отключения батарейки? Провод, которым намотаны катушки, имеет очень маленькое сопротивление.

А.Зильберман

Ф2071. На двух одинаковых легких пружинах жесткостью k, прикрепленных к потолку, висят одинаковые грузы массой M. На один из грузов аккуратно ставят грузик массой m, а после того, как колебания прекратятся, быстро переносят грузик на другой груз. Через какое время грузы поравняются? А через какое время скорости грузов впервые будут направлены в одну сторону?

А.Грузов

Ф2072. Корпус светоизлучающего диода отштампован из прозрачной пластмассы (рис.6). На одном его конце сформирована линза, излучающая область представляет кружок диаметром 2 мм. Оцените диаметр светлого пятна на экране, расположенном на оси излучения на расстоянии 20 см от диода. Отражениями света внутри пластмассового корпуса можно пренебречь.

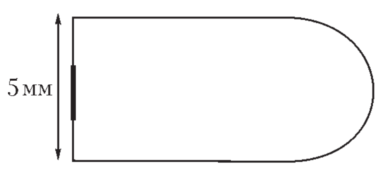


Рис. 6

А.Светов

Решения задач М2036 – М2040, Ф2048 – Ф2057

М2036. *Андрей, Боря и Саша поделили 20 монет так, что не все монеты достались одному из них. После этого каждую минуту один из ребят отдает по одной монете двум другим. Через некоторое время у Андрея, Бори и Саши оказалось a, b и c монет соответственно. Найдите количество возможных троек (a, b, c).*

Ответ: 76.

Пусть в какой-то момент тройка имела вид (x, y, z) (т.е. у Андрея, Бори и Саши было x, y и $z = 20 - x - y$ монет соответственно). Среди чисел x, y, z не более одного нуля, так как после каждой операции хотя бы у двух мальчиков есть монеты. Числа x, y и z не могут давать три различных остатка при делении на 3, иначе сумма $x + y + z$ делилась бы на 3. Значит, среди чисел x, y, z два числа дают равные остатки при делении на 3; пусть для определенности это первые два числа. Будем называть тройки, удовлетворяющие этому условию, *хорошими*. После выполнения операции хорошая тройка (x, y, z) переходит в одну из троек $(x - 2, y + 1, z + 1)$, $(x + 1, y - 2, z + 1)$, $(x + 1, y + 1, z - 2)$, каждая из которых является хорошей. Нетрудно посчитать количество хороших троек (x, y, z): при $x = 3k$ $y = 3l$, $0 < k + l \le 6$, – 27 вариантов, при $x = 3k + 1$ $y = 3l + 1$, $0 \le k + l \le 6$, – 28 вариантов, при $x = 3k + 2$ $y = 3l + 2$, $0 \le k + l \le 5$, – 21 вариант; всего 76 троек. Остается показать, что каждая из 76 хороших троек может быть получена из любой другой.

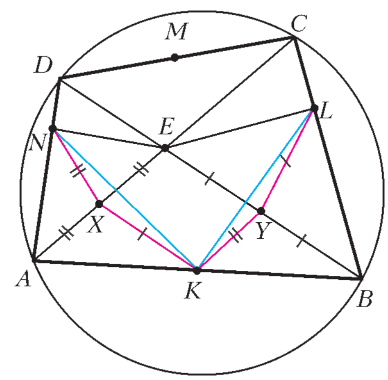
Если $x + y > 2$, то с хорошей тройкой (x, y, z) можно сделать одну из операций $(x, y, z) \to (x - 2, y + 1, z + 1)$ и $(x, y, z) \to (x + 1, y - 2, z + 1)$; при этом сумма $x + y$ уменьшается. Значит, за конечное число операций мы можем прийти к хорошей тройке (x', y', z'), в которой $x' + y' \le 2$, т.е. к тройке (1, 1, 18).

Но от тройки (1, 1, 18) мы можем прийти к произвольной хорошей тройке, так как операция «обратима». Действительно, переход от тройки $(x - 2, y + 1, z + 1)$ к тройке (x, y, z) можно произвести за две операции: $(x - 2, y + 1, z + 1) \to (x - 1, y - 1, z + 2) \to (x, y, z)$, если $y > 0$, или $(x - 2, y + 1, z + 1) \to (x - 1, y + 2, z - 1) \to (x, y, z)$, если $y = 0$.

Итак, из произвольной хорошей тройки мы можем прийти к тройке (1, 1, 18), а из нее – к любой другой хорошей тройке.

П.Кожевников

М2037. *Диагонали вписанного четырехугольника ABCD пересекаются в точке E; точки K и M – середины сторон AB и CD; L и N – проекции точки E на стороны BC и AD. Докажите, что прямые KM и LN перпендикулярны.*



Пусть X и Y – середины отрезков AE и BE (см. рисунок). Из прямоугольного треугольника AEN имеем $XN = AE/2$, отсюда $XN = YK$. Аналогично, $YL = XK$. Далее,

$$\angle KXN = \angle KXE + \angle EXN = \angle BEC + 2\angle CAD =$$
$$= \angle AED + 2\angle CBD = \angle KYE + \angle EYL = \angle KYL.$$

Получаем равенство треугольников KXN и KYL, откуда $KN = KL$.

Аналогично доказываем, что $MN = ML$.

Треугольники KML и KMN равны по трем сторонам, значит, точки L и N симметричны относительно прямой KM, откуда $KM \perp LN$.

