

константа скорости прилипания электронов к молекуле кислорода $k_a = 10^{-13}$ см³/с;

константы скорости ионизации в воздухе $k_i = AN \exp(-B/E)$, $A = 4,6 \cdot 10^{-8}$ см³/с, $B = 1,37 \cdot 10^6$ см/В,

в гелии $k_i = AN \exp(-B/E)$, $A = 0,9 \cdot 10^{-8}$ см³/с, $B = 1,46 \times 10^7$ см/В;

коэффициент электронной диффузии $D = C/N$, $C = 3 \cdot 10^{22}$ 1/(см · с).

Публикацию подготовили
В.Альминдеров, А.Попов, О.Поповичева