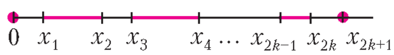
П.Кожевников

М2038. *Фома и Ерема делят кучу из кусков сыра. Сперва Фома, если хочет, выбирает один кусок и режет его на два. Затем он раскладывает сыр на две тарелки. После этого Ерема выбирает одну тарелку, и они делят сыр на ней, беря себе по очереди по куску; начинает Ерема. Точно так же они делят сыр со второй тарелки, только первым начинает Фома. Докажите, что Фома всегда может действовать так, чтобы получить не менее половины сыра (по весу).*

Отметим вначале следующее утверждение для дележа на одной тарелке. Пусть на тарелке $2k$ или $2k - 1$ кусков сыра весом $x_{2k} \ge x_{2k-1} \ge \ldots \ge x_1$ (если кусков $2k - 1$, то полагаем $x_1 = 0$). Если двое делят сыр на ней, беря куски по очереди, то первый может обеспечить себе суммарный вес не менее $x_{2k} + x_{2k-2} + \ldots + x_2$, а второй – не менее $x_{2k-1} + x_{2k-3} + \ldots + x_1$.

И первый, и второй могут добиться желаемого «жадным» алгоритмом, беря каждым ходом наибольший из оставшихся кусков.

Перейдем к решению задачи. Пусть в куче, которую делят Фома и Ерема, $2k+1$ кусков сыра весом $x_{2k+1} \ge x_{2k} \ge \ldots \ge x_1$ (если кусков $2k$, то полагаем $x_1 = 0$). Непересекающиеся отрезки длиной $x_{2k} - x_{2k-1}, x_{2k-2} - x_{2k-3}, \ldots, x_2 - x_1$ помещаются на отрезке длиной x_{2k+1} (см. рисунок), поэтому кусок весом x_{2k+1} Фома может разделить на два куска весом a и весом b с разностью весов



$$a - b = (x_{2k} - x_{2k-1}) + (x_{2k-2} - x_{2k-3}) + \ldots + (x_2 - x_1),$$

положить эти два куска на первую тарелку, а остальные куски – на вторую.

Если Ерема выбирает первую тарелку, то в результате дележа на двух тарелках Фома получает (действуя «жадным» алгоритмом) не менее $b + x_{2k} + x_{2k-2} + \ldots$ $\ldots + x_2$, что равно $a + x_{2k-1} + x_{2k-3} + \ldots + x_1$, т. е. составляет половину всего сыра. Если же Ерема выбирает вторую тарелку, то Фома получает не менее $a + x_{2k-1} + x_{2k-3} + \ldots + x_1$.

П.Кожевников

М2039. *Докажите, что для каждого натурального $n > 1$ найдется натуральное z, не представимое в виде $x^n - y!$, где x и y – натуральные.*

Утверждение этой задачи можно существенно усилить: мы докажем, что существует бесконечно много натуральных чисел z, не представимых в виде $x^n - y!$ ни для каких натуральных x, y и $n > 2$ (идея такого усиления содержится в решениях школьников Горемыкиной Анны из Долгопрудного и Нижибицкого Евгения из Краснодара).

Положим $z = 36t + 2$, где $t = 4k^2$, $k = 7u + 1$, $u \in \mathbf{N}$.

При $y = 1$ простой множитель 3 входит в разложение числа $z + y!$ ровно в первой степени, поэтому $z + y!$ не может быть точной степенью.

При $y \ge 4$ простой множитель 2 входит в разложение числа $z + y!$ ровно в первой степени, поэтому $z + y!$ не может быть точной степенью.

Если $y = 2$, то $z + y! = 36t + 4 = 4(36k^2 + 1)$ не является точным квадратом (иначе $36k^2 + 1 = (6k)^2 + 1$ – точный квадрат) и не является точной степенью $n \ge 3$, так как простой множитель 2 входит в разложение $z + y!$ ровно во второй степени.

Если $y = 3$, то $z + y! = 36t + 8 = 8(18k^2 + 1)$ не является точным кубом (иначе $18k^2 + 1 = 18(7u+1)^2 + 1$ – точный куб, дающий остаток 5 при делении на 7 – противоречие) и не является точной степенью $n \ge 2$, $n \ne 3$, так как простой множитель 2 входит в разложение $z + y!$ ровно в третьей степени.

В.Сендеров

М2040. *Положительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_k$ удовлетворяют неравенствам*

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2 < \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_k}{2},$$

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k < \frac{x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_k^3}{2}.$$

а) Докажите, что $k > 50$.

б) Укажите пример таких чисел для какого-нибудь k.

в) Найдите наименьшее k, для которого такой пример возможен.*

Утверждение пункта а) следует из пункта в).

б) Возьмем $k = 2501$, $x_1 = 10$, $x_2 = x_3 = \ldots = x_{2501} = 0{,}1$. Тогда $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2 = 100 + 25 = 125$, $x_1 + x_2 + \ldots$ $\ldots + x_{2501} = 10 + 250 = 260$, $x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_k^3 > 1000$, и все неравенства выполнены.

в) **Ответ:** 516.

1. Пусть для некоторого k такие числа $x_1, \ldots, x_k$ существуют. Докажем, что тогда существует и набор вида $x_1 = x_2 = \ldots = x_{k-1} = a < \frac{1}{4}$, $x_k = b > \sqrt{2}$, также удовлетворяющий условию.

Перепишем наши неравенства в виде

$$\sum_{i=1}^{k} (4x_i - 1)^2 < k, \quad \sum_{i=1}^{k} \left(2x_i - x_i^3\right) < 0.$$

Пусть $q_i = (4x_i - 1)^2$. Тогда $x_i = \frac{-\sqrt{q_i} + 1}{4}$, если $x_i \le \frac{1}{4}$; в противном случае $x_i = \frac{\sqrt{q_i} + 1}{4}$. Без ограничения общности можно считать, что $x_1, \ldots, x_d \le \frac{1}{4}$, $x_{d+1}, \ldots, x_k > \frac{1}{4}$. Тогда

$$2x_i - x_i^3 = \frac{1}{64}\left(31 - 3q_i \mp \left(29q_i^{1/2} - 3q_i^{3/2}\right)\right),$$

и наши неравенства запишутся в виде

$$\sum_{i=1}^{k} q_i < k, \quad \sum_{i=1}^{d} \left(31 - 3q_i - 29q_i^{1/2} + 3q_i^{3/2}\right) + \\ + \sum_{i=d+1}^{k} \left(31 - 3q_i + 29q_i^{1/2} - 3q_i^{3/2}\right) < 0. \quad (1)$$

Функция $f_2(x) = 31 - 3x + 29x^{1/2} - 3x^{3/2}$, очевидно, выпукла вверх на области определения (каждое слагаемое выпукло вверх). Поэтому если $d \le n - 2$ (т.е. во второй сумме в последнем неравенстве хотя бы два слагаемых), то q_{d+1} и q_{d+2} можно заменить на $q'_{d+1} = 0$, $q'_{d+2} = q_{d+1} + q_{d+2}$ (соответственно изменив x_i), тем самым уменьшив левую часть второго неравенства в (1) и не изменив сумму q_i. При этом $x'_d = \frac{1}{4}$, т.е. для нового набора значение d увеличилось на 1. Так можно продолжать, пока мы не получим $d \ge k - 1$. Заметим, что случай $d = k$ невозможен, так как тогда $2x_i - x_i^3 > 0$ при всех i. Значит, в новом наборе d =

$= k-1$, и он по-прежнему удовлетворяет неравенствам (1).

Теперь, положив $\overline{q} = \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d} q_i$, получаем

$$\sum_{i=1}^{d}\left(31 - 3q_i - 29q_i^{1/2} + 3q_i^{3/2}\right) \geq$$

$$\geq d\left(31 - 3\overline{q} - 29\overline{q}^{1/2} + 3\overline{q}^{3/2}\right)$$

согласно неравенству Йенсена, так как функция $f_1(x) = 31 - 3x - 29x^{1/2} + 3x^{3/2}$ выпукла вниз на области определения. Таким образом, если все числа $q_1, \ldots, q_d$ заменить на $\overline{q}$, то неравенства (1) будут выполнены (так как их сумма не изменится). Мы получили требуемый набор с $k-1$ одинаковым числом $a = x_1 = \ldots = x_{k-1}$ и одним числом $b = x_k$. При этом, очевидно, $a \leq \frac{1}{4}$; поскольку $2b - b^3 < 0$, то получаем $b > \sqrt{2}$.

2. Таким образом, осталось выяснить, при каком минимальном k существуют такие $a \leq \frac{1}{4}$, $b > \sqrt{2}$, что (здесь $d = k-1$)

$$da^2 + b^2 < \frac{da+b}{2}, \quad da + b < \frac{da^3 + b^3}{2}.$$

Перепишем эти неравенства в виде

$$\frac{2b^2 - b}{a - 2a^2} < d < \frac{b^3 - 2b}{2a - a^3}. \qquad (2)$$

Из (2) и вышесказанного следуют условия

$$\frac{b^3 - 2b}{2b^2 - b} > \frac{2a - a^3}{a - 2a^2}, \quad a \in \left[0; \frac{1}{4}\right], \quad b > \sqrt{2}. \qquad (3)$$

Оценим, какое минимальное значение может принимать выражение

$$\frac{2b^2 - b}{a - 2a^2} \qquad (4)$$

при условиях (3). Согласно (2), это и будет оценкой снизу для d.

Положим

$$g(x) = \frac{x^3 - 2x}{2x^2 - x} = \frac{x^2 - 2}{2x - 1} = \frac{1}{4}\left(2x + 1 - \frac{7}{2x-1}\right).$$

Из последнего представления видно, что $g(x)$ возрастает на промежутках $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ и $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Первое неравенство в (3) имеет вид $g(a) < g(b)$. Будем уменьшать b, пока не достигнем значения, при котором $g(b) = g(a)$. Так как $g\left(\sqrt{2}\right) = 0 < g(a)$, то новое значение будет больше $\sqrt{2}$. При этом, очевидно, (4) уменьшится.

Таким образом, мы можем считать, что

$$\frac{b^2 - 2}{2b - 1} = \frac{2 - a^2}{1 - 2a} = t.$$

Теперь a и b – два различных корня квадратного уравнения $x^2 - 2 = t(2x - 1)$, поэтому

$$a + b = 2t \Rightarrow b = 2t - a = 2\frac{2 - a^2}{1 - 2a} - a = \frac{4 - a}{1 - 2a}.$$

Выражение (4) принимает вид

$$h(a) = \frac{b(2b-1)}{a(1-2a)} = \frac{7(4-a)}{a(1-2a)^3}.$$

Чтобы найти его минимум на отрезке $a \in \left[0; \frac{1}{4}\right]$, найдем нули производной:

$$h'(a) = -\frac{7}{a(1-2a)^3} - \frac{7(4-a)}{a^2(1-2a)^3} +$$

$$+ \frac{42(4-a)}{a(1-2a)^4} = \frac{14\left(-3a^2 + 16a - 2\right)}{a^2(1-2a)^4}.$$

На отрезке $\left[0; \frac{1}{4}\right]$ получаем $a_0 = \frac{8 - \sqrt{58}}{3}$, причем это – точка минимума. Подставив ее в наше выражение, получаем

$$d > h(a_0) = 514,\ldots$$

Таким образом, $d \geq 515$, а $k \geq 516$.

3. Осталось построить пример для $d = 515$. Его легко получить из следующих соображений. Положим $a = a_0$, $b = \frac{4-a}{1-2a}$. Тогда

$$\frac{2b^2 - b}{a - 2a^2} = \frac{b^3 - 2b}{2a - a^3} = 514,\ldots \qquad (5)$$

Начнем увеличивать значение b, оставляя a неизменным. Тогда величина $g(b) = \frac{b^3 - 2b}{2b^2 - b}$, как мы выяснили, увеличивается; поэтому правое выражение становится больше, чем левое. Значит, настанет момент, когда правая часть (5) будет больше 515, а левая – по-прежнему меньше 515. Эти a и b будут удовлетворять (3), а значит, являться искомыми.

Можно предъявить и более простой пример. Возьмем $a = \frac{1}{8}$ (это число, довольно близкое к a_0). Соответствующее значение $b = \frac{4-a}{1-2a} = \frac{31}{6}$, при этом

$$\frac{b^3 - 2b}{2a - a^3} = \frac{b(2b-1)}{a(1-2a)} = \frac{13888}{27} = 514\frac{10}{27}.$$

Увеличивая значение b, как и выше, получаем требуемый пример. Так, подходит значение $b = 5{,}169$.

И.Богданов

Ф2048. *Материальная точка движется с постоянным ускорением. Ее координаты в начальный момент (0, 0, 0), через 1 секунду после начала движения (1, 1, 2), еще через секунду (2, 3, 4). Какой угол составляет вектор начальной скорости точки с вектором ее ускорения?*

По оси x точка движется равномерно, ее скорость вдоль этой оси равна $v_x = 1$ м/с. По оси z движение тоже

равномерное, но со скоростью $v_z = 2$ м/с. По оси y – придется посчитать.
Поскольку движение точки по условию равноускоренное, можно записать

$$1 = 0 + v_y \cdot 1 + \frac{a_y \cdot 1^2}{2},$$

$$3 = 0 + v_y \cdot 2 + \frac{a_y \cdot 2^2}{2},$$

где v_y – начальная скорость по оси y, $a = a_y$ – полное ускорение точки. Отсюда получаем

$$v_y = 0{,}5 \text{ м/с}, \quad a_y = 1 \text{ м/с}^2.$$

Теперь найдем угол между векторами начальной скорости и ускорения. Сложим векторно скорости по осям x и z, получим вектор длиной $\sqrt{5}$ м/с, перпендикулярный оси y. Отсюда легко найти угол φ между вектором начальной скорости и осью y:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{5}}{0{,}5} = 2\sqrt{5}, \text{ и } \varphi \approx 77{,}4°.$$

А.Зильберман

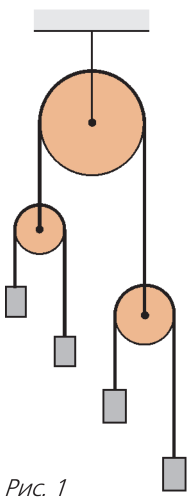


Рис. 1

Ф2049. *В системе (рис.1) трения нет. Массы грузов на левом блоке M и 2M, на правом блоке – 2M и 4M. Найдите ускорение самого легкого груза при движении.*

Силы натяжения кусков нитей, привязанных к грузам, одинаковы – ясно, что ускорения грузов массой $2M$ получаются одинаковыми. Направим все ускорения вверх (тогда проще написать без ошибок уравнения кинематических связей), обозначим ускорение груза массой M буквой a, грузов массой $2M$ – буквой b, груза массой $4M$ – буквой c, а натяжение кусков нитей, непосредственно привязанных к грузам, – буквой T (рис.2). Тогда

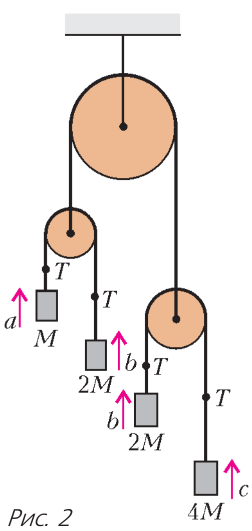


Рис. 2

$$T - Mg = Ma,$$

$$T - 2Mg = 2Mb,$$

$$T - 4Mg = 4Mc,$$

$$a + b = -(b + c).$$

Отсюда легко найти силу натяжения нити:

$$T = \frac{16Mg}{9}$$

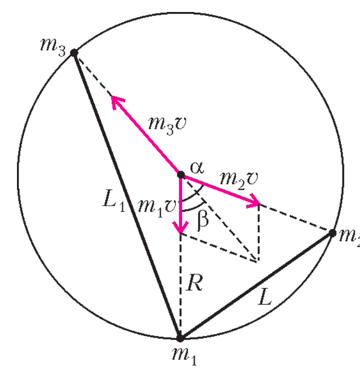
и ускорение самого легкого груза:

$$a = \frac{7g}{9}.$$

А.Блоков

Ф2050. *Снаряд, летевший вертикально, взорвался в верхней точке своей траектории, распавшись на три осколка с массами $m_1 = 2m$, $m_2 = 3m$ и $m_3 = 4m$, которые полетели в разные стороны с одинаковыми начальными скоростями. Через некоторое время после взрыва расстояние между осколками с массами m_1 и m_2 оказалось равным L. Чему было равно в этот момент расстояние между осколками с массами m_1 и m_3, если ни один из осколков еще не достиг земли? Влиянием воздуха и массой взрывчатого вещества снаряда пренебречь.*

Перейдем в систему отсчета, падающую на землю с ускорением свободного падения g. В этой системе отсчета осколки после взрыва движутся в разные стороны равномерно и прямолинейно с одинаковыми скоростями, равными начальной скорости v, приобретенной в результате взрыва. Из закона сохранения импульса следует, что начальные скорости осколков лежат в одной плоскости. Следовательно, в рассматриваемой системе отсчета все осколки после взрыва снаряда в любой момент времени располагаются на окружности с центром в точке взрыва.



Изобразим эту окружность на рисунке, обозначив угол между направлениями разлета осколков с массами m_1 и m_2 через α, а осколков с массами m_1 и m_3 – через $\pi - \beta$. Рассмотрим положения осколков в момент времени, когда расстояние между первым и вторым осколками оказалось равным L. Тогда из рисунка следует, что

$$L = 2R\sin\frac{\alpha}{2}, \quad L_1 = 2R\sin\frac{\pi - \beta}{2} = 2R\cos\frac{\beta}{2},$$

где R – радиус изображенной окружности, L_1 – искомое расстояние между первым и третьим осколками.
Поскольку импульс рассматриваемой системы осколков сохраняется, из теоремы косинусов, примененной к треугольнику из векторов импульсов осколков, следует

$$(m_3v)^2 = (m_1v)^2 + (m_2v)^2 - 2m_1m_2v^2\cos(\pi - \alpha).$$

Отсюда, с учетом заданных соотношений между m_1, m_2 и m_3, находим

$$\cos\alpha = \frac{m_3^2 - m_1^2 - m_2^2}{2m_1m_2} = \frac{1}{4},$$

т.е. угол разлета первых двух осколков составляет $\alpha \approx 75{,}5°$. Из теоремы синусов, примененной к тому же треугольнику, получаем

$$\frac{m_2v}{\sin\beta} = \frac{m_3v}{\sin(\pi - \alpha)},$$

откуда

$$\sin\beta = \frac{m_2}{m_3}\sin\alpha = \frac{m_2}{m_3}\sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \frac{3\sqrt{15}}{16}, \text{ и } \cos\beta = \frac{11}{16}.$$

Используя тригонометрические формулы для половинного угла, найдем

$$\cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\cos\beta\right)} = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{3}{2}} \text{ и}$$

$$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{L^2}{2R^2} = \frac{1}{4}, \text{ откуда } R = \sqrt{\frac{2}{3}}L.$$

Подставляя эти выражения в формулу для L_1, получим ответ:

$$L_1 = \frac{3}{2}L.$$

А.Якута

Ф2051. *По горизонтальному столу катится без проскальзывания велосипедное колесо. Его диаметр 1 м, масса 1 кг, скорость центра 1 м/с. В некоторый момент к колесу приклеился маленький кусочек жвачки массой 2 г, лежавший на столе. Скорость центра колеса теперь меняется. Оцените отличие минимальной скорости колеса от его начальной скорости.*

Колесо движется без проскальзывания, следовательно, скорость нижней точки колеса нулевая. В этом случае в момент приклеивания кусочка жвачки никакого удара не происходит (диаметр колеса во много раз больше размера кусочка), механическая энергия системы остается неизменной. Минимальная скорость центра колеса получится в тот момент, когда кусочек окажется в верхней его точке. Если скорость центра колеса в этот момент v, то скорость кусочка будет $2v$. Запишем уравнение для энергии:

$$Mv_0^2 = Mv^2 + \frac{m(2v)^2}{2} + mg\cdot 2R.$$

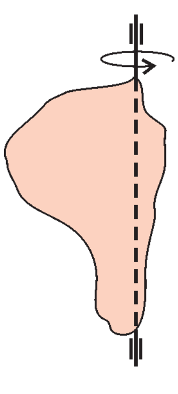
Здесь учтено, что кинетическая энергия колеса – тонкостенного цилиндра – складывается из кинетической энергии поступательного движения центра масс и энергии вращения относительно центра масс, в сумме получается Mv_0^2 или Mv^2. Теперь найдем минимальную скорость центра колеса:

$$v = \sqrt{\frac{v_0^2 - 2mgR/M}{1+2m/M}} \approx 0{,}98\,v_0.$$

Отличие минимальной скорости центра колеса от начальной составляет приблизительно 0,02 м/с.

Р.Колесов

Ф2052. *Однородное плоское тело вращается относительно вертикальной оси, лежащей в плоскости тела (см. рисунок). Тело раскрутили до угловой скорости ω_0 и отпустили. На тело действует сила сопротивления воздуха такая, что избыточное давление пропорционально скорости v участка поверхности с коэффициентом k (т.е. $\Delta F = k\Delta S v$). Масса тела M, его «поперечная» площадь S. Сколько оборотов совершит тело до полной остановки?*



Для решения можно использовать уравнения динамики вращающегося тела (момент сил, угловое ускорение, момент инерции), но можно обойтись энергетическими соображениями: кинетическая энергия «съедается» силами сопротивления воздуха.

Рассмотрим силу сопротивления, действующую на маленький кусочек поверхности площадью ΔS, находящийся на расстоянии r от оси вращения при угловой скорости ω:

$$\Delta F = k\omega r\Delta S.$$

За очень малый интервал времени Δt эта сила совершит работу

$$F\omega r\Delta t = k\omega^2 r^2\Delta S\Delta t.$$

Суммарная работа всех сил сопротивления при этом составит

$$k\omega^2\Delta t\Sigma\left(r_i^2\Delta S_i\right).$$

За это же время угловая скорость плоского тела уменьшится на некоторую малую величину $\Delta\omega$, а кинетическая энергия этого кусочка массой $m = M\,\Delta S/S$ уменьшится на

$$\frac{1}{2}m\omega^2 r^2 - \frac{1}{2}m(\omega-\Delta\omega)^2 r^2 = m\omega r^2\Delta\omega = \left(M\,\Delta S/S\right)\omega r^2\Delta\omega$$

(мы отбросили совсем малую величину, содержащую множитель $(\Delta\omega)^2$). Запишем в виде суммы полное изменение кинетической энергии тела за этот интервал времени:

$$\left(M/S\right)\omega\Delta\omega\Sigma\left(r_i^2\Delta S_i\right).$$

Приравняем работу сил сопротивления изменению кинетической энергии (знак изменения мы уже учли):

$$k\omega^2\Delta t\Sigma\left(r_i^2\Delta S_i\right) = \left(M/S\right)\omega\Delta\omega\Sigma\left(r_i^2\Delta S_i\right).$$

Слева и справа написаны одинаковые суммы, считать их не нужно, мы их просто сократим. В итоге получим

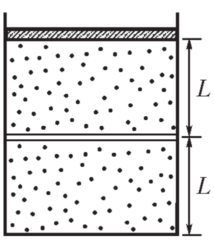
$$k\omega^2\Delta t = \left(M/S\right)\omega\Delta\omega, \text{ или } k\Delta\varphi = \left(M/S\right)\Delta\omega.$$

Мы видим, что угол поворота за некоторый интервал времени совсем просто связан с уменьшением угловой скорости за то же время. Тогда полный угол поворота до остановки будет $\varphi = \frac{M}{kS}\omega_0$, или в оборотах

$$n = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{M\omega_0}{2\pi kS}.$$

А.Киселев

Ф2053. *На столе стоит вертикальный теплоизолированный цилиндрический сосуд, в который вставлены два поршня (см. рисунок). Верхний поршень – тяжелый, теплонепроницаемый и может двигаться в цилиндре без трения. Нижний поршень – легкий и теплопроводящий, но между ним и стенками сосуда существует трение. В каждой из частей сосуда находится по ν молей идеального одноатомного газа. Вначале система находилась в тепловом равновесии, а обе части сосуда имели высоту L. Потом*



систему медленно нагрели, сообщив ей количество теплоты ΔQ. На какую величину ΔT изменилась температура газов, если нижний поршень при этом не сдвинулся с места? При каком наименьшем значении силы трения F между нижним поршнем и стенками это возможно? Какова теплоемкость C системы в этом процессе? Теплоемкостью стенок сосуда и поршней пренебречь.

Обозначим через $V_1 = SL$ объем нижней части цилиндра, где S – площадь поршней, через p_0 – давление в верхней части цилиндра, через ΔV_2 – изменение объема верхней части цилиндра.

Сообщенное системе количество теплоты ΔQ идет на изменение внутренней энергии всего газа в сосуде:

$$\Delta U = 2\nu \cdot \frac{3}{2} R\Delta T$$

и на совершение работы:

$$A = p_0 \Delta V_2 = \nu R\Delta T .$$

Следовательно,

$$\Delta Q = \Delta U + A = 4\nu R\Delta T \text{ , и } \Delta T = \frac{\Delta Q}{4\nu R} .$$

Теплоемкость системы в этом процессе равна отношению сообщенного ей количества теплоты к изменению температуры:

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = 4\nu R .$$

Поскольку объем нижней части сосуда постоянен, изменение давления Δp там определяется из соотношения $\Delta p V_1 = \nu R\Delta T$, откуда

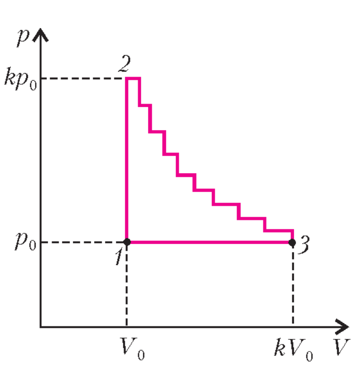
$$\Delta p = \frac{\nu R\Delta T}{V_1} = \frac{\Delta Q}{4V_1} .$$

Так как давление в верхней части сосуда постоянно и равно p_0, а в нижней части сосуда давление вначале также было равно p_0, то в конце нагрева разность давлений, оказываемых газами на нижний поршень, станет равной Δp. Чтобы поршень остался неподвижным, сила трения между ним и стенками сосуда должна быть не меньше

$$F = \Delta p S = \frac{\Delta Q}{4L} .$$

Д.Вагин, М.Семенов

Ф2054. *Над ν молями идеального одноатомного газа проводят циклический процесс, график которого изображен на pV-диаграмме (см. рисунок). Цикл состоит из вертикального (1–2) и горизонтального (3–1) участков и «лестницы» (2–3) из n ступенек, на каждой из которых давление и объем газа изменяются в одно и то же число раз. Отношение максимального давления газа к минимальному равно k, отношение максимального объема газа к минимальному также равно k. Найдите КПД тепловой машины, работающей по данному циклу.*



Поскольку тепловая машина совершает за цикл положительную работу, рассматриваемый цикл проходится по часовой стрелке, в направлении *1–2–3–1*. КПД этой тепловой машины равен отношению совершенной работы A к количеству теплоты Q_+, полученному от нагревателей. Обозначим через p_0 и V_0 минимальные давление и объем газа, тогда максимальные давление и объем будут равны kp_0 и kV_0 соответственно. Заметим, что на горизонтальном участке ступеньки объем возрастает в $k^{1/n}$ раз, а на вертикальном участке давление уменьшается в такое же число раз.

В данном цикле газ получает тепло на участке *1–2*, а также на горизонтальных участках лестницы *2–3*. Количество теплоты, полученное на участке *1–2*, равно изменению внутренней энергии газа:

$$Q_{12} = \frac{3}{2} kp_0V_0 - \frac{3}{2} p_0V_0 = \frac{3}{2}(k-1) p_0V_0 .$$

Далее, на i-м горизонтальном участке лестницы (i изменяется в пределах от 1 до n) газ расширяется от объема $V_0 k^{(i-1)/n}$ до $V_0 k^{i/n}$ при постоянном давлении $p_0 k^{1-(i-1)/n}$. При этом он совершает работу $\Delta A = kp_0V_0\left(k^{1/n} - 1\right)$, изменяет свою внутреннюю энергию на $\Delta U = 1{,}5\Delta A$ и получает количество теплоты $\Delta Q = 2{,}5\Delta A$. На вертикальных участках «лестницы» газ не совершает работы и отдает тепло. На участке *3–1* газ отдает тепло и совершает отрицательную работу $A_{31} = -(k-1) p_0V_0$. Следовательно, суммарное количество теплоты, полученное от нагревателей, равно

$$Q_+ = Q_{12} + n\Delta Q = \frac{3}{2}(k-1) p_0V_0 + \frac{5}{2} nk\left(k^{1/n} - 1\right) p_0V_0 ,$$

а совершенная работа равна

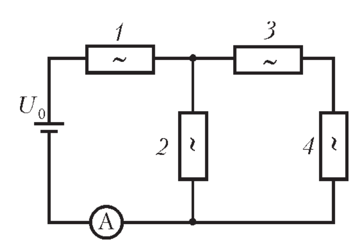
$$A = A_{31} + n\Delta A = -(k-1) p_0V_0 + nk\left(k^{1/n} - 1\right) p_0V_0 .$$

Тогда искомый КПД цикла равен

$$\eta = \frac{A}{Q_+} = \frac{nk\left(k^{1/n} - 1\right) - (k-1)}{\frac{3}{2}(k-1) + \frac{5}{2} nk\left(k^{1/n} - 1\right)} .$$

О.Шведов

Ф2055. *Электрическая цепь (см. рисунок) состоит из идеальной батарейки с ЭДС U_0, идеального амперметра и четырех одинаковых нелинейных элементов, для каждого из которых, в отличие от закона Ома, связь силы тока I и напряжения U имеет вид $I = \alpha U^2$. Какой ток I_0 показывает амперметр?*



Пронумеруем нелинейные элементы так, как показано на рисунке. Пусть U_2 – напряжение на нелинейном элементе *2*, тогда на каждый из последовательно соединенных элементов *3* и *4* приходится напряжение $U_2/2$. Следовательно, сила тока, текущего через элемент *2*, равна $I_2 = \alpha U_2^2$, а ток, текущий через элементы *3* и *4*, равен $I_3 = \alpha U_2^2/4$. Поэтому сила тока, текущего через амперметр, батарейку и элемент *1*, составляет $I_0 = I_2 + I_3 = 5\alpha U_2^2/4$. Напряжение на элементе *1* определяется из соотношения $U_1 = \sqrt{\dfrac{I_0}{\alpha}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}U_2$. Таким образом, напряжение на батарейке равно

$$U_0 = U_1 + U_2 = \left(1 + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)U_2 \text{,М М}$$

откуда находим

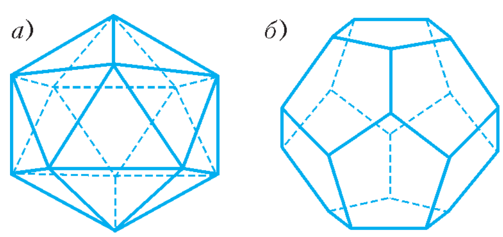
$$U_2 = \frac{U_0}{1 + \sqrt{5}/2},$$

и

$$I_0 = \alpha U_0^2 \frac{5/4}{\left(1 + \sqrt{5}/2\right)^2} = \alpha U_0^2 \frac{5}{9 + 4\sqrt{5}}.$$

Д.Харабадзе

Ф2056. *Тридцать одинаковых резисторов сопротивлением R каждый соединены между собой в пространстве так, что они являются ребрами выпуклого правильного многогранника (см. рисунок): а) двадцатигранника (икосаэдра); б) двенадцатигранника (додекаэдра). Какое сопротивление будет представлять описанная выше система а) или б), если подключиться к паре ее наиболее удаленных вершин? Сколько разных значений сопротивления можно будет получить в случае а) и в случае б), если подключаться к всевозможным парам вершин этих многогранников? Справка: грани икосаэдра – это 20 правильных треугольников, в каждой из 12 вершин сходятся по 5 треугольников; грани додекаэдра – это 12 правильных пятиугольников, в каждой из 20 вершин сходятся по 3 пятиугольника.*



Рассмотрим сначала икосаэдр. Из произвольной вершины икосаэдра выходят пять ребер, заканчивающихся в пяти вершинах, которые образуют правильный пятиугольник и соединены друг с другом пятью ребрами-перемычками. Назовем этот пятиугольник ближайшим к исходной вершине слоем. Следующими по удаленности от исходной вершины идут пять вершин с пятью перемычками, также образующие правильный пятиугольник, равный предыдущему и лежащий в следующем, втором слое, параллельном первому. Из каждой вершины первого слоя выходят и в каждую вершину второго слоя входят по два ребра, соединяющих первый слой со вторым, – всего десять ребер. И, наконец, самая дальняя вершина, равноудаленная от пяти вершин второго слоя, соединена с ними пятью ребрами. Общую систему вершин икосаэдра, таким образом, можно представить в виде двух правильных пятиугольных пирамид, высоты которых лежат на общей прямой, а основания параллельны и повернуты друг относительно друга на угол 36°. Поэтому при подключения источника питания к паре наиболее удаленных вершин пять вершин первого слоя будут электрически эквивалентны, т.е. будут иметь один и тот же потенциал, и их можно накоротко соединить друг с другом. Пять вершин второго слоя также будут иметь один и тот же потенциал, отличный от потенциала вершин первого слоя, и их тоже можно закоротить. Следовательно, эквивалентная схема в этом случае состоит из пяти соединенных параллельно резисторов, к которым присоединены последовательно сначала десять параллельных резисторов (из ребер-резисторов икосаэдра, соединяющих два слоя), а потом еще пять параллельных резисторов. Поэтому искомое сопротивление будет равно

$$R_{\text{общ}} = \frac{R}{5} + \frac{R}{10} + \frac{R}{5} = \frac{R}{2}.$$

Теперь рассмотрим в этом же ключе додекаэдр и будем стартовать от какой-нибудь его вершины, подключив к ней один из контактов источника питания. Ближайшими соседями этой вершины окажутся три вершины первого эквипотенциального слоя, с которыми она связана напрямую тремя выходящими из нее ребрами. Из каждой вершины этого слоя выходят по два ребра (всего в каждой вершине соединяются три ребра), попадающих в шесть вершин следующего, второго эквипотенциально слоя. Из этих шести вершин выходят двенадцать ребер, при этом шесть идут к следующему, третьему слою, состоящему опять-таки из шести вершин, а другие шесть ребер замыкаются парами, образуя три перемычки между предыдущими шестью эквипотенциальными вершинами второго слоя. Из каждой вершины третьего слоя выходят по два ребра, из них одно замыкается парой с ребром от соседней вершины этого слоя, а второе идет к одной из трех вершин следующего, четвертого слоя, к каждой из которых приходят по два ребра из вершин третьего слоя. Из трех вершин четвертого слоя выходят три оставшихся ребра, которые встречаются в последней из 20 вершин – той наиболее удаленной, к которой подключается второй контакт источника. Таким образом, из условий геометрической и физической симметрии наша цепь будет эквивалентна последовательному соединению пяти пучков параллельно соединенных резисторов: сначала трех, потом шести, затем снова шести (из-за исключенных шести перемычек), потом опять шести и, наконец, трех. Отсюда получаем, что искомое сопротивление будет равно

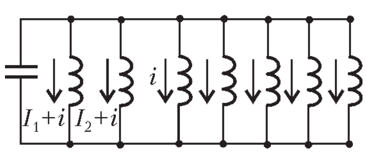
$$R_{\text{общ}} = \frac{R}{3} + \frac{R}{6} + \frac{R}{6} + \frac{R}{6} + \frac{R}{3} = \frac{7}{6}R.$$

Для ответа на второй вопрос надо подсчитать, через какое минимальное количество ребер соединяются наиболее удаленные вершины многогранников. В случае а) таких ребер, очевидно, три, и в силу симметрии возможны лишь три разных значения сопротивления: между соседними вершинами, через одну и через две (как раз между наиболее удаленными вершинами). В случае б) таких ребер пять, и возможны лишь пять разных значений сопротивления: между соседними вершинами, через одну, через две, через три и через четыре (между наиболее удаленными вершинами).

С.Кротов

Ф2057. *Конденсатор емкостью C и две одинаковые катушки индуктивностью L каждая соединены параллельно и подключены к внешней цепи. В некоторый момент конденсатор не заряжен, а токи катушек равны I и 2I. В этот момент очень быстро параллельно подключают еще пять таких же катушек, а внешнюю цепь отключают. Найдите максимальное значение заряда конденсатора и максимальное значение силы тока через катушку номер 7 (последняя из подключенных катушек). Элементы цепи считайте идеальными.*

ЭДС индукции всех параллельно соединенных катушек одинаковы в любой момент, при одинаковых индуктивностях это приводит к тому, что все изменения токов катушек одинаковы. Условно направим все токи в одну сторону (см. рисунок), обозначим ток одной из позже подключенных катушек i, тогда ток первой катушки $I_1 + i$ а ток второй катушки $I_2 + i$. При решении придется учитывать два возможных случая – в начальный момент токи первой и второй катушек направлены в одну сторону, например вниз, как на рисунке, или направлены в разные стороны, например вверх и вниз. Удобно уже в ответе подставить в формулу выбранные значения.



В тот момент, когда заряд конденсатора Q максимален, сумма токов должна обратиться в ноль:

$$(I_1 + i) + (I_2 + i) + 5i = 0 \text{, откуда } i = -\frac{I_1 + I_2}{7}.$$

Теперь запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{LI_1^2}{2} + \frac{LI_2^2}{2} = \frac{L(I_1 + i)^2}{2} + \frac{L(I_2 + i)^2}{2} + \frac{5Li^2}{2} + \frac{Q^2}{2C}.$$

После простых преобразований получаем уравнение

$$\frac{Q^2}{LC} + 7i^2 + 2(I_1 + I_2)i = 0.$$

Рассмотрим случай однонаправленных токов. Тогда

$$i = -3I_1/7 = -3I/7,\ I_2 = 2I_1 = 2I \text{, и } Q = I\sqrt{\frac{9LC}{7}}.$$

(Для второго случая все делается так же, но $I_2 = -2I_1$.) Теперь найдем максимальный ток через седьмую катушку. Заряд конденсатора в этот момент равен нулю, и можно воспользоваться законом сохранения энергии для магнитных полей катушек:

$$\frac{LI_1^2}{2} + \frac{LI_2^2}{2} = \frac{L(I_1 + i')^2}{2} + \frac{L(I_2 + i')^2}{2} + \frac{5Li'^2}{2}$$

(тут i' не такой, как в первом случае!). Отсюда

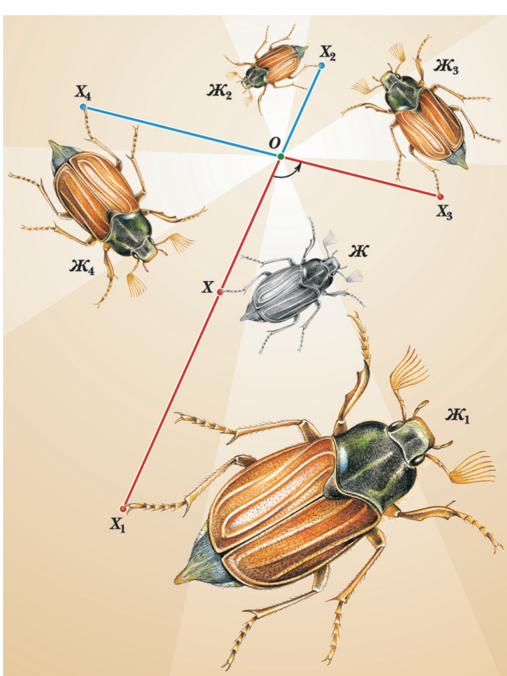
$$7i'^2 + 2(I_1 + I_2)i' = 0,$$

и для случая однонаправленных токов находим

$$i' = -\frac{6I}{7}.$$

(Впрочем, если учесть нулевой начальный ток через дополнительные катушки и характер возникающих колебаний, то этот ответ можно написать сразу.)

З.Рафаилов



Вниманию наших читателей!

Издательство «Росмэн» выпустило в свет том «Математика. Информатика» серии «Современная иллюстрированная энциклопедия». Книга состоит примерно из 2000 статей практически по всем разделам математики и информатики. Многие статьи великолепно иллюстрированы и доступны широкому кругу читателей. Приятно отметить, что среди авторов статей есть и авторы журнала «Квант».

Изображение жука ($Ж$) и его образы при гомотетиях ($Ж_1$, $Ж_2$) и поворотных гомотетиях ($Ж_3$, $Ж_4$). (Поворотная гомотетия – это композиция поворота и гомотетии с общим центром O.